P - PRELIMINARI

Titolo nota 01/09/2013

INDUZIONE

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$$

$p(n) =$ " ... n ... "

$\forall n \in \mathbb{N} \; p(n)$ TESI

per ogni

passo base: $p(0)$ É VERA

passo induttivo: $p(n) \Rightarrow p(n+1)$

ESEMPIO 1 $\quad 1 + \dots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

ESEMPIO 2 $\quad 1 + 3 + \dots + 2n - 1 = n^2$ $\quad p(n)$

dim.

passo base $\quad 1 = 1$ ok! $\quad p(1)$

passo induttivo $(1 + \dots) + 2n + 1 =$

$= n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$ ok!

TESI!

per hp. induttiva $= n^2$

ESEMPIO 3 $\quad (1+x)^n \geq 1 + nx \qquad (x > -1)$

Bernoulli

passo base $\quad 1 \geq 1$ ok! $\quad n = 0$

passo induttivo $\quad (1+x)^n \geq 1 + nx$

hp. ind.

$$(1+x)(1+x)^n \geq (1+nx)(1+x)$$

$$(1+x)^{n+1} \geq nx^2 + nx + x + 1$$

è ≥ 0, ok! $\longrightarrow$ $$nx^2 + (n+1)x + 1$$

$$\geq (n+1)x + 1$$

$\to$ tesi

ESEMPIO 4 $\quad n+1 \leq 2^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

passo base $\quad n = 0 \quad 1 \leq 1$ ok!

passo induttivo $\quad n+2 = (n+1) + 1$

$$\leq 2^n + 1 \leq 2^n + 2^n = 2^{n+1}$$

hp. induttiva $\qquad \underbrace{1 \leq 2^n}_{\leq}$

$\to$ tesi

parentesi: n + un miliardo $\leq 2^n$ da un certo punto in poi.

prendo un passo base più "avanti"

$n = 10^9 \qquad \cancel{2} \cdot 10^9 \leq 2^{10^9 - 1}$ è vera per $n+1 \leq 2^n$

ESEMPIO 5 $\quad$ ogni naturale si scrive come somma di Fibonacci distinti non consecutivi.

per induzione (estesa)!

passo base + passo induttivo

$p(0) \qquad p(0), p(1), \dots, p(n) \Rightarrow p(n+1)$

passo base: $0 = 0$ ok!

ho n. Prendo il più grande Fibonacci che "ci stia", lo chiamo F_k.

Considero $n - F_k < n$ lo scrivo per hp. induttiva!

$$n = F_k + (\dots) \to \text{tesi!}$$

$\to$ se F_k compare nella scomp. di $n - F_k$, $n \geq 2F_k$ $\to$ potevo prendere $F_k + F_{k-1}$ al posto di F_k.

$\to$ F_{k-1} potrebbe comparire in $n - F_k$. Ma allora in n ci sta $F_k + F_{k-1} =$ $= F_{k+1}$.

ESEMPIO 6 $\alpha + \frac{1}{\alpha} \in \mathbb{Q}$ allora $\forall n$ $\underbrace{\alpha^n + \frac{1}{\alpha^n}}_{\in \mathbb{Q}}$.

passo base ok!

$$\underbrace{\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)^2}_{\text{è razionale!}} = \underbrace{\boxed{\alpha^2 + \frac{1}{\alpha^2}}}_{\text{è razionale!}} + \underbrace{2}_{\text{è razionale!}}$$

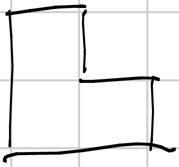
$$\underbrace{\left(\alpha^2 + \frac{1}{\alpha^2}\right)}_{\text{è raz}}\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right) = \alpha^3 + \frac{1}{\alpha^3} + \underbrace{\alpha + \frac{1}{\alpha}}_{\text{è raz.}}$$

fantastico! Mi basta scrivere

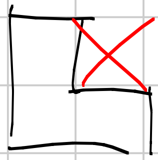
$$\underbrace{\left(\alpha^n + \frac{1}{\alpha^n}\right)\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)}_{\in \mathbb{Q} \text{ per hp. induttiva iterata}} = \overbrace{\alpha^{n+1} + \frac{1}{\alpha^{n+1}}}^{\text{tesi } \in \mathbb{Q}} + \underbrace{\left(\alpha^{n-1} + \frac{1}{\alpha^{n-1}}\right)}_{\text{per hp. } \in \mathbb{Q}}$$

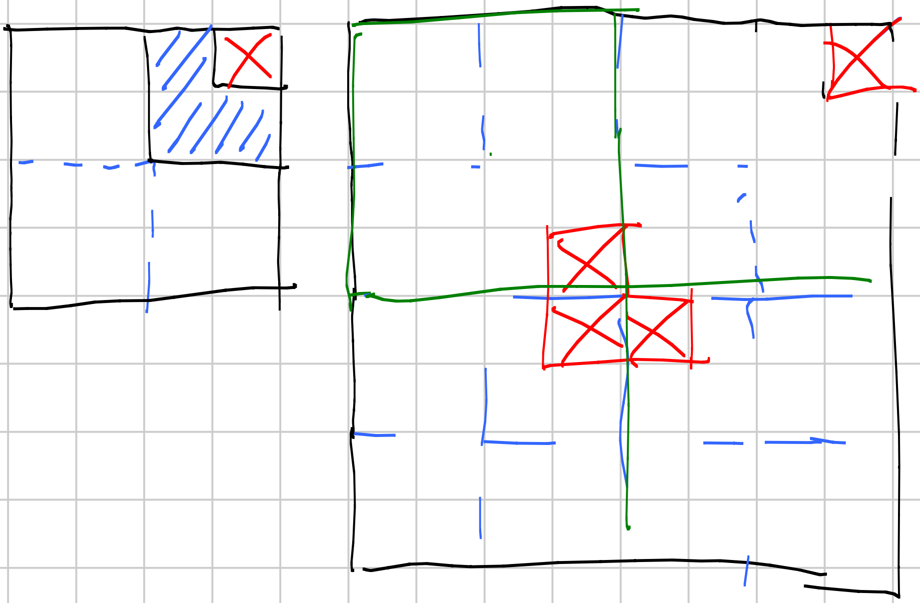
ESEMPIO 7

$2^n \times 2^n$ scacchiera, tolgo angolino. Posso tassellarla con "triminini" a L ?



passo base: ok!





passo induttivo!

Attenzione!

tutti quanti hanno gli occhi azzurri.

$\forall n$ prendo n persone $\rightarrow$ tutte hanno gli occhi stesso colore

passo base. 1 persona ok.

passo induttivo

prendo gruppo di $n+1$

tolgo 1 $\rightarrow$ uso hp. ind sugli altri

tolgo 2 $\rightarrow$ "

$\longrightarrow$ vero per $n+1$.

OPS!! $n+1=2$

D'altra parte se fosse stato vero per $n=2$ $\rightarrow$ vero sempre!

Tutti i fib. sono pari.

0 é pari.

passo base

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$$

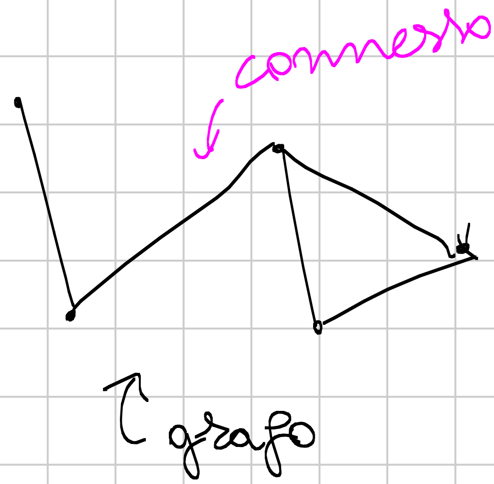
pari   pari

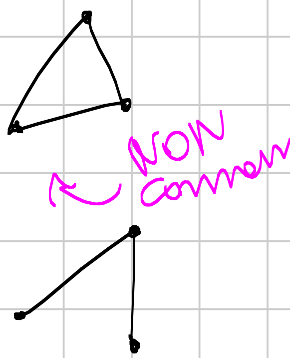
hp. induttiva

→ tesi!

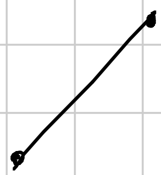
Dovevo fare i primi due come passo base!

Tutti i grafi per cui ogni vertice ha ≥ 1 arco uscente sono connessi!



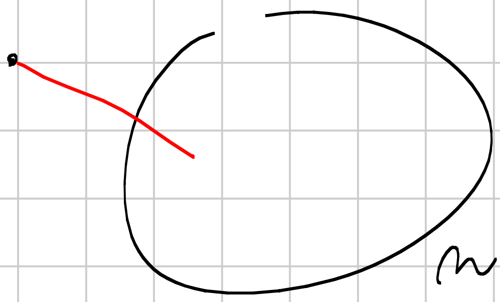


passo base: $n = 2$



é connesso

passo induttivo:



sono connessi

hp induttiva!

→ é connesso!

L'hp. induttiva NON é necessariamente verificata!

PIGEONHOLE

n tane $n+1$ piccioni $\rightarrow$
$\exists$ almeno una "tana" con almeno due "piccioni".

n tane $nk+1$ piccioni $\rightarrow$
$\exists$ almeno una "tana" con almeno $k+1$ "piccioni"

Esempio "stupido" Siete 25. Quante persone siete sicuri di poter trovare che compiono gli anni lo stesso mese?
Sicuramente ce ne sono 3.

Esempio "meno stupido" Siete 25. Esistono due di voi che conoscono (fra voi) lo stesso # di persone.

$0, \ldots, 24$

tane = # amici quante? 25
piccioni = voi quanti? 25

faccio casi!
- se esiste un "solitario" non esiste un "popolare"
  $\rightarrow$ 24 tane
- se non esiste un "solitario"
  $\rightarrow$ 24 tane

$\rightarrow \exists$ 2 piccioni nella stessa tana!

ESEMPIO 3 $n+1$ numeri fra 1 e $2n$
interi

Allora ne esistono 2 primi fra loro.
2 uno divisore dell'altro

- esistono due consecutivi

(1 2)(3 4)(5 6)(7 8) . . . (2n)

n tane, $n+1$ piccioni
→ 2 nella stessa
= 2 consecutivi

- Scrivo i numeri scelti come $2^{k_i} d_i$

Quanti sono i possibili d_i? n possibili
MA scelgo $n+1$ numeri!
Quindi scelgo $2^a d$, $2^b d$
STESSO fattore d

"divide"

MA allora se
$a < b$ $\quad 2^a d \mid 2^b d$
$a > b$ $\quad 2^b d \mid 2^a d$
$a = b$ $\quad$ NO!