

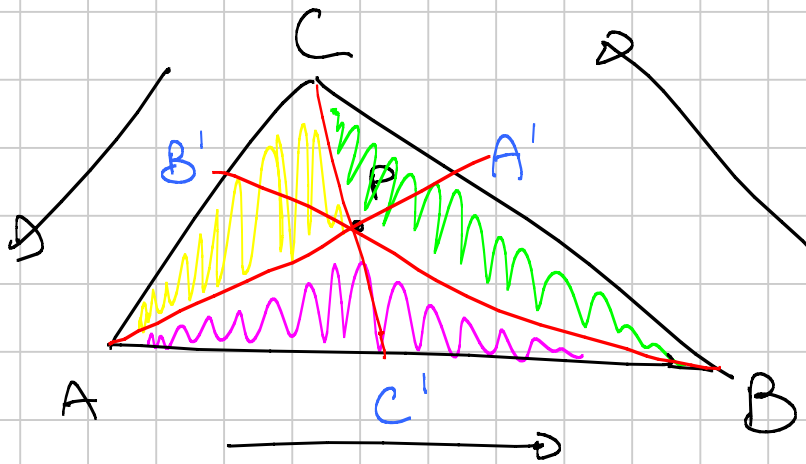
G3 - Basic - Geom. Sintetica (Pd&kk)

Titolo nota

05/09/2013

CEVA

MENELAO



Th (CEVA)

$$\frac{AC'}{C'B} \cdot \frac{BA'}{A'C} \cdot \frac{CB'}{B'A} = 1$$

Dim: Idea: considera aree! $\frac{AC'}{C'B} = \frac{[ACC']}{[BCC']} = \frac{[APC']}{[BPC']}$ (*)

$$= \frac{[ACC'] - [APC']}{[BCC'] - [BPC']} = \frac{[APC]}{[BPC]} \quad (I) \quad (*)$$

Ora, stessa costruzione sugli altri lati!

(*) $\begin{array}{c|c} A \rightarrow B & A' \rightarrow B' \\ B \rightarrow C & B' \rightarrow C' \\ C \rightarrow A & C' \rightarrow A' \end{array} \rightarrow \frac{BA'}{A'C} = \frac{[BPA]}{[CPA]} \quad (II)$

$\rightarrow \frac{CB'}{B'A} = \frac{[CPB]}{[APB]} \quad (III)$

Tesi: $(I) \cdot (II) \cdot (III) = 1$

perché le 3 aree si semplificano

(*)

$$\frac{x}{y} = \frac{z}{w} = \frac{x-z}{y-w}$$

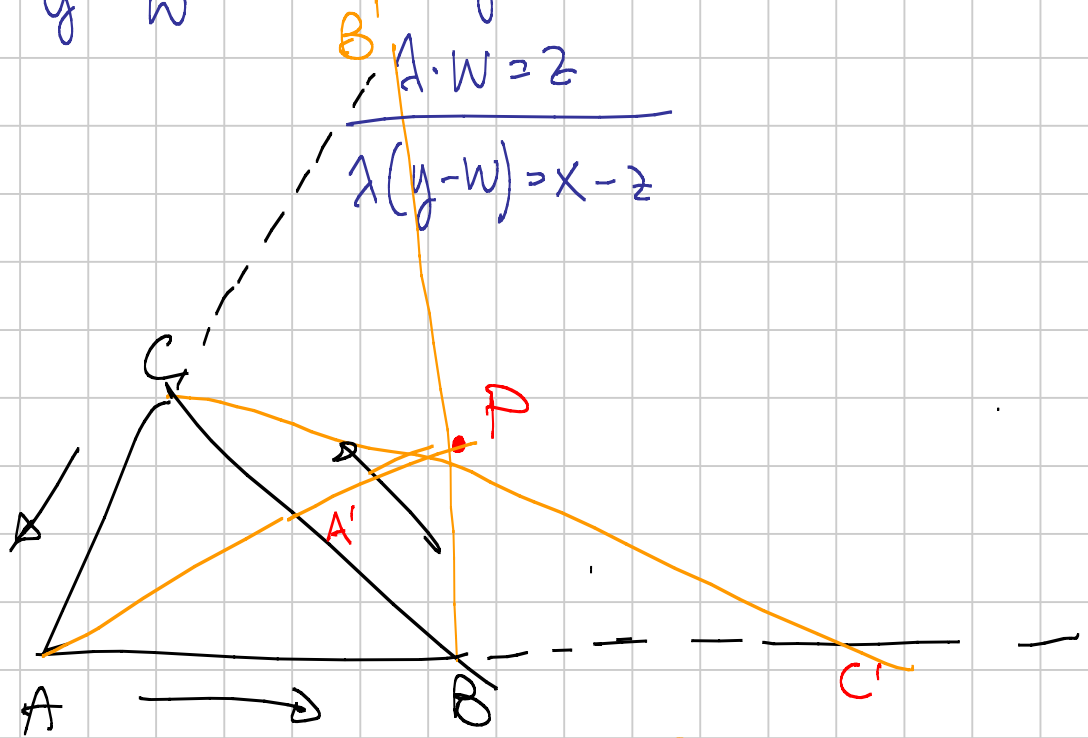
$\uparrow$ $\uparrow$
 H_p T_h

Dim: $\lambda = \frac{x}{y} = \frac{z}{w}$

$$\lambda \cdot y = x$$

$$A \cdot W = z$$

$$\lambda(y-w) = x-z$$



lunghezze con segno!

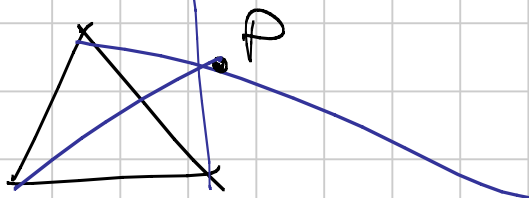
$$\frac{AC'}{C'B} \cdot \frac{BA'}{A'C} \cdot \frac{CB'}{B'A} = 1$$

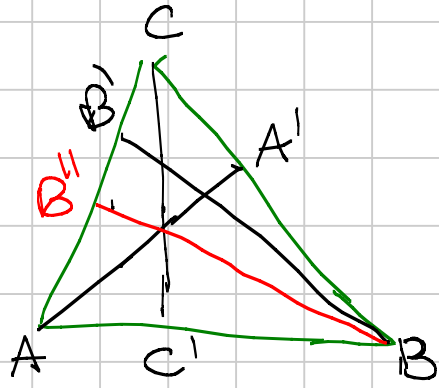
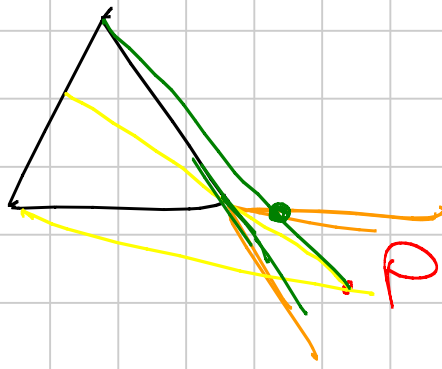
$\oplus$ $\oplus$ $\ominus$
 $\ominus$ $\oplus$ $\oplus$

Th: questo rapporto fa $\oplus 1$ anche se il punto P è esterno al triangolo (e posso di usare lunghezze orientate)

dim: i) se rifacciamo la dim. sopra, rifunzione a posto di cambiare "-" in "+"

ii)

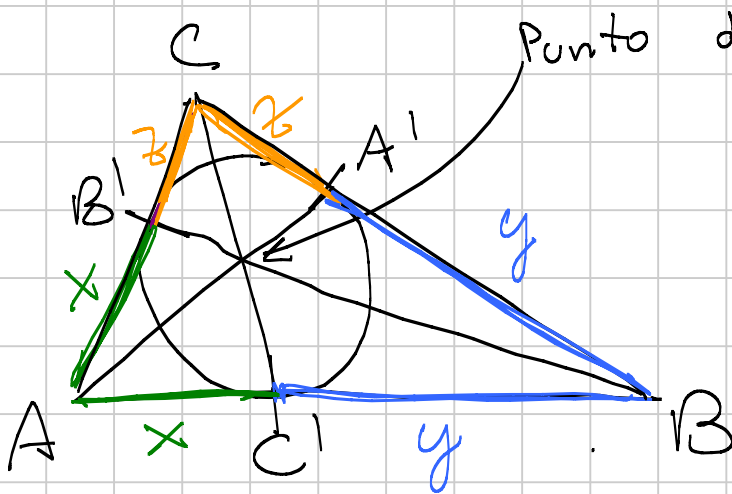




$$\frac{AC'}{C'B} \cdot \frac{BA'}{A'C} \cdot \frac{CB'}{B'A} = 1$$

$$\frac{AC'}{C'B} \cdot \frac{BA'}{A'C} \cdot \frac{CB''}{B''A} = 1$$

ASSURDO

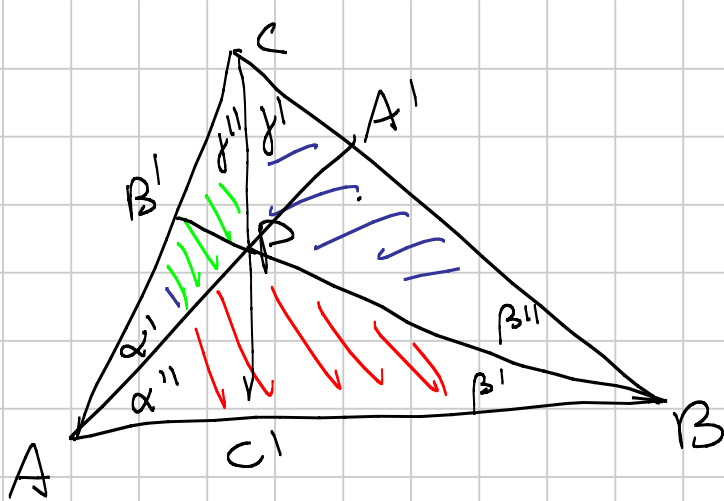


Punto di Gergonne

$$\frac{x}{y} \cdot \frac{y}{z} \cdot \frac{z}{x} = 1$$

Compito per casa: trovare x, y, z in funzione delle lunghezze dei lati

Compito per casa (dopo lungo allenamento di base): Coniugato isotomico

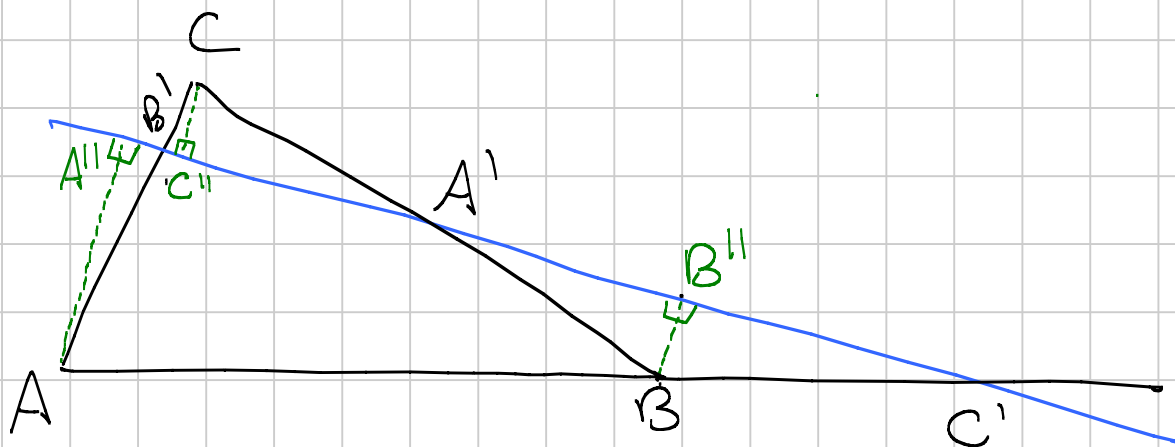


AA', BB', CC' concorrono
se e solo se

$$\frac{\sin \alpha'}{\sin \alpha''} \cdot \frac{\sin \beta'}{\sin \beta''} \cdot \frac{\sin \gamma'}{\sin \gamma''} = 1$$

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{\text{Area APB}}{\text{Area BPC}} \cdot \frac{\text{Area BPC}}{\text{Area CPA}} \cdot \frac{\text{Area CPA}}{\text{Area APB}} = \\ &= \frac{AB \cdot PB \cdot \sin \beta'}{CB \cdot PB \cdot \sin \beta''} \cdot \frac{BC \cdot PC \cdot \sin \gamma'}{AC \cdot PC \cdot \sin \gamma''} \cdot \frac{CA \cdot PA \cdot \sin \alpha'}{BA \cdot PA \cdot \sin \alpha''} \end{aligned}$$

Coniugato isogonale



$A'B', C'$ allineati se e solo se

$$\frac{AC'}{C'B} \cdot \frac{BA'}{A'C} \cdot \frac{CB'}{B'A} = -1$$

$AA'' \parallel BB'' \parallel CC''$ (Talete)

$$\frac{AC'}{C'B} = \frac{AA''}{B''B} \quad \frac{BA'}{A'C} = \frac{BB''}{C''C}$$

$$\frac{CB'}{B'A} = \frac{CC''}{A''A}$$

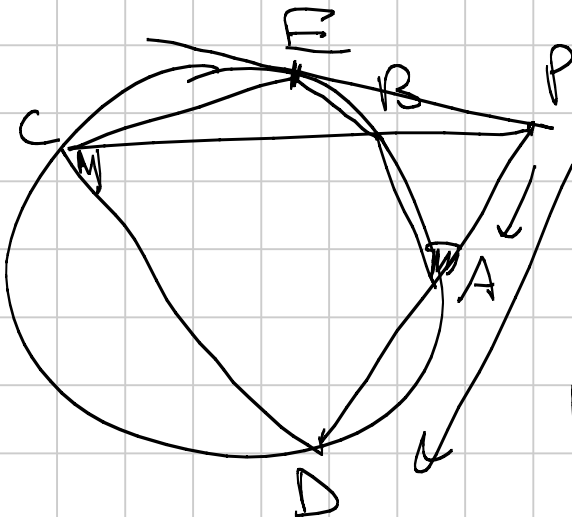
$$\frac{\cancel{AA''}}{\cancel{B''B}} \cdot \frac{\cancel{BB''}^{-1}}{\cancel{C''C}} \cdot \frac{\cancel{CC''}^{-1}}{\cancel{A''A}^{-1}} = -1$$



A', B', C' sono allineati.

$$\frac{AC'}{C'B} \cdot \frac{BA'}{A'C} \cdot \frac{CB'}{B'A} = \textcircled{-1}$$

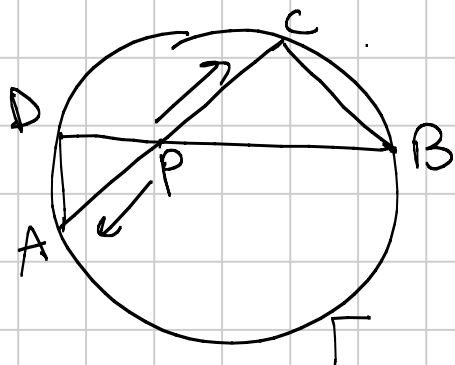
$$\underbrace{\frac{AC'}{C'B}}_{\frac{AC}{CB}} \cdot \underbrace{\frac{BA'}{A'C}}_{\frac{BA}{AC}} \cdot \underbrace{\frac{CB'}{B'A}}_{\frac{CB}{BA}} = \textcircled{-1}$$



$$PAB \sim PCD$$

$$\frac{PA}{PC} = \frac{PB}{PD}$$

$$PA \cdot PD = PB \cdot PC = PE^2$$

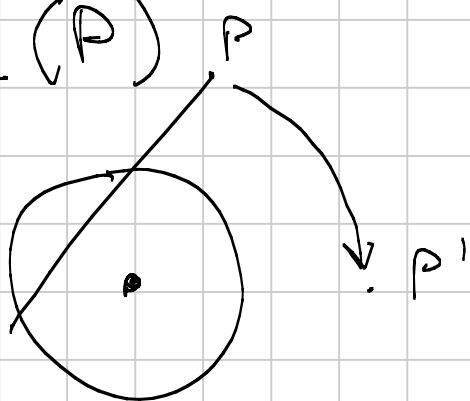


$$PAD \sim PBC$$

$$\frac{PA}{PB} = \frac{PC}{PD}$$

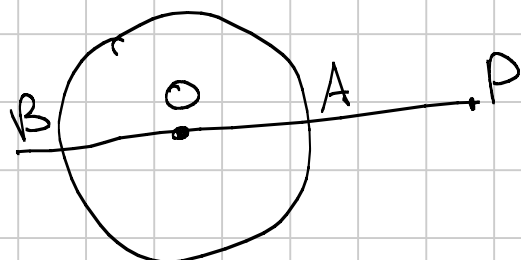
$$PA \cdot PC = PB \cdot PD$$

$Pow_{\Gamma}(P)$



$Pow_{\Gamma}(P)$ dipende solo dalla distanza di P dal centro

$$Pow_{\Gamma}(\text{punto su } \Gamma) = 0$$



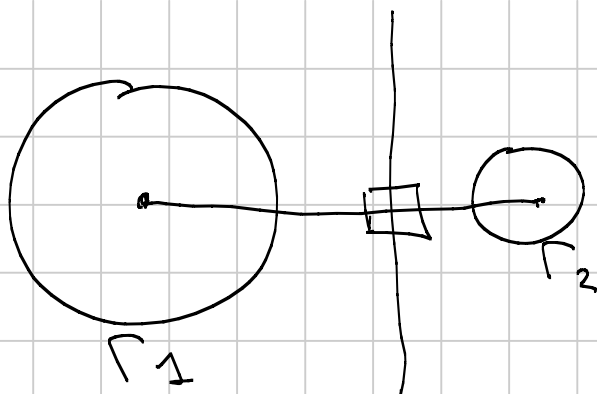
$$PA \cdot PB = (PO - AO)(PO + OB) = PO^2 - R^2$$

P sta sulla circonferenza Γ di centro O e raggio R se e solo se

$$\underbrace{(x_p - x_0)^2 + (y_p - y_0)^2}_{OP^2} - R^2 = 0$$

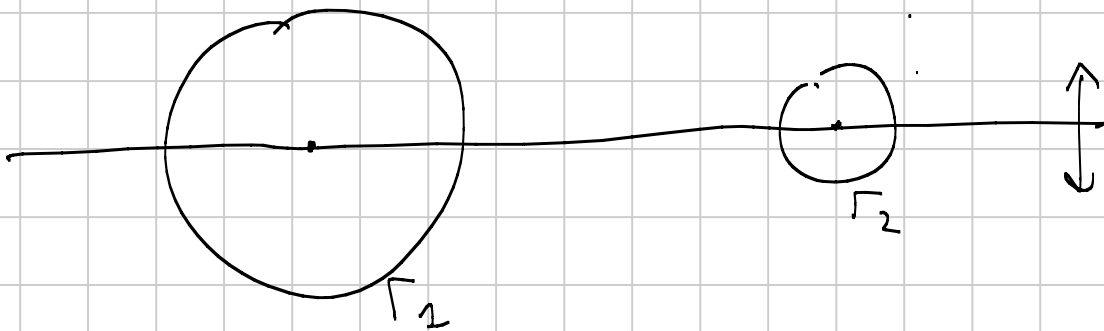
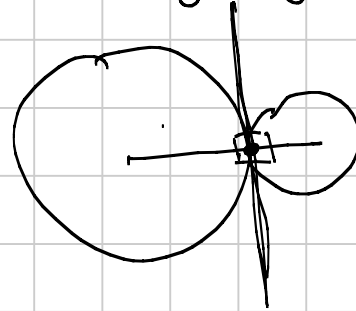
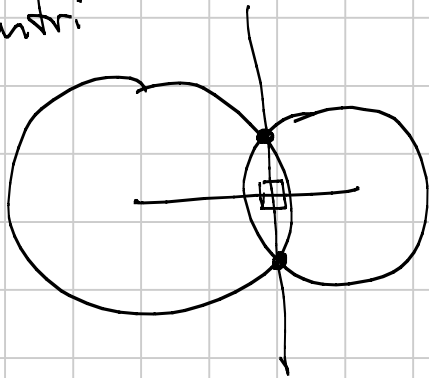
$$\underbrace{(x_p - x_0)^2 + (y_p - y_0)^2}_{OP^2} - R^2 = Pow_{\Gamma}(P)$$

$$x_p^2 + \dots \quad y_p^2 + \dots$$



luogo dei punti P
per cui
 $Pow_{\Gamma_1}(P) = Pow_{\Gamma_2}(P)$
?

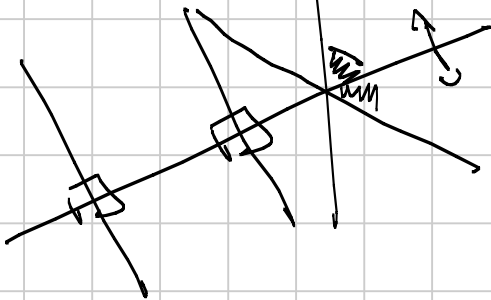
asse radicale di Γ_1 e Γ_2
è perpendicolare alla congiungente i
centri

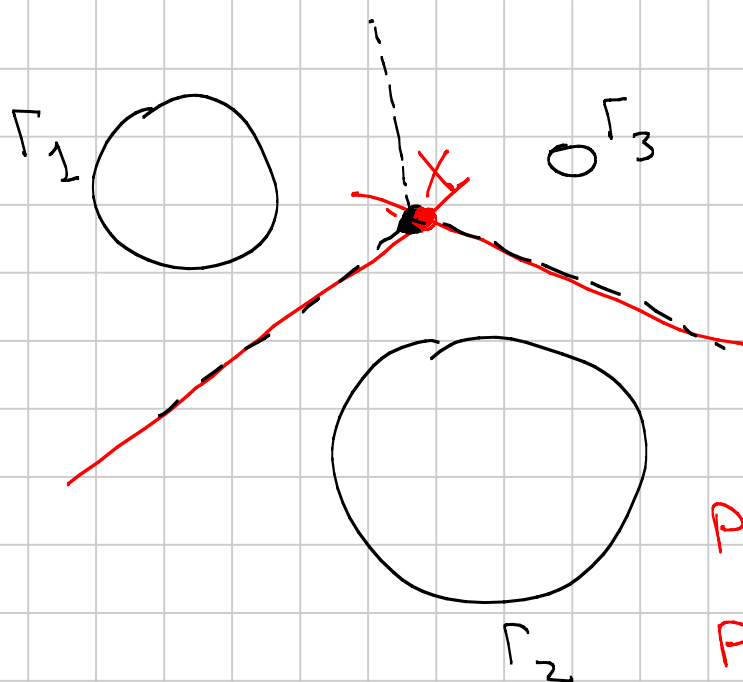


simmetrica rispetto alla congiungente i centri

Γ_1 va in Γ_1 , Γ_2 in Γ_2

Allora le potenze dei punti si conservano
Quindi asse radicale va nell'asse radicale
che quindi è ortogonale
alla congiungente i
centri





Asse radicale

di Γ_1, Γ_2

Quello di Γ_2, Γ_3

Quello di Γ_3, Γ_1

concorrono

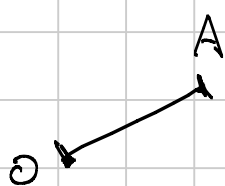
$$\text{Pow}_{\Gamma_1}(X) = \text{Pow}_{\Gamma_2}(X)$$

$$\text{Pow}_{\Gamma_2}(X) = \text{Pow}_{\Gamma_3}(X)$$

Omotetie

di centro O e ragione $\lambda \neq 0$

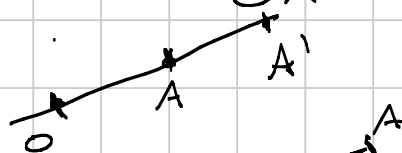
A va in A' tale che



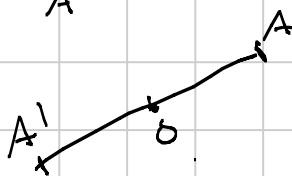
• O, A, A' sono allineati

$$\frac{OA'}{OA} = \lambda$$

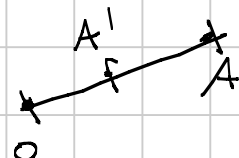
$$\lambda = 2$$



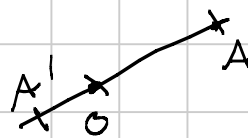
$$\lambda = -1$$



$$\lambda = \frac{1}{2}$$



$$\lambda = -\frac{1}{3}$$



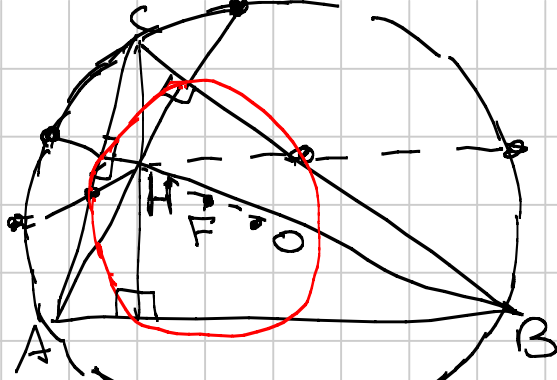
Le distanze vengono moltiplicate per $|\lambda|$

$$d(A', B') = |\lambda| d(A, B)$$

Rette vanno in rette parallele alle originali

Circonferenza di centro C e raggio r

va in una circonferenza con centro l'immagine di C e raggio $|\lambda|r$



H ortocentro

Omotetia di centro
H e ragione $\frac{1}{2}$

①

Il simmetrico dell'ortocentro rispetto ad un lato sta sulla circonferenza circoscritta

②

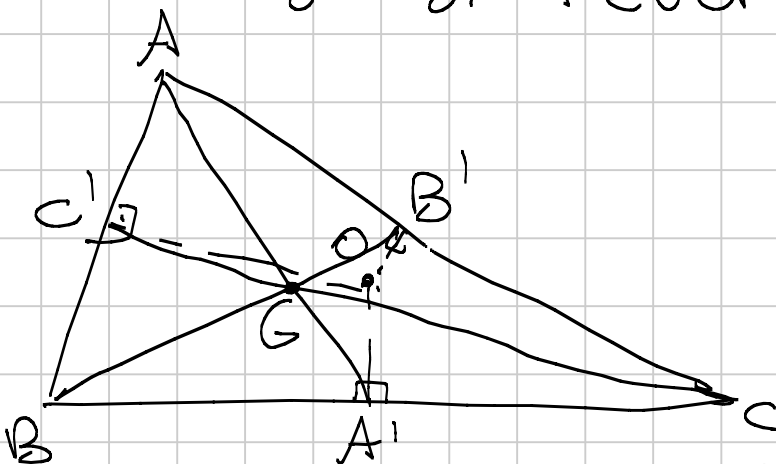
Il simmetrico dell'ortocentro rispetto al punto medio di un lato sta sulla cfr circoscritta

Con questa omotetia la circoscritta va in una circonferenza di centro F tale che H, F, O allineati e $HF = FO$ raggio metà del raggio della circoscritta

Passa per:

- punti medi di HA, HB, HC
- piedi delle altezze
- punti medi dei lati

Circonferenza dei 9 punti
o di Feuerbach



$$BG = 2GB'$$

$$AG = 2GA'$$

$$CG = 2GC'$$

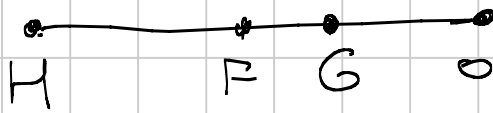
Omotetia di centro G e ragione $\frac{1}{2}$

A va in A'
B in B'
C in C'

La circoscritta va nella circonferenza, per A', B', C' , che è sempre la cfr di Feuerbach

O, G, F sono allineati in quest'ordine e $OG = 2GF$

La retta per H, F, G, O è detta retta di Eulero

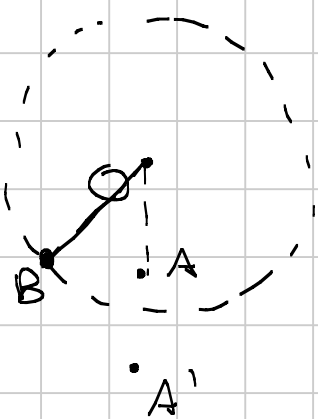


$$HG = 2GO$$

$$HF = FO$$

$$OG = 2GF$$

Circonferenza di centro O e raggio r

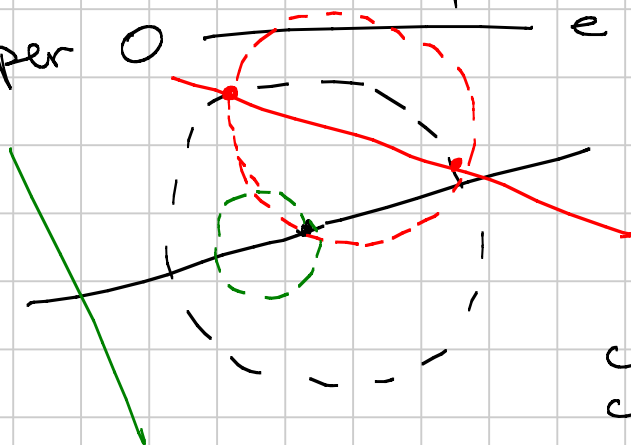


A va in A' tale che $OA \cdot OA' = r^2$

- A, A', O sono allineati
- A, A' sono dalla stessa parte rispetto ad O
- $OA \cdot OA' = r^2$

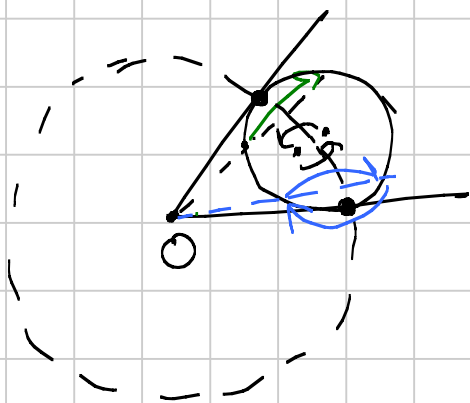
Inversione di centro O e raggio r
rette per O vanno in rette per O

rette NON per O vanno in circonferenze per O e viceversa

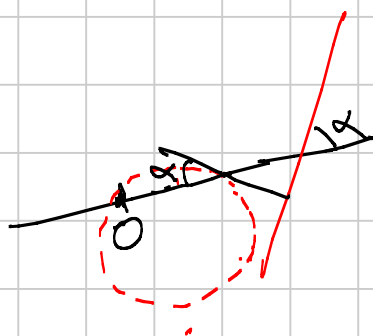


Circonferenze non per O vanno in circonferenze non per O

Achtung! In questo caso, il centro non va nel centro



Si conservano gli angoli tra le tangenti



Teorema di Tolomeo

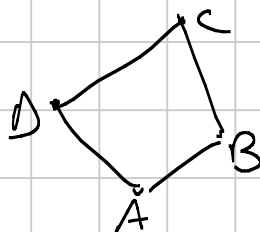
$ABCD$ quadrilatero, allora

$$AB \cdot CD + BC \cdot AD \geq AC \cdot BD \text{ e vale } =$$

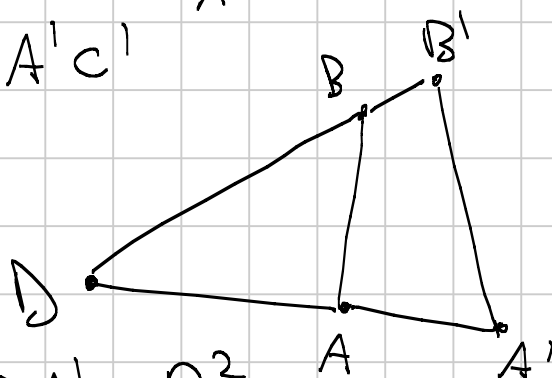
se e solo se $ABCD$ ciclico

Facciamo un'inversione di centro D e raggio R

A va in A'
 B va in B'
 C va in C'



$$A'B' + B'C' \geq A'C'$$



$$DB \cdot DB' = DA \cdot DA' = R^2$$

$$\frac{DB}{DA} = \frac{DA'}{DB'} \text{ allora } \triangle DAB \sim \triangle DB'A'$$

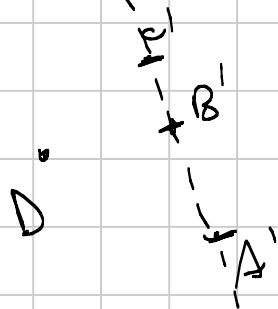
$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{DB'}{DA} = \frac{DB' \cdot DB}{DA \cdot DB} = \frac{R^2}{DA \cdot DB}$$

$$A'B' = AB \cdot \frac{R^2}{DA \cdot DB}$$

$$A'B' + B'C' \geq A'C'$$

$$\cancel{DC} \cdot AB \cdot \frac{R^2}{\cancel{DA \cdot DB}} + \cancel{DA} \cdot BC \cdot \frac{R^2}{\cancel{DA \cdot DB}} \geq \cancel{DB} \cdot AC \cdot \frac{R^2}{\cancel{DB \cdot DA}}$$

$$DC \cdot AB + DA \cdot BC \geq DB \cdot AC$$



se A', B', C' allineati.
 A, B, C e D stanno sulla
 stessa circonferenza

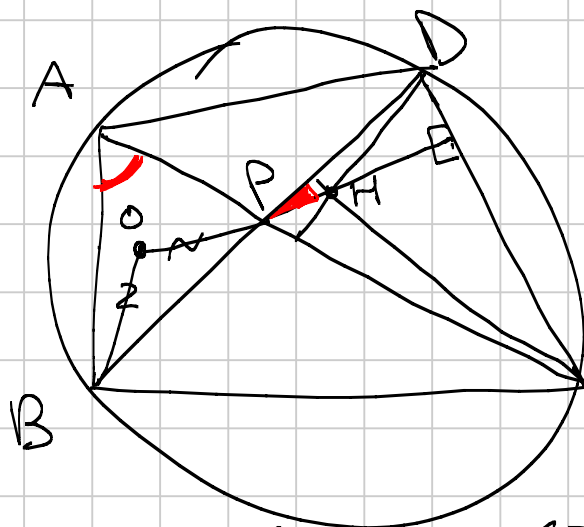
Parte 1

12, 14, 15, 16, 18, 19 (e altri, se volete)

Parte 2

Esercizi 1, 3, 6, 8, 9 (e altri, se volete)

1



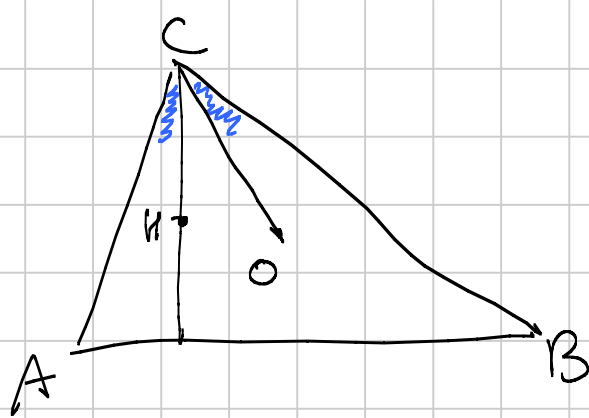
$$DPH \stackrel{?}{=} OPB$$

$$\downarrow \frac{\pi}{2} - \hat{PDC} =$$

$$= \frac{\pi}{2} - \hat{BAC}$$

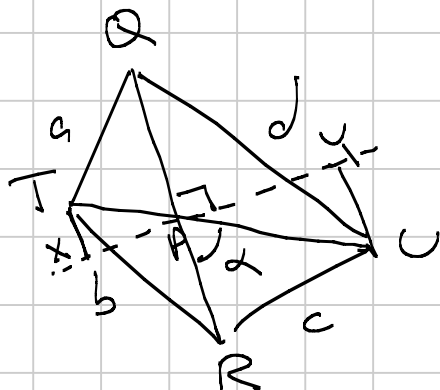
$$\begin{aligned} \hat{BOP} &= 2\hat{BAP} = 2\left(\frac{\pi}{2} - \hat{HPD}\right) = \\ &= \pi - 2\hat{HPD} \end{aligned}$$

Allora $\hat{OPB} = \hat{HPD}$



Fatto utile:
 $\hat{HCA} = \hat{OCB}$

(3)



$ac + bd \geq \text{prodotto lunghezze diagonali}$
 $\geq 2S$
 $?$

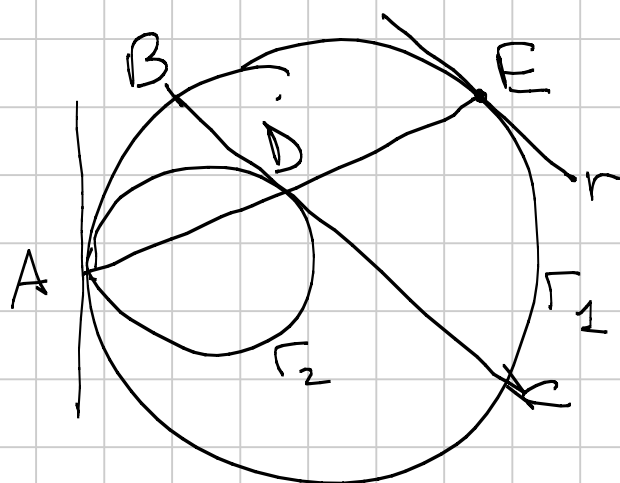
$$2S = QR \cdot XY \leq QR \cdot TU =$$

$= ?$

- $\bullet =$ in Tolomeo (ciclico)
- $\bullet$ Diagonali ortogonali

$$2S = QR \cdot TU \cdot \sin \alpha$$

(6)

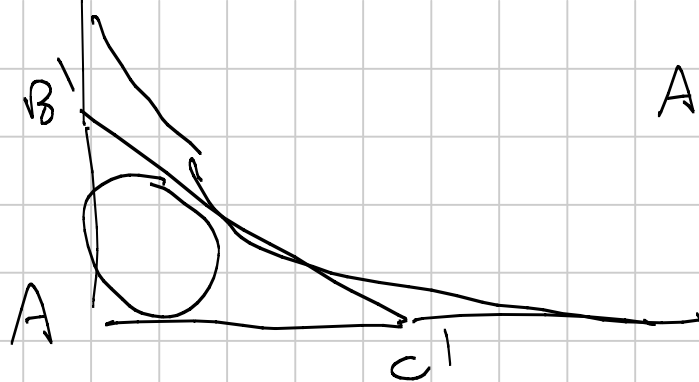


$$\hat{BE} \stackrel{?}{=} \hat{EC}$$

$r \parallel BC ?$

Omotetia di centro A e ragione $\frac{AE}{AD}$

$A \rightarrow A \quad D \rightarrow E \quad \Gamma_2 \rightarrow \Gamma_1 \quad BC \rightarrow \text{Tangente a } \Gamma_1 \text{ in } E, \text{ cioè } r$



$$AB' = \frac{r_1 r_2}{AB}$$

$$AC' = \frac{r_1 r_2}{AC}$$

Sapendo Area ABC sapete Area $AB'C'$

Dovete dimostrare che

$$\text{Area } AB'C' = r_1 r_2$$