C2 MEDIUM

Titolo nota 04/09/2013

IMO SL 2005 / C4

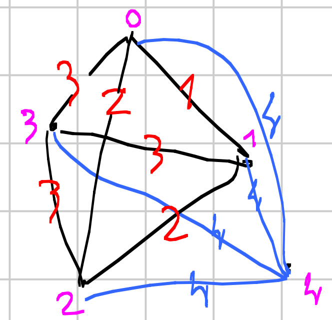
K_n GRAFO COMPLETO SU n VERTICI
$r \geq 1$

VOGLIAMO SCRIVERE SU OGNI ARCO UN NUMERO TRA 1 E r IN MODO CHE

- OGNI NUMERO VIENE USATO ALMENO UNA VOLTA
- IN OGNI TRIANGOLO DUE LATI HANNO LO STESSO NUMERO, PIÙ GRANDE DEL TERZO LATO

QUAL È IL MASSIMO r PER CUI È POSSIBILE?

K_4

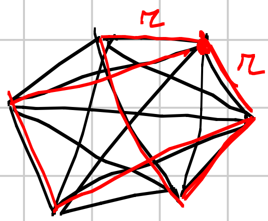


PER $n=4$ $r=3$ VA BENE

$r = n-1$ VA BENE:

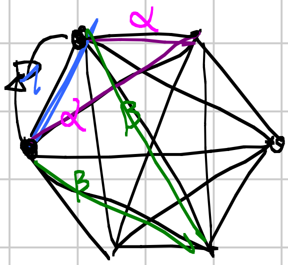
NUMERO I VERTICI DA 0 A $n-1$ E SUL LATO $a\,b$ METTO IL NUMERO $\max\{a,b\}$

K_n

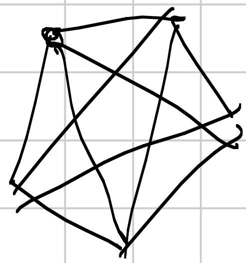


CONSIDERO UN LATO CON IL NUMERO r

$n-1$ ARCHI (ALMENO) SONO SEGNATI CON r: QUELLO INIZIALE E ALTRI $n-2$ PER OGNI VERTICE



$\longrightarrow K_{n-1}$

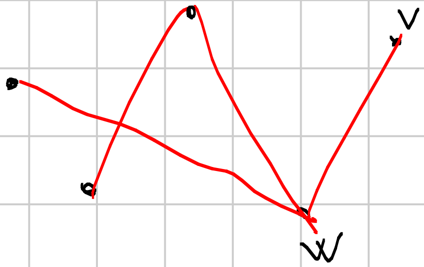


HO r OPPURE $r-1$ ETICHETTE.

SE $r \geq n \Rightarrow r-1 \geq n-1$ ASSURDO (IP. INDUTTIVA)

PER COMPLETARE $n=2$ AL PIÙ 2 COLORI $\triangle$

GRAFI V insieme (finito) di vertici E insieme di archi cioè di coppie di vertici distinte (e non ordinate)

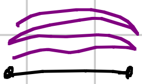


$\deg(v) =$ n° di archi che hanno v come estremo

$= 1$

$\deg(w) = 3$

CAMMINO SEQUENZA $v_1\ e_{12}\ v_2\ e_{23}\ v_3 \ldots v_k$ DI VERTICI E ARCHI T.C. TRA v_i E v_{i+1} C'È L'ARCO $e_{i\,i+1}$



CAMMINO SEMPLICE SE v_i SONO TUTTI DISTINTI

CAMMINO CHIUSO CAMMINO IN CUI IL 1° E L'ULTIMO VERTICE COINCIDONO

CICLO CAMMINO CHIUSO "SEMPLICE" (SOLO IL 1° E L'ULTIMO COINCIDONO)

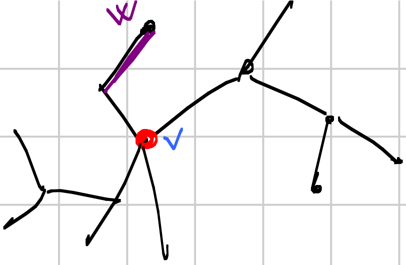
GRAFO CONNESSO DATI DUE VERTICI v E w ESISTE SEMPRE UN CAMMINO DA v A w

ALBERO GRAFO CONNESSO SENZA CICLI

O EQUIVALENTEMENTE, SUPPONENDO CHE ABBIA n VERTICI
- CONNESSO CON $n-1$ ARCHI
- ~~SENZA CICLI~~ ACICLICO CON $n-1$ ARCHI
- ACICLICO MASSIMALE (COMUNQUE AGGIUNGO UN ARCO CREO UN CICLO)
- CONNESSO MINIMALE (COMUNQUE TOLGO UN ARCO SCONNETTO IL GRAFO)

ESERCIZIO IN UN ALBERO DATI v E w ESISTE ESATTAMENTE UN CAMMINO SEMPLICE DA v A w.

$V = S + 1$



SCELGO UNA RADICE v

AD OGNI w ASSOCIO IL PRIMO ARCO DEL CAMMINO SEMPLICE DA w A v

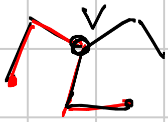
QUESTA È UNA BIGEZIONE

ESERCIZIO ABBIAMO UN ALBERO.

- DIMOSTRARE CHE IL CAMMINO SEMPLICE PIÙ LUNGO CONGIUNGE DUE FOGLIE (DUE VERTICI DI GRADO 1)

SUPPONIAMO CHE TALE LUNGHEZZA MASSIMA SIA PARI, $= 2K$

PRENDIAMO UN CAMM. SEMPL. LUNGO $2k$ E SIA v IL VERTICE CENTRALE



- DIMOSTRARE CHE OGNI CAMM. SEMPL. LUNGO $2k$ PASSA PER v

COSA SI PUÒ DIRE SE LA MAX LUNGHEZZA È DISPARI?

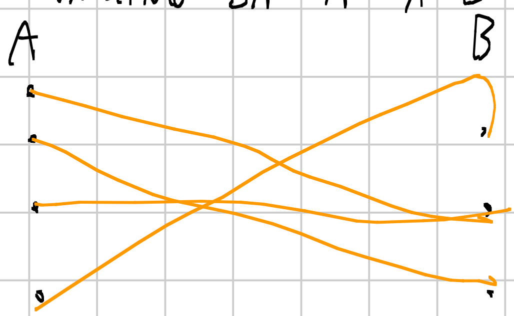
UNA "FOGLIA" È UN VERTICE DI GRADO 1 IN UN GRAFO QUALSIASI. IN UN ALBERO CON ≥ 2 VERTICI CI SONO SEMPRE ALMENO 2 FOGLIE (ESERCIZIO)

CIRCUITO EULERIANO: CAMMINO CHIUSO CHE PASSA ESATTAMENTE UNA VOLTA PER OGNI ARCO

QUANDO ESISTE? QUANDO IL GRAFO È CONNESSO E OGNI VERTICE HA GRADO PARI.

GRAFI BIPARTITI

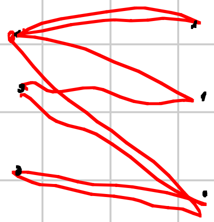
UN GRAFO SI DICE BIPARTITO SE È POSSIBILE DIVIDERE ✓ IN DUE SOTTOINSIEMI A E B IN MODO CHE TUTTI GLI ARCHI VADANO DA A A B.



UN GRAFO ① È BIPARTITO $\Leftrightarrow$ ② OGNI CAMMINO CHIUSO HA LUNGHEZZA PARI $\Leftrightarrow$ OGNI CICLO HA LUNGHEZZA PARI ③

DIM. ① ⇒ ② E ③

SE UN GRAFO È BIPARTITO, OGNI CAMMINO CHIUSO PASSA ALTERNATIVAMENTE PER A E PER B



② ⇒ ① (SUPPONGO IL GRAFO CONNESSO)

FISSO V E METTO IN A IL VERTICE V E TUTTI I VERTICI CHE SI RAGGIUNGONO DA V CON UN NUMERO PARI DI PASSI, IN B GLI ALTRI

- OGNI VERTICE STA DA ALMENO UNA PARTE (IL GRAFO È CONNESSO)
- W NON PUÒ STARE SIA IN A CHE IN B, ALTRIMENTI C'È UN CAMMINO CHIUSO DI LUNGHEZZA DISPARI (DA V A W CON # PARI DI PASSI E POI DA W A V CON # DISPARI DI PASSI)

CI PUÒ ESSERE UN ARCO TRA $V_1, V_2 \in A$? NO, ALTRIMENTI V_2 STAREBBE ANCHE IN B (DA V A V_1 CON # PARI DI PASSI, PIÙ V_1V_2)

IDEM PER $V_1\ V_2 \in B$

③ ⇒ ② PER ASSURDO C'È ALMENO UN CAMMINO CHIUSO DISPARI. PRENDIAMO ALLORA

$V_1\ e_{12}\ V_2\ -\ -\ \ V_{2k}\ e_{2k\ 2k+1}\ V_{2k+1}\ e_{2k+1\ 1}\ V_1$

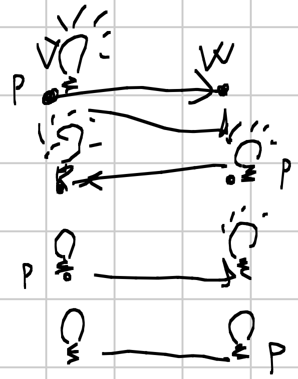
CAMMINO CHIUSO DI LUNGHEZZA MINIMA POSSIBILE

ALLORA È UN CICLO: SE V_i FOSSE UGUALE A V_j $i \neq j$

ALLORA $V_i - - V_j$ E $V_j - - - V_i$ SAREBBERO CAMMINI CHIUSI PIÙ PICCOLI, DI CUI UNO PARI E L'ALTRO DISPARI

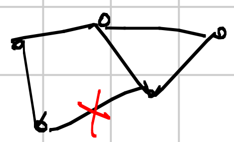
HO UN GRAFO G CONNESSO E UNA LAMPADA SU OGNI VERTICE ALL'INIZIO LE LAMPADE SONO ALCUNE ACCESE E ALCUNE SPENTE. PIERINO CAMMINA LUNGO GLI ARCHI DEL GRAFO E CAMBIA STATO A UNA LAMPADA QUANDO RAGGIUNGE UN VERTICE. PIERINO PARTE DAL VERTICE C E DEVE SPEGNERE TUTTE LE LAMPADE, TORNANDO

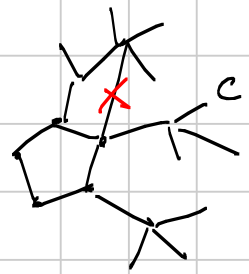
IN P. PER QUALI GRAFI PIERINO RIUSCIRÀ NELL'IMPRESA?



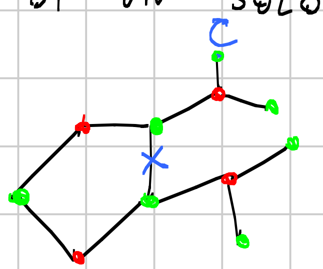
SE IL GRAFO È BIPARTITO, PIERINO NON RIUSCIRÀ SEMPRE NELL'IMPRESA. INFATTI PIERINO PREMERÀ UN N° PARI DI INTERRUTTORI (PER TORNARE IN C), E SE ALL'INIZIO C'È UN NUMERO DISPARI DI LAMPADE ACCESE NON C'È SPERANZA PER LUI.

SE IL GRAFO NON È BIPARTITO





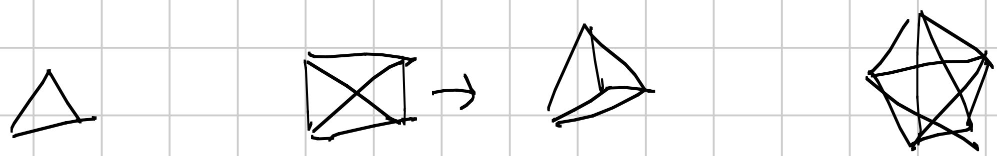
BASTA IL CASO DI UN SOLO CICLO DISPARI



PIERINO PUÒ "AGGIUSTARE" LA PARITÀ DI LAMPADE ACCESE

GRAFO PLANARE

GRAFO CHE SI PUÒ DISEGNARE NEL PIANO SENZA FAR SOVRAPPORRE DUE ARCHI



UN GRAFO PLANARE (DISEGNATO) DIVIDE IL PIANO IN F REGIONI

SE UN GRAFO PLANARE È CONNESSO (E NON VUOTO)

$F + V = S + 2$

n° di facce — n° di vertici — n° di archi

2

INDUZIONE • VERO SE C'È UN SOLO PUNTO

CASO INDUTTIVO SE C'È UN CICLO, ELIMINO UN ARCO DEL CICLO: DUE FACCE DISTINTE (PERCHÈ?) VENGONO SALDATE (F CALA DI 1) E S CALA DI 1. IL GRAFO NON SI SCONNETTE

SE HO A CHE FARE CON UN ALBERO ALLORA $F=1$ $V=n$ $S=n-1$

IN CASI UMANI (TRANNE • ——) OGNI FACCIA HA ALMENO 3 LATI

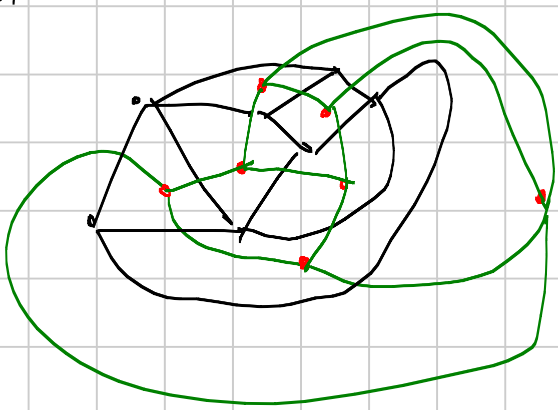
$$3F \leq 2S$$

$$S+2 = F+V \leq \frac{2}{3} S + V$$

$$\frac{1}{3} S + 2 \leq V$$

$$3V - 6 \geq S$$

DUALE DI UN GRAFO PLANARE



FACCE → VERTICI

ARCHI → ARCHI

VERTICI → FACCE

OCCORRE CHE

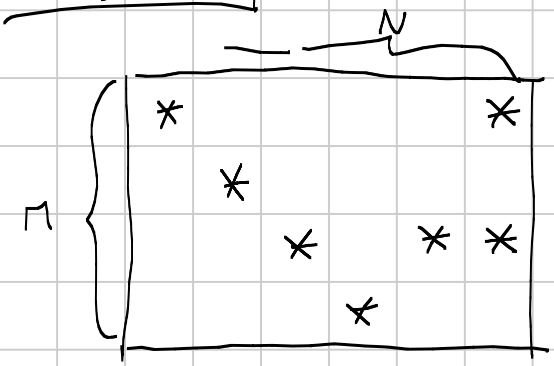
- UNA FACCIA NON CONFINI CON SE STESSA
- DUE FACCE NON CONFININO PER PIÙ DI UN ARCO

AD ESEMPIO UN POLIEDRO CONVESSO VA SEMPRE BENE

PROBLEMA PER CASA ABBIAMO UN POLIEDRO CONVESSO SONO EQUIVALENTI

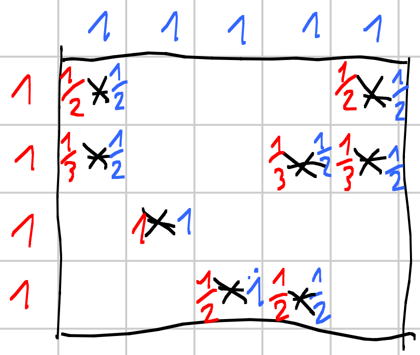
- ESISTE UN CIRCUITO EULERIANO
- POSSO COLORARE CON 2 COLORI LE FACCE IN MODO CHE FACCE ADIACENTI ABBIANO COLORI DIVERSI

PROBLEMA: TABELLA $M \times N$, SEGNO DEGLI ASTERISCHI IN ALCUNE CASELLE, ALMENO UNO PER OGNI RIGA E COLONNA.



SO CHE, SCELTO UN $*$, IL N° DI $*$ SULLA SUA RIGA È $\geq$ DEL N° DI ASTERISCHI SULLA SUA COLONNA.

ALLORA $N \geq M$

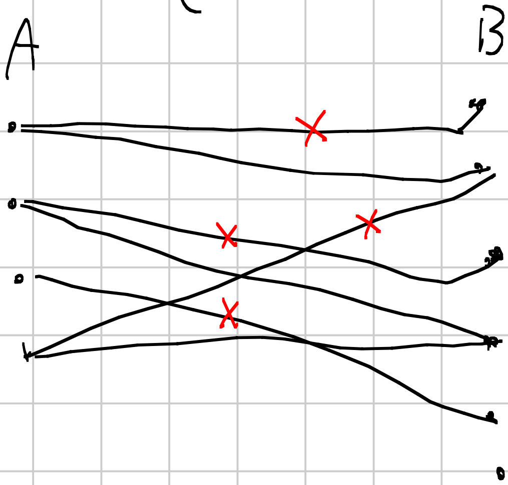


SE SCELGO UN $*$ IL SUO NUMERO BLU È $\geq$ DEL NUMERO ROSSO

$$\underbrace{\sum \text{NUMERI BLU}}_{= N} \geq \underbrace{\sum \text{NUMERI ROSSI}}_{= M}$$

LEMMA DEI MATRIMONI (TEOREMA DI HALL)

ABBIAMO UN INSIEME A DI RAGAZZI E UN INSIEME B DI RAGAZZE (INSIEMI FINITI). AD OGNI RAGAZZO PIACCIONO ALCUNE RAGAZZE. POSSIAMO DARE UNA MOGLIE AD OGNI RAGAZZO FRA LE RAGAZZE CHE GLI PIACCIONO (SENZA DARE LA STESSA MOGLIE A PIÙ RAGAZZI)?



SERVE $|B| \geq |A|$

- SERVE CHE $\forall X \subseteq A \quad |X| \leq |\Gamma(X)|$

OVE $\Gamma(X)$ È L'INSIEME DELLE RAGAZZE CONOSCIUTE DA QUALCUNO IN X

DIMOSTRIAMO CHE LA CONDIZIONE • È SUFFICIENTE.

INDUZIONE ESTESA SUL NUMERO DI RAGAZZI

PASSO BASE 1 RAGAZZO

PASSO INDUTTIVO PER IPOTESI SAPPIAMO CHE

$$\forall X \subset A \qquad |X| \leq |\Gamma(X)|$$

SI HANNO DUE CASI

1. $\forall X \subseteq A \quad X \neq \emptyset, X \neq A \qquad |X| < |\Gamma(X)|$

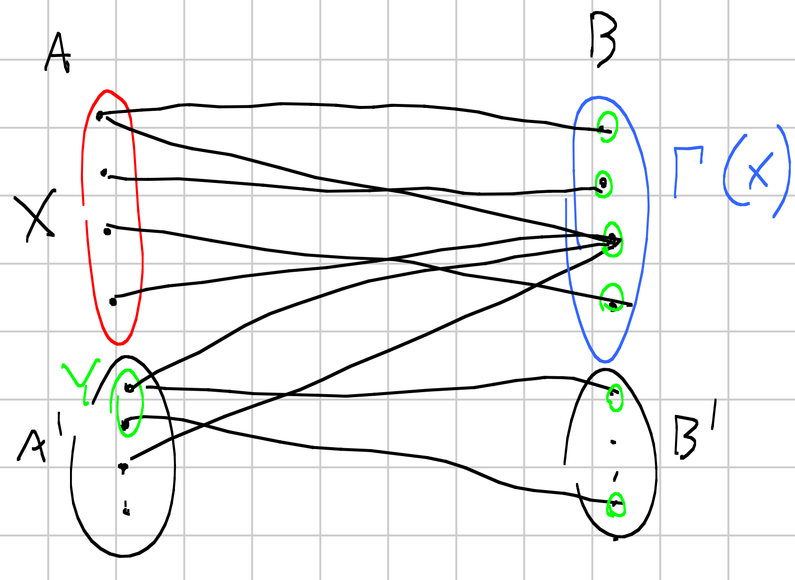
2. $\exists X \subseteq A \quad X \neq \emptyset, X \neq A \qquad |X| = |\Gamma(X)|$

1) SCEGLIAMO UN RAGAZZO z E FACCIAMOLO SPOSARE CON s, UNA DELLE ALMENO 2 RAGAZZE CHE CONOSCE.

SIA $X \subseteq A \setminus \{z\}$ $\qquad |\Gamma(X) \setminus \{s\}| \geq |\Gamma(X)| - 1 \geq |X|$

DUNQUE AVENDO UN RAGAZZO IN MENO POSSO CONCLUDERE PER IP. INDUTTIVA

2)



Se $Y \subseteq X$ $\qquad \Gamma(Y) \subseteq \Gamma(X)$ E $|\Gamma(Y)| \geq |Y|$

Se $Y \subseteq A \setminus X = A'$

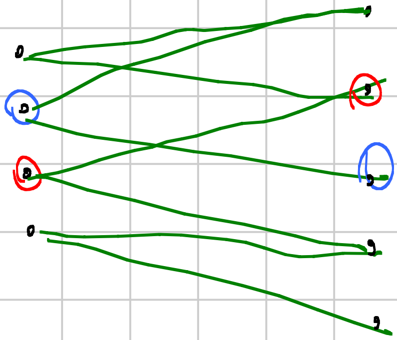
IO SO CHE $\quad |Y \cup X| = |Y| + \cancel{|X|} \leq |\Gamma(X \cup Y)| =$

$$= |\Gamma(\cancel{X})| + |\Gamma(X \cup Y) \setminus \Gamma(X)|$$

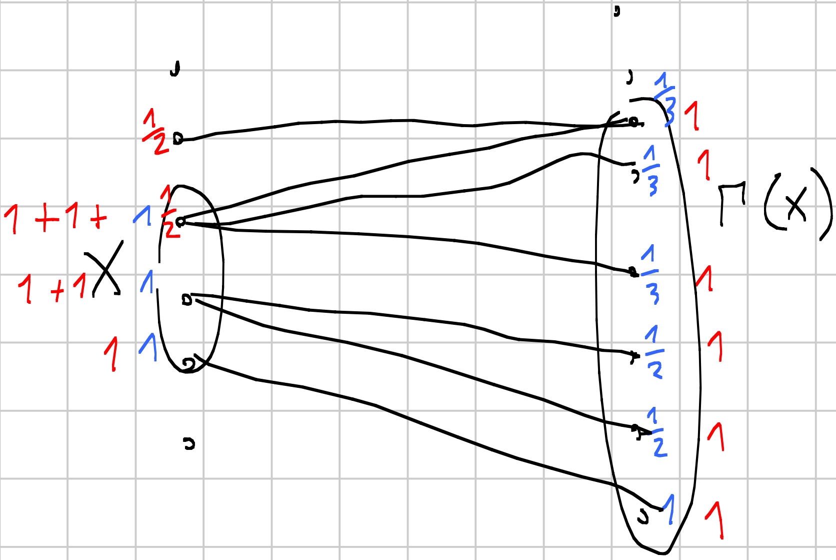
$$|Y| \leq |\underbrace{\Gamma(X \cup Y) \setminus \Gamma(X)}_{\text{RAGAZZE CONOSCIUTE DA } Y \text{ FUORI DA } \Gamma(X)}|$$

SUPPONIAMO CHE $\forall r$ E $\forall s$ CHE SI CONOSCONO

ALLORA $\deg(r) \geq \deg(s)$



ALLORA VALGONO LE IPOTESI DEL LEMMA DEI MATRIMONI

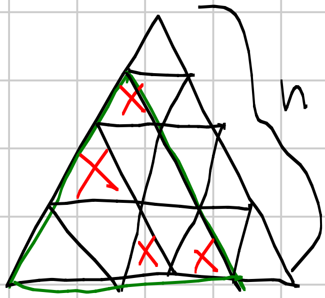


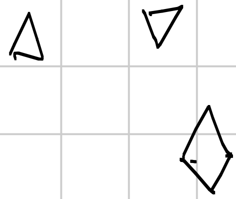
$$|X| = \sum_{s \in \Gamma(X)} \text{PESO BLU DI } s \text{ PROVENIENTE DA } X \leq \sum_{r \in X} \text{PESI ROSSI DI } r \leq \sum \text{PESI DISTRIBUITI DA } \Gamma(X) = |\Gamma(X)|$$

CASO PARTICOLARE

OGNI RAGAZZO CONOSCE h RAGAZZE, OGNI RAGAZZA CONOSCE k RAGAZZI CON $h \geq k$

IMO SL 2006 / C6



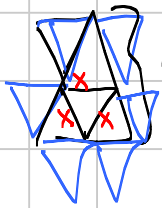


DIAMANTE

ESISTE UN TASSELLAMENTO IN ◇ SSE $\forall$ △ $\}K$ CI SONO AL PIÙ K BUCHI.

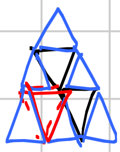
▽ RAGAZZI

△ RAGAZZE



K ALL'INTERNO HO ▽ > △

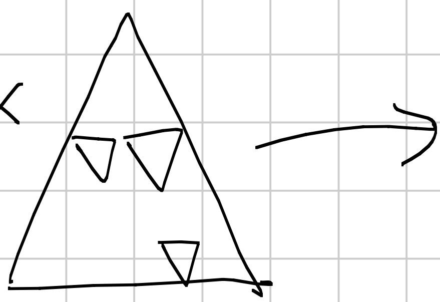
Sia $X \subseteq \{\triangledown\}$

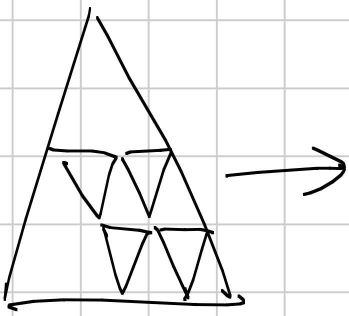


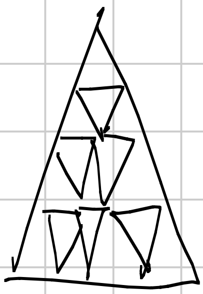
ORA SUPPONIAMO PER ASSURDO CHE ESISTA $X \subseteq \{\triangledown\}$ t.c. $|X| > |\Gamma(X)|$

PRENDIAMO IL PIÙ GRANDE X CON QUESTA PROPRIETÀ (> SBAGLIATA)

X







ALTRO ESEMPIO TABELLA $n \times n$ VOGLIO SCRIVERE I NUMERI DA 1 A n IN MODO CHE OGNI RIGA E OGNI COLONNA CONTENGANO NUMERI DIVERSI

1	2	-	-	-
	1	2		
		1	2	
			1	2
2		-	-	1

1	2	3	4	5
4	5	1	2	3
5	1	2	3	4
	⋮	⋮		1
	⋮	⋮	1	

1		2				
2	1					
	2	1				
			1		2	
			2	1		
					1	2
				2		1

VOGLIAMO FAR SPOSARE RIGHE E COLONNE (METTERE 1 3)

SE HO GIÀ MESSO I NUMERI DA 1 A K
OGNI RIGA CONOSCE $n-k$ COLONNE
OGNI COLONNA // $n-k$ RIGHE

$n-k \geq n-k$

$|S| = n$ $\quad \wp(A)$ $\quad S = \{1, \dots, n\}$

$\emptyset$

$\{1\}$ $\quad \{n\}$

$\{1, 2\}$ $\quad \{n-1, n\}$

⋮

prendiamo i sottoinsiemi di cardinalità K e quelli di cardinalità K+1.

$A = \{\text{ragazzi}\} = \{\text{sott. di card. } k\}$

$B = \{\text{sott. di card. } k+1\}$

un r conosce S se $r \subseteq S$

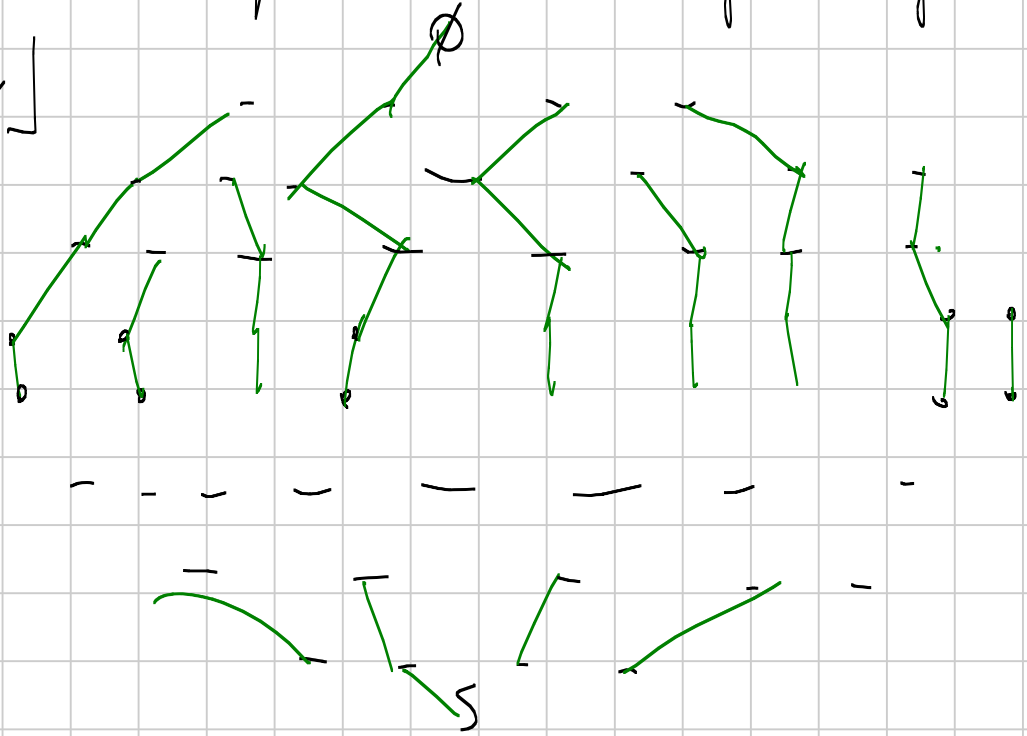
Per $k \leq \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor$ si può

ogni ragazzo conosce $n-k$ ragazze
ogni ragazza conosce $K+1$ ragazzi

$n-k \geq k+1$ allora si può

altrimenti si può dare ad ogni ragazza un marito

ESEMPIO
[n dispari]



ORDINE PARZIALE

ABBIAMO UN INSIEME S. UN ORDINE PARZIALE SU S È UNA LEGGE CHE DATE ALCUNE COPPIE DI ELEMENTI DISTINTI DI S, DICE QUAL È IL PIÙ GRANDE

$S = \{1, \dots, n\}$ $\quad a < b \quad$ lo stesso per $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{R} \dots$

$S = \{1, \dots, n\}$ $\quad a \prec b$ se $a \mid b$ e $a \neq b$

CHIEDIAMO CHE SE $a \prec b$, ALLORA $b \not\prec a$

E SE $a \prec b \prec c$ ALLORA $a \prec c$

a E b SONO INCONFRONTABILI SE $a \not\prec b$ E $b \not\prec a$ E $a \neq b$

UN ORDINE È TOTALE SE $\forall a \neq b \quad a \prec b$ OPPURE $b \prec a$

ABBIAMO ALCUNE CITTÀ COLLEGATE DA STRADE A SENSO UNICO SAPPIAMO CHE $\forall a, b$, È POSSIBILE ANDARE DA a A b O VICEVERSA (O ENTRAMBE)

DIMOSTRARE CHE C'È UNA CITTÀ DA CUI SI RAGGIUNGONO TUTTE LE ALTRE

DICIAMO CHE a E b SONO EQUIVALENTI SE SI PUÒ ANDARE DA a A b E DA b A a. $a \sim b$

ALLORA LE CITTÀ RAGGIUNGIBILI DA a SONO LE STESSE RAGGIUNGIBILI DA b. $a \sim a$, $a \sim b \Rightarrow b \sim a$, $a \sim b \sim c \Rightarrow a \sim c$

DICIAMO CHE $\overset{\text{CLASSE}(a) > \text{CLASSE}(b)}{a > b}$ SE SI PUÒ ANDARE DA a A b MA NON DA b AD a.

SULLE CLASSI $>$ È UN ORDINE PARZIALE

L'IPOTESI DEL PROBLEMA CI DICE CHE L'ORDINE È TOTALE

ALLORA PRENDO LA CLASSE MASSIMA E OGNI CITTÀ CONTENUTA IN ESSA SODDISFA LA RICHIESTA

CATENA SOTTOINSIEME TOTALMENTE ORDINATO

ES. $\mathbb{N}$, $|$ 0 È IL MASSIMO, 1 È IL MINIMO

$\{2^n\}$ È UNA CATENA

ANTICATENA SOTTOINSIEME TOTALMENTE DISORDINATO

NELL'ESEMPIO DI PRIMA, $\{p \text{ primo}\}$ è UN'ANTICATENA

TEOREMA DI DILWORTH

Sia $(S, \prec)$ un ordine parziale. Sia K la massima ~~grandezza~~ CARDINALITÀ di un'anticatena.

allora è possibile spezzare S come unione di K catene.

DILWORTH 2

Stessa cosa, ma K è la max cardinalità di una catena e spezziamo S in K anticatene

---

abbiamo $x_1, \dots, x_{ab+1}$ numeri reali distinti

allora c'è una succ. $\nearrow$ lunga $a+1$ oppure una $\searrow$ lunga $b+1$

Su $S = \{x_1, \dots, x_n\}$ definiamo un ordine parziale

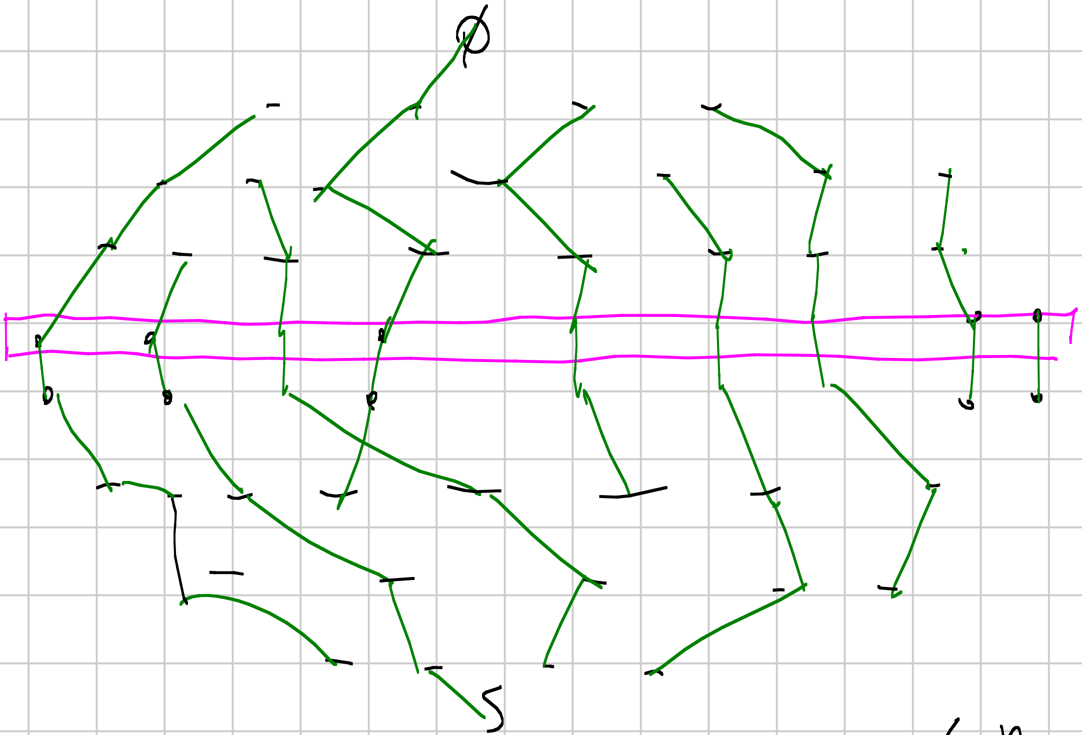
$x_i \prec x_j$ se e solo se $i < j$ $\quad x_i < x_j$

Sia k la più grande dimensione di una anticatena (sottosequenza decrescente).

Se $k \geq b+1$ ok

altrimenti divido S in $\leq b$ catene e quindi ce ne sta una lunga almeno $\left\lceil \frac{ab+1}{b} \right\rceil = a+1$

$|A| = n$ $\quad \wp(A)$ è parzialmente ordinato per $\subseteq$



ABBIAMO TROVATO UN'ANTICATENA LUNGA $\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$

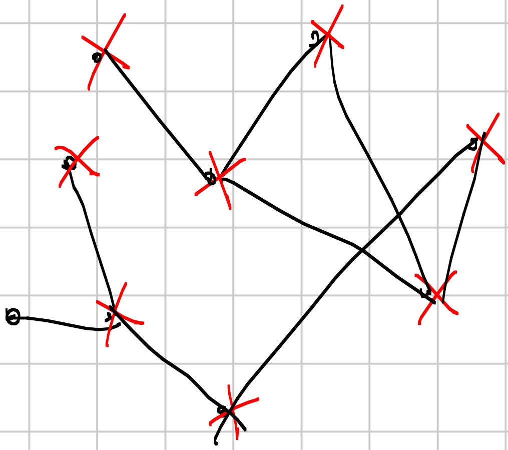
E ABBIAMO DIVISO $\wp(A)$ IN $\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ CATENE

TEOREMA DI SPERNER

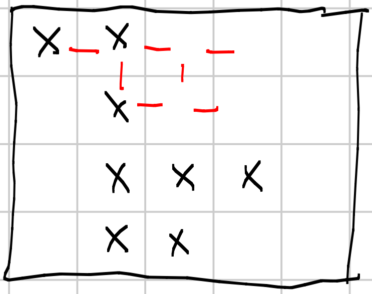
Se $|A| = n$ e $Q \subseteq \wp(A)$ è un'anticatena per $\subseteq$ allora $|Q| \leq \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$

ALBERTO E BARBARA

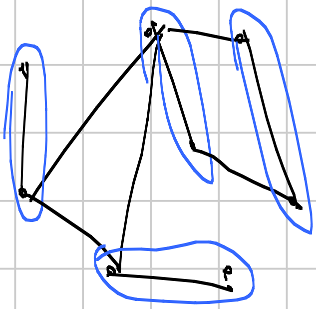
GRAFO CONNESSO G



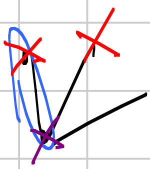
A TURNO SI METTE UNA CROCE SU UN VERTICE ADIACENTE ALL'ULTIMO E NON ANCORA USATO.
INIZIA ALBERTO METTENDO DOVE VUOLE LA PRIMA CROCE
PERDE CHI NON PUÒ PIÙ MUOVERE

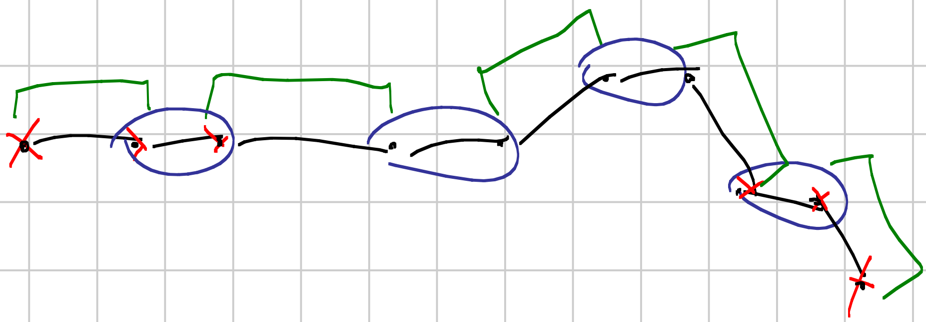


n intero positivo
Alberto dice un divisore d_1 di n
Barbara dice un altro divisore d_2
t.c. $d_1 | d_2$ oppure $d_2 | d_1$
e così via, usando solo i divisori di n (ciascuno al più una volta)



Se esiste un accoppiamento vince Barbara, che può sempre rispondere a ogni mossa di Alberto completando la coppia





PROBLEMA Dato un grafo con $|V|=n$ vertici e $|E|=e$ lati
UN SOTTOINSIEME STABILE dei vertici è un sottoinsieme in cui nessun vertice è collegato a nessun altro.
IDEA Ordino i vertici a caso $v_1, \dots, v_n$
Comincio a scorrere i vertici a partire dal primo

- Prendo v_1 e lo metto da parte
- Se v_2 non è collegato a v_1 lo metto da parte, altrimenti lo butto via

⋮

- Considero v_i: se è collegato a un vertice già preso lo butto via, altrimenti lo metto da parte

IN MEDIA quanti vertici prendo?

N è il n° di vertici presi. N è la somma delle funzioni F_v per $v \in V$ $\quad F_v = \begin{cases} 0 & \text{se ho scartato } v \\ 1 & \text{se l'ho messo da parte} \end{cases}$

$$E[N] = \sum_{v \in V} E[F_v] = \sum_{v \in V} P(\{\text{"v viene messo da parte"}\}) \geq$$

$$\geq \sum_{v \in V} \frac{1}{\deg(v)+1} \underset{\substack{\text{JENSEN} \\ \text{su } \frac{1}{1+x}}}{\geq} n \cdot \frac{1}{1 + \frac{2e}{n}} = \frac{n^2}{n+2e}$$

ESERCIZIO (TEOREMA DI TURÀN) Se un grafo su n vertici non contiene K_r completi come sottografi, allora

$$e \leq \left(1 - \frac{1}{r-1}\right) \frac{n^2}{2}$$