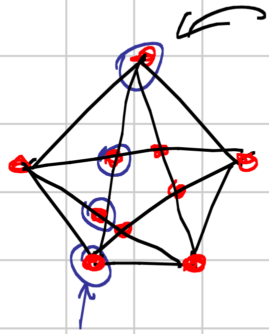
COMBINATORIA 2 basic

Titolo nota 04/09/2013

Problema 1. Drago a 100 teste.
Spada taglia 15, 17, 20, 5 teste.
Gli ricrescono 24, 2, 14, 17 ".
Per uccidere devo tagliargli tutte le teste.

Idea a ogni colpo di spada
$+9$, -15, -6, 12 teste
$\longrightarrow$ non cambia il resto nella divisione per 3.

Problema 2.



lampadine accese

Posso cambiare stato a lati/diagonali.

Voglio spegnere tutto.

Ad ogni mossa cambiano 2 lampadine sul perimetro $\rightarrow$ parità del # di lampadine spente sul perimetro è INVARIANTE $\rightarrow$ da 0 spente non arrivo a 5!

Problema per dopo: esagono regolare.

Problema 3. Un gioco fra A e B

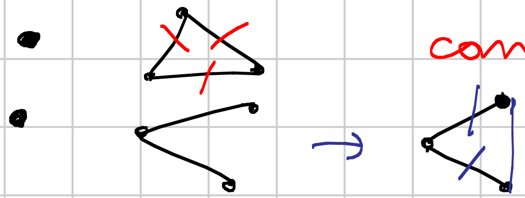
vertici, archi

$G = (V, E)$

semplice

coppie di el. di V

A turno una mossa del tipo



- cancello triangolo
- oppure: inverto V

Domanda: come si gioca per vincere? (Chi non può più muovere perde.)

OSS #1. il gioco finisce perché gli archi diminuiscono.

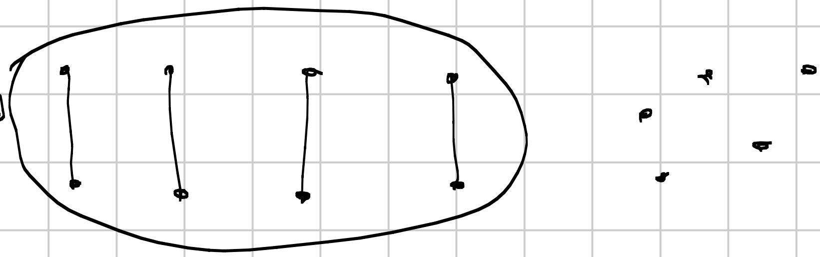
OSS #2. quanti archi incidono su v $= d(v)$ ← grado di v

ad ogni mossa 3 oppure 1 vertice hanno il grado diminuito di 2.

→ CANDIDATO INVARIANTE! parità del grado di ogni vertice.

→ OSS #3. Quando il gioco finisce? Quando i gradi sono 0 o 1; una situazione del genere:

quelli che avevano d disp. $d = m$ →



$\frac{m}{2}$ archi

PARENTESI: m era necessariamente PARI.

$$\sum_{x\in V} d(x) = 2|E|$$

$|E|$ ← # archi

→ m = # vertici di d disp dev'essere pari.

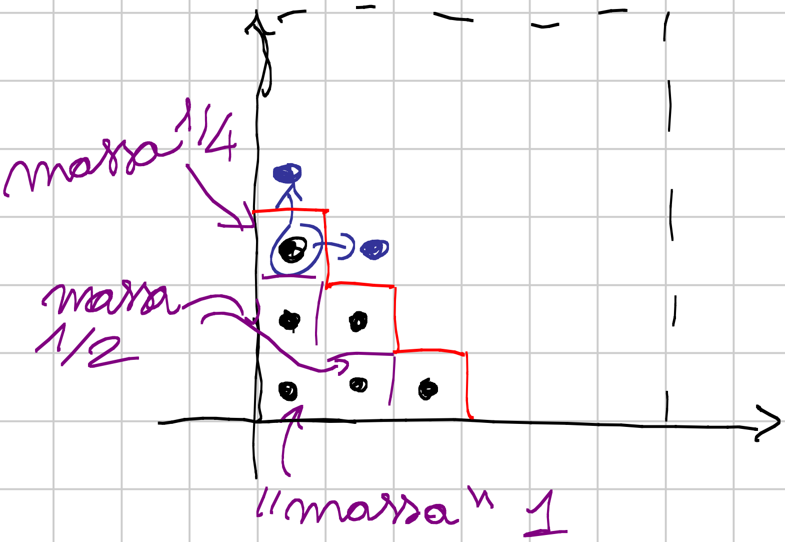
OSS # 4 Quanti archi devo togliere?

$|E| - \frac{m}{2}$.

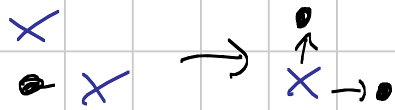
Il vincitore è determinato!

Tolgo $m/2$ archi a colpi di 1 o di 3: ad ogni mossa tolgo dispari → la parità delle mosse è la stessa di $m/2$.

Problema 4



mossa:



posso "pulire" la zona coperta all'inizio?

diagonale n → massa $\frac{1}{2^{n-1}}$

la massa totale (delle caselle con •) sulla scacchiera è invariante! In partenza era $2 + \frac{3}{4}$.

Vorrei dim. che non basta il complementare della mia zona per prendersi tutta la massa.

La massa della prima colonna è $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots = 2$

2^a

$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots = 1 = \frac{1}{2} \cdot 2$

3^a

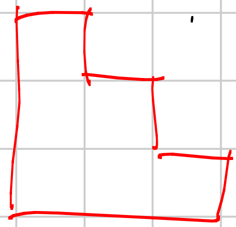
$$\frac{1}{2} = \frac{1}{4} \cdot 2$$

...

La massa totale $2\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots\right) = 4$

Quindi NON potrò mandare i • in una zona che ha massa totale
$4 - 2 - 3/4 < 2$ → ho perso! :(

Problema per dopo: c'è un solo pallino in (0,0). Volete pulire
Ce la fate?



Problema 5. 12 nani. Alcuni hanno la casa [magenta] altri [blu]
A gennaio il nano corrispondente si adegua alla maggioranza <u>degli altri</u>. A un certo punto smetteranno di ridipingere?

Variante: Ogni nano si adegua alla maggioranza dei SUOI amici.

"invariante"

\# coppie con casa di colore diverso.

A ogni passaggio diminuisce o sta fermo.

→ ma forse meglio
\# coppie di amici con case di colore diverso

→ se tizio non cambia colore rimane uguale

→ se tizio cambia colore diminuisce.

Da un certo punto in poi quella quantità rimane fissa! Ma allora i nani non stavano cambiando colore alle case.

Problema per dopo:

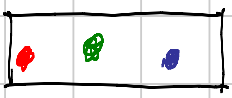
Avete un grafo con almeno un arco. Dimostrate che esiste una partizione dei suoi vertici in due parti in modo che ci siano più archi fra le due parti che "dentro".

Problema 6. Scacchiera $n \times n$, tolgo 2 angolini opposti. Posso tassellarla con tessere del domino?

(n dispari → n^2-2 è dispari → non si "tassella")

No! Perché coloro "a scacchiera" e ho tolto 2 angoli dello stesso colore ma ...

Problema 7. Scacchiera 10×10, tasselli



"tassello" con 33 pezzi.

Dove può stare il buco?

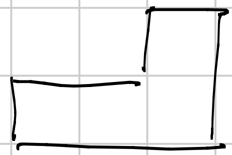
Sulla scacchiera c'è un ● in più

→ il buco dev'

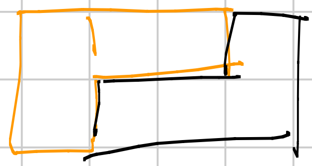
essere •.

In ENTRAMBE le colorazioni; le caselle □ POSSONO rimanere

devo dimostrarlo! (esempio)

Problema 8. Quali rettangoli $m \times n$ posso tassellare con "" ?

- $4h \times 2k$ SI

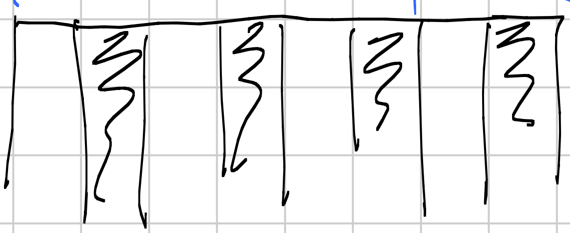


- mn dev'essere multiplo di 4
- Ma pare anche di 8... perché?

$2d_1 \times 2d_2$ $\qquad$ $4d_1 \times d_2$

lato pari

colora a strisce



* una L copre 1 bianca e 3 nere (o viceversa)

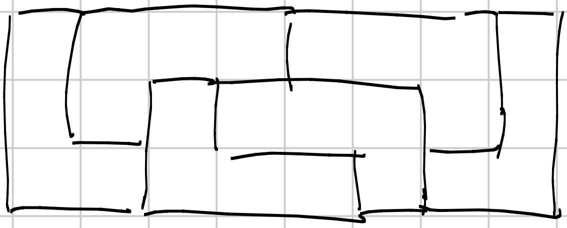
$\#$ caselle bianche $= \#$ caselle nere $= 2d_1 d_2$ ← PARI!

Quanti pezzi servono? Servono in # pari per *

In totale però $\frac{4d_1 d_2}{4}$ pezzi ↖ DISPARI!

Quindi non riesco a tassellare se $8 \nmid mn$

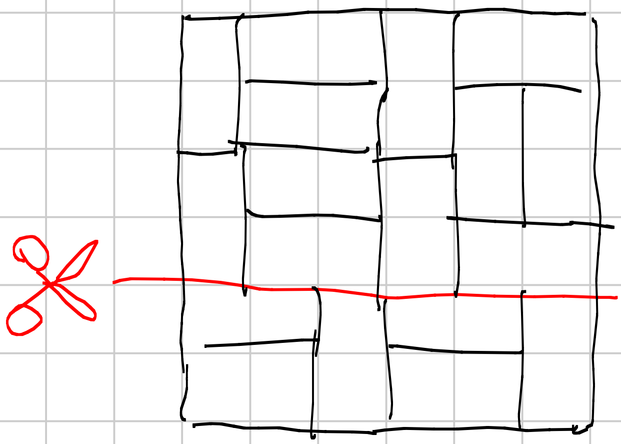
- Riesco a tassellare $8h \times d$? $d \geq 3$

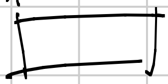


ho vinto :)

CONCLUSIONE: riesco a tassellare $\iff$ $8 \mid mn$, $m, n \geq 2$.

Problema extra :



6×6 tassellata con "  ".

Dimostrare che (comunque tassellata) esiste un "taglio"

Problemi $d(n)$ = "somma cifre di n"

Risolvere $n + d(n) + d(d(n)) = 2014$.

ho un'eq. di 2° grado $ax^2 + bx + c$; posso scambiare a con c oppure sostituire a "x" "$x+t$" (con $t \in \mathbb{R}$ a mia scelta). Posso portare $x^2 - x - 2$ in $x^2 - x - 1$?

\+ problemi sopra (esagono, bipartizioni, tagli pulire angolo della scacchiera)

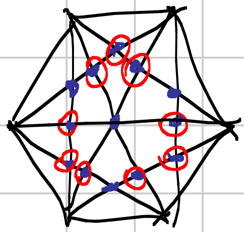
"Soluzioni"

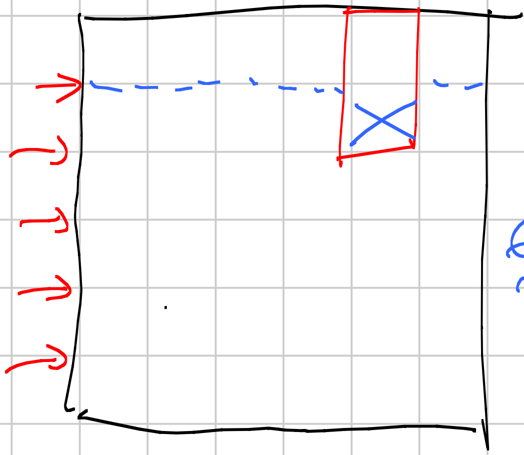
$$\Delta^2 = b^2 - 4ac$$

- scambiare a e c è chiaro;
- $\Delta^2 = a^2\left(\frac{b^2}{a^2} - 4c/a\right) = a^2(S^2 - 4P)$

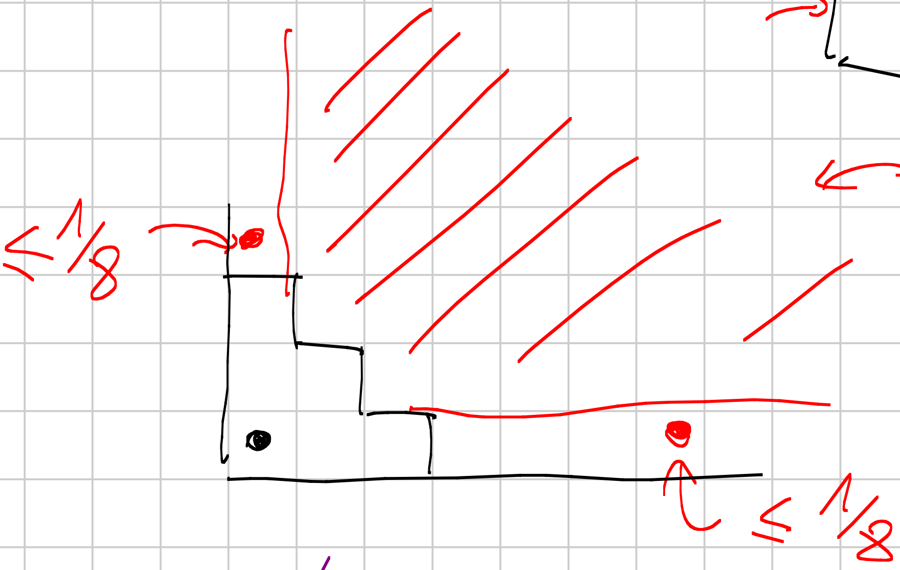
$$= a^2(x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2) =$$
$$= a^2(x_1 - x_2)^2$$

Esagono

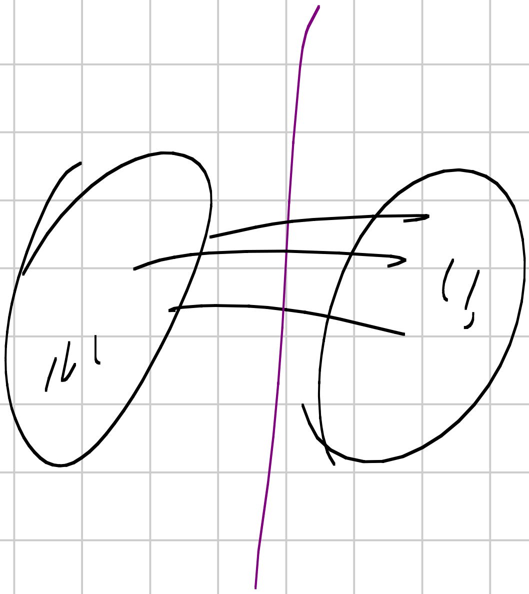




6×h meno



$$2\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\dots\right) + 2 + 3/4 =$$
$$= 2 + \frac{1}{2} + 3/4$$
$$4 - \dots = 3/4$$



$$\sum_x \#\text{amici}(x) - \#\text{nemici}(x)$$

$= 2\,\#$archi "interni" $- 2\,\#$archi "esterni"

→ la faccio diventare negativa?