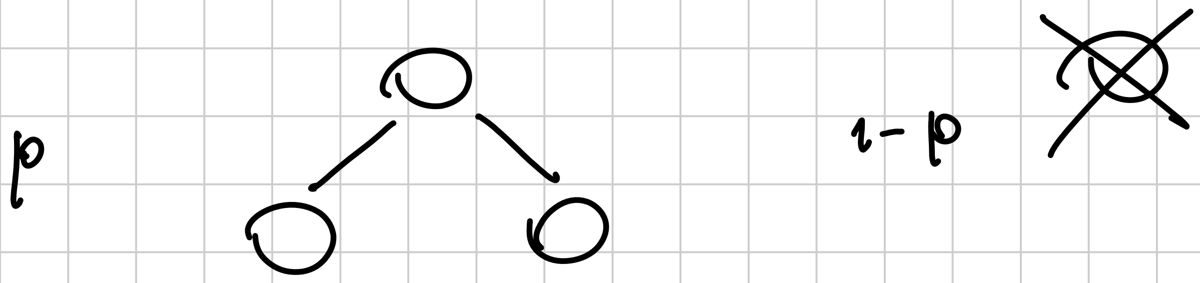
C1 MEDIUM

Titolo nota 03/09/2013

PROBLEMA | UN BATTERIO



Sia q la prob. che la specie si estingua

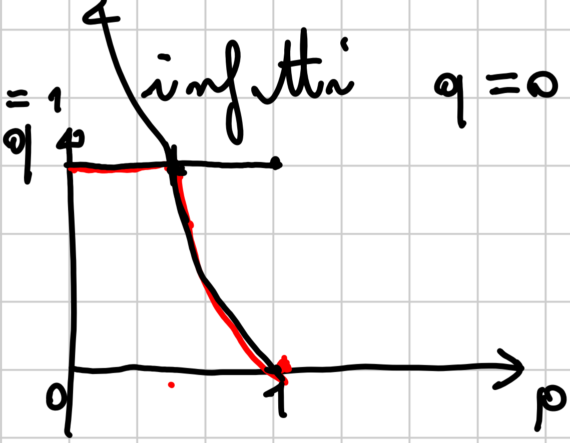
$$q = 1-p + pq^2$$

$$pq^2 - q + (1-p) = 0 \qquad q = \begin{cases} 1 \\ \boxed{\dfrac{1-p}{p}} \end{cases}$$

Se $\dfrac{1-p}{p} \geq 1$ $\left(\text{Se } p \leq \dfrac{1}{2}\right)$

Se $p > \dfrac{1}{2}$? $q = \dfrac{1-p}{p}$

Se $p = 1$ infatti $q = 0$



FUNZIONI GENERATRICI

Data $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ successione a valori in $\mathbb{R}$ (o in $\mathbb{C}$)

$a_0, a_1, a_2, \ldots$

$$ogF(a_n) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots$$

$\mathrm{ogf}(a_n) + \mathrm{ogf}(b_n) = \mathrm{ogf}(a_n + b_n)$

$(a_0 + a_1 x + \dots)(b_0 + b_1 x + \dots) =$

$= a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) x + \dots$

$\mathrm{ogf}(a_n) \cdot \mathrm{ogf}(b_n) = \mathrm{ogf}(c_n)$

$c_n = \sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i}$

Per quali $\mathrm{ogf}(a_n)$ esiste $\mathrm{ogf}(b_n)$ tale che

$\underbrace{\mathrm{ogf}(a_n)}_{A(x)} \cdot \underbrace{\mathrm{ogf}(b_n)}_{B(x)} = 1$?

Se $a_0 = 0$

$c_0 = a_0 b_0 = 0 \neq 1$

Se $a_0 \neq 0$ allora esiste $B(x)$

Si pone $b_0 = \frac{1}{a_0}$

Vogliamo che per $n \geq 1$ $\sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i} = 0$

$a_0 b_n + \sum_{i=1}^{n} a_i b_{n-i} = 0$

Prendiamo una frazione algebrica $\frac{p(x)}{q(x)}$

con $q(0) \neq 0$

Allora esiste $q(x)^{-1}$ nelle funz. gener

Associo a $\frac{p(x)}{q(x)}$ la funz. gen. $p(x) \cdot q(x)^{-1}$

Quanto vale $\frac{1}{1-x}$? $1+x+x^2+\dots$

$$\underbrace{(1+x+x^2+\dots)(1-x)}=1$$

$$\parallel$$

$$1-\cancel{x}+\cancel{x}-\cancel{x^2}+\cancel{x^2}-x^3+\dots$$

Fibonacci $F_0=0 \quad F_1=1 \qquad F_{n+1}=F_n+F_{n-1}$

$$F(x)=\sum_{n=0}^{\infty}F_n x^n = x+x^2+2x^3+3x^4+5x^5+\dots$$

$$xF(x)=\mathrm{ogf}(F_{n-1})$$

$$F_{n+2}=F_{n+1}+F_n \qquad \mathrm{ogf}(F_{n+2})=\mathrm{ogf}(F_{n+1})+\mathrm{ogf}(F_n)$$

$$\frac{F(x)}{x}+F(x)=\frac{\frac{F(x)}{x}-1}{x}$$

$$xF(x)+x^2F(x)=F(x)-x \qquad F(x)=\frac{x}{1-x-x^2}$$

α_1,α_2 le radici di $1-x-x^2=-(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)$

Esistono c_1,c_2 $\quad F(x)=\frac{c_1}{x-\alpha_1}+\frac{c_2}{x-\alpha_2}$

$$c_1+\frac{c_2(x-\alpha_1)}{x-\alpha_2}=(x-\alpha_1)F(x)=\frac{x}{\alpha_2-x}$$

$$F(x)=\frac{c_1/\alpha_1}{\frac{x}{\alpha_1}-1}+\frac{c_2/\alpha_2}{\frac{x}{\alpha_2}-1}=-\frac{c_1}{\alpha_1}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{\alpha_1}\right)^n+$$

$$-\frac{c_2}{\alpha_2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{\alpha_2}\right)^n$$

$$F_n=-\frac{c_1}{\alpha_1}\left(\frac{1}{\alpha_1}\right)^n-\frac{c_2}{\alpha_2}\left(\frac{1}{\alpha_2}\right)^n$$

NOTA Se $\deg(p) < \deg(q)$ e sono coprimi

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{c_{11}}{x-\alpha_1} + \frac{c_{12}}{(x-\alpha_1)^2} + \dots \frac{c_{1k_1}}{(x-\alpha_1)^{k_1}} + \frac{c_{21}}{x-\alpha_2} + \dots$$

$$q(x) = \prod (x-\alpha_i)^{k_i}$$

BINOMIO DI NEWTON

$$(1+x)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i \qquad n \in \mathbb{N}$$

$$\binom{n}{i} = \frac{n!}{i!\,(n-i)!} = \frac{n(n-1)\cdot \ldots (n-i+1)}{i!}$$

Definiamo $\displaystyle\binom{x}{i} = \frac{x(x-1)\ldots\ldots(x-i+1)}{i!}$

$$(1+x)^n = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{n}{i} x^i$$

$$\left((1+x)^n\right)^m = (1+x)^{nm}$$

$n, m \in \mathbb{N}$

$$\left(\sum_{i=0}^{\infty} \binom{n}{i} x^i\right)^m = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{nm}{i} x^i$$

$r = \frac{a}{m} \in \mathbb{Q}^+$ $\qquad \displaystyle\left(\sum_{i=0}^{\infty} \binom{r}{i} x^i\right)^m \stackrel{?}{=} \sum_{i=0}^{\infty} \binom{rm}{i} x^i$

$$\left(\sum \binom{a/m}{i} x^i\right)^m = \sum \binom{a}{i} x^i = (1+x)^a$$

$$(1+x)^{a/m} = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{a/m}{i} x^i$$

$$(1+x)^n \cdot (1+x)^m = (1+x)^{n+m} \qquad \forall n, m \in \mathbb{N}$$

$$\left(\sum_{i=0}^{\infty}\binom{n}{i}x^i\right)(1+x)^m = \sum_{i=0}^{\infty}\binom{n+m}{i}x^i$$

$$(1+x)^{-m} = \sum_{i=0}^{\infty}\binom{-m}{i}x^i$$

PROBLEMA In quanti modi si scrive n come somma di k addendi ordinati ≥ 0 ? $\binom{n+k-1}{k-1}$

Sia a_n tale numero

k fattori

$$(1+x+x^2+\ldots)(1+x+x^2+\ldots)\cdot \ldots \cdot(1+x+x^2+\ldots)$$

$$ogf(a_n) = (1+x+x^2+\ldots)^k = \left(\frac{1}{1-x}\right)^k = (1-x)^{-k}$$

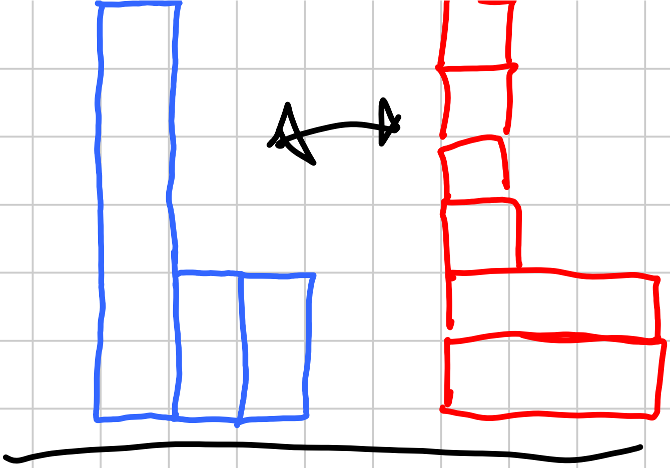
$$= \sum_{i=0}^{\infty}\binom{-k}{i}(-x)^i$$

$$a_n = (-1)^n\binom{-k}{n} = (-1)^n\frac{-k(-k-1)(-k-2)\cdot\ldots\cdot(-k-n+1)}{n!}$$

$$= \frac{(n+k-1)(n+k-2)\cdot\ldots\cdot k}{n!} = \binom{n+k-1}{n}$$

PROBLEMA Dati $n,k\geq 1$, sia a_{nk} il numero di modi di scrivere n come somma di k addendi ≥ 1 non ordinati.
Sia b_{nk} il n° di modi di scrivere n come Σ di alcuni addendi non ordinati ≥ 1, tra cui il più grande vale k.
Dimostrare che $a_{nk} = b_{nk}$

$n=10 \qquad k=3 \qquad 10 = 6+2+2 = 2+6+2$



IMO 2008/5 $\quad 2n$ lampade $\quad k \geq n$ mosse, $k-n$ pari

spente o o o o o o o o

$\underbrace{\text{o o o o}}_{\text{accese}}\ \underbrace{\text{o o o o}}_{\text{spente}}$

k mosse, ad ogni mossa cambiamo di stato una lampada

Sia a_{nk} il n° di modi per passare dalla 1ª all'ultima configurazione; sia b_{nk} il n° di modi senza toccare gli ultimi n interruttori

Calcolare $\frac{a_{nk}}{b_{nk}}$

Prendiamo un modo del primo tipo

o o o o o o o o

Creo una sequenza del 2° tipo: ogni volta che devo toccare una lampada della 2ª metà, tocco la corrispondente della prima metà.

Adesso parto da una seq. del 2° tipo

o o o o o o o o

$A_1 \quad A_2 \quad A_3 \quad A_n$

$A_i \subseteq \{1, \dots, k\}$ è l'insieme delle mosse in cui ho toccato l'interruttore i

$|A_i|$ è dispari $\qquad \sum_{i=1}^{n} |A_i| = k \qquad |A_i| = a_i$

Per ogni A_i scelgo un sottoinsieme pari
posso farlo in $2^{a_i - 1}$ modi
In tutto ho $\prod_{i=1}^{n} 2^{a_i - 1} = 2^{k-n}$

$\Omega \neq \emptyset$ insieme finito, insieme di "esiti"

$P : \Omega \to [0,1] \qquad \sum_{\omega \in \Omega} P(\omega) = 1$

A "evento"

$A \subseteq \Omega \qquad P(A) = \sum_{\omega \in A} P(\omega)$

$F : \Omega \to \mathbb{R}$ è una variabile aleatoria

Definiamo il valore atteso di F

$$E[F] = \sum_{\omega \in \Omega} P(\omega) \cdot F(\omega)$$

$$E[F+g] = \sum_{\omega \in \Omega} P(\omega) \cdot (F+g)(\omega) = \sum_{\omega \in \Omega} P(\omega) F(\omega) + P(\omega) g(\omega)$$
$$= E[F] + E[g]$$

$$E[\lambda \cdot F] = \lambda E[F] \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

F e g sono indip. se $\forall x, y \in \mathbb{R}$

$$P(\{F(\omega) = x\}) \cdot P(\{g(\omega) = y\}) = P\left(\begin{matrix}\{F(\omega) = x \text{ e} \\ g(\omega) = y\}\end{matrix}\right)$$

Se F, g sono indipendenti, allora

$$E[Fg] = E[F] \cdot E[g]$$

Sia $A = \operatorname{Im} F$, $B = \operatorname{Im} g$

$$E[Fg] = \sum_{w \in \Omega} P(w) \cdot F(w) g(w) = \sum_{(a,b) \in A \times B} a \cdot b \cdot P\left(\left\{ \begin{matrix} F(w)=a \\ g(w)=b \end{matrix} \right\}\right)$$

$$= \sum_{(a,b)} a \cdot b \, P(\{F(w)=a\}) \cdot P(\{g(w)=b\}) = \left(\sum_{a \in A} a \cdot P(\{F(w)=a\}) \right) \cdot$$

$$\cdot \left(\sum_{b \in B} b \cdot P(\{g(w)=b\}) \right) = E[F] \cdot E[g]$$

PROBLEMA n amici che vivono in n città diverse. Per ogni coppia (a,b) di amici c'è un numero

$F(a,b) = F(b,a)$ di ore al giorno in cui a e b parlano tra loro al telefono.

Dim. che si possono dividere in 2 gruppi in modo che più della metà del traffico telefonico sia da un gruppo all'altro.

Disponiamo ogni ragazzo con prob. $\frac{1}{2}$ nel 1° gruppo e con prob $\frac{1}{2}$ nel 2°.

Ω = insieme delle disposizioni dei ragazzi nei gruppi

$$|\Omega| = 2^n$$

$$\forall w \in \Omega \quad P(w) = \frac{1}{2^n}$$

Scelti $a \neq b$, chiamiamo $g_{a,b}(w) = \begin{cases} F(a,b) & \text{se } a,b \text{ sono in gruppi diversi in } w \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

$$E[g_{a,b}] = \frac{1}{2} F(a,b)$$

$$E\left[\sum_{1\le a<b\le n} g_{ab}\right] = \frac{1}{2}\sum_{1\le a<b\le n} F(a,b)$$

Dunque per almeno un ω $\quad \sum g_{ab}(\omega) \geq \frac{1}{2}\sum_{1\le a<b\le n} F(a,b)$

Visto che $\exists\, \omega$ con $\sum g_{ab}(\omega) = 0 < \frac{1}{2}\sum F(a,b)$, deve esistere anche un caso con il $>$.

$R(n,n)$ è il più piccolo $K \in \mathbb{N}$ t.c. comunque coloro di blu o di rosso gli archi di un grafo completo su K vertici, esiste almeno un K_n monocromatico.

$$R(n,n) \leq \binom{2n-2}{n-1} \sim \frac{4^{n-1}}{\sqrt{\pi(n-1)}}$$

$$R(n,n) \geq \sim$$

Idea Prendo un grafo completo su K vertici e lo coloro casualmente di R e B; ogni arco è blu con prob. $\frac{1}{2}$, rosso con prob $\frac{1}{2}$

$$\binom{K}{2} \text{ archi} \Rightarrow 2^{\binom{K}{2}}$$

$F(\omega) =$ n° di K_n monocromatici in ω

$V = \{1, \dots, k\}$ $\qquad A \subseteq V \qquad |A| = n$

Qual è la prob. che A sia monocromatico?

$$\frac{1}{2^{\binom{n}{2}-1}} \qquad F_A(\omega) \begin{cases} 1 & \text{se } A \text{ è monocr.} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$E[F_A] = \frac{1}{2^{\binom{n}{2}-1}} \qquad F = \sum_{\substack{A \subseteq \{1,\dots,k\} \\ |A| = n}} F_A$$

$$\cdot\, E[F] = \frac{1}{2^{\binom{n}{2}-1}} \cdot \binom{k}{n} = \frac{k(k-1)\cdots(k-n+1)}{n! \cdot 2^{\frac{n^2-n}{2}-1}} <$$

$$:< \frac{k^n \cdot 2}{\frac{n^n}{e^n}\sqrt{2\pi n}\,\sqrt{2}^{\,n^2-n}} < \frac{k^n}{\frac{n^n}{e^n}\,\sqrt{2}^{\,n^2-n}} < 1$$

$$k < \frac{n}{e}\sqrt{2}^{\,n-1}$$

$$F : \Omega \to \mathbb{N}$$

$$ogf(F) = \sum_{n=0}^{\infty} P(\{F = n\}) \cdot x^n$$

$$ogf(F)(1) = 1$$

$$ogf(F)'(1) = E[F]$$

Se F e g sono indipendenti

$$ogf(F+g) = ogf(F) \cdot ogf(g)$$

Abbiamo 2 dadi a 6 facce; è possibile truccarli in modo che le 11 somme possibili siano equiprobabili?

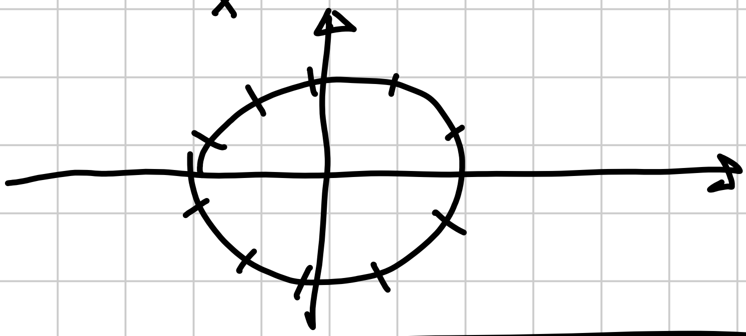
D_1, D_2

$$q_1(x) = p_{11}x + p_{12}x^2 + \dots + p_{16}x^6$$

$$q_2(x) = p_{21}x + \quad\quad + p_{26}x^6$$

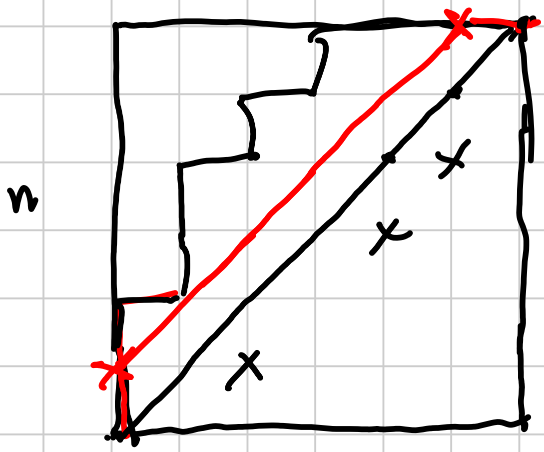
$$q_1(x)\cdot q_2(x) = \frac{1}{11}\left(x^2+x^3+ \dots +x^{12}\right)$$

$$\frac{q_1(x)}{x}\cdot\frac{q_2(x)}{x} = \frac{1}{11}\left(1+ \dots + x^{10}\right)$$



X CASA ESISTONO 2 DADI A 6 FACCE NON EQUIL. TALI CHE LA SOMMA SI COMPORTI COME QUELLA DI 2 DADI EQUILIBRATI ?

NUMERI DI CATALAN



C_n

$C_0 = 1 \qquad C_1 = 1$

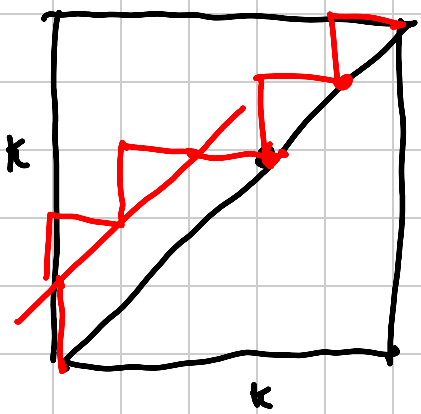
$C_2 = 2$

2 CASI : - NON TORNO MAI SULLA DIAG. SE NON ALLA FINE

C_{n-1} possibilità

- TORNO PER LA 1ª VOLTA SULLA DIAG. DOPO 2k PASSI

$C_{k-1}\cdot C_{n-k}$



$$C_n = \left(\sum_{k=1}^{n-1} C_{k-1}\cdot C_{n-k}\right) + C_{n-1}\, C_0$$

$$C_n = \sum_{k=1}^{n} C_{k-1}\, C_{n-k} \qquad n\geq 1$$

$$C(x) = \text{ogf}(c_n)$$

$$C(x)^2 = \text{ogf}\left(\sum_{i=0}^{n} c_i c_{n-i}\right) = \text{ogf}(c_{n+1}) = \qquad = \sum_{k=0}^{n-1} c_k \, c_{n-1-k}$$

$$= \frac{\text{ogf}((c_n)) - 1}{x} = \frac{C(x) - 1}{x}$$

$$x\,C(x)^2 - C(x) + 1 = 0$$

$$4x^2 C(x)^2 - 4x\,C(x) + 4x + 1 - 1 = 0$$

$$\left(2x\,C(x) - 1\right)^2 = 1 - 4x$$

$$1 - 2x\,C(x) = \sqrt{1-4x}$$

$$C(x) = \frac{1 - \sqrt{1-4x}}{2x}$$

$$\sqrt{1-4x} = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{1/2}{i} (4x)^i$$

$$\binom{1/2}{i} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) \cdot \ldots \cdot \left(\frac{3}{2} - 2i\right)}{i!} =$$

$$= \frac{(2i-3)!! \cdot \frac{1}{2^i} \cdot (-1)^{i-1}}{i!} = \frac{(2i-2)! \cdot \frac{1}{2^i} (-1)^{i-1}}{i! \cdot 2^{i-1} \cdot (i-1)!}$$

$$\frac{(2i-2)!}{i\cdot(i-1)!^2}\cdot\frac{1}{2^{2i-1}}\cdot(-1)^{i-1}$$

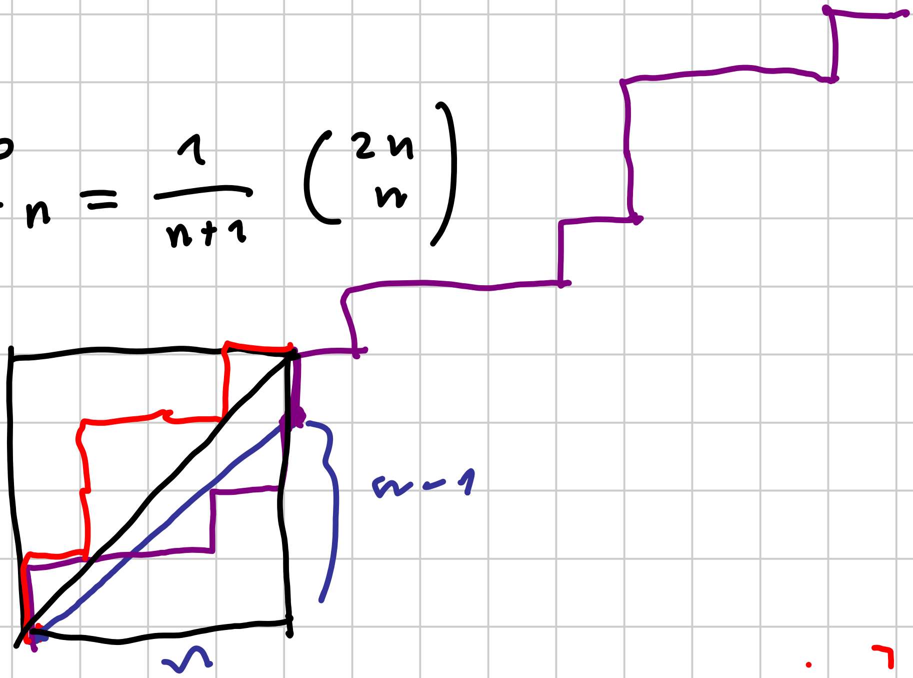
$$\frac{1}{i}\binom{2i-2}{i-1}$$

$$\sqrt{1-4x} = \sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{i}\binom{2i-2}{i-1}\cdot(-2)\cdot x^i$$

$$1-\sqrt{1-4x} = x\cdot\sum_{i=0}^{\infty}2\cdot\frac{1}{i+1}\binom{2i}{i}x^i$$

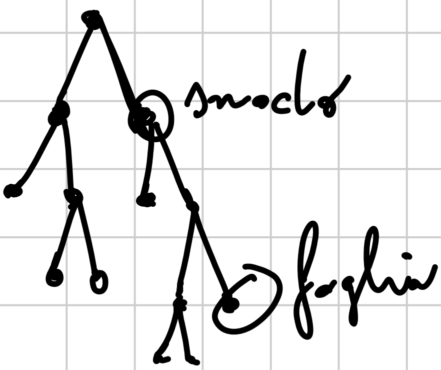
$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

IDEA



C_n = n° di triangolazioni di un n+2-agono regolare

C_n = n° di alberi binari con n+1 foglie e n snodi



BATTERIO Un albero binario con $n+1$ foglie e n nodi ha prob. $p^n \cdot (1-p)^{n+1}$

$$q = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \, p^n (1-p)^{n+1} = \cancel{(1-p)} \cdot \frac{1 - \sqrt{1 - 4(p)(1-p)}}{2p\cancel{(1-p)}}$$

$$= \frac{1 - \sqrt{(2p-1)^2}}{2p} = \frac{2-2p}{2p} = \frac{1-p}{p}$$

ULTIMA IDEA Qual è la prob. che la colonia si estingua entro la n-esima generazione? q_n

$$q_1 = (1-p) \qquad q_{n+1} = (1-p) + p \cdot q_n^2$$

ESERCIZIO. Se $p > \frac{1}{2}$ q_n è crescente e

$$\lim_{n \to \infty} q_n = \frac{1-p}{p}$$