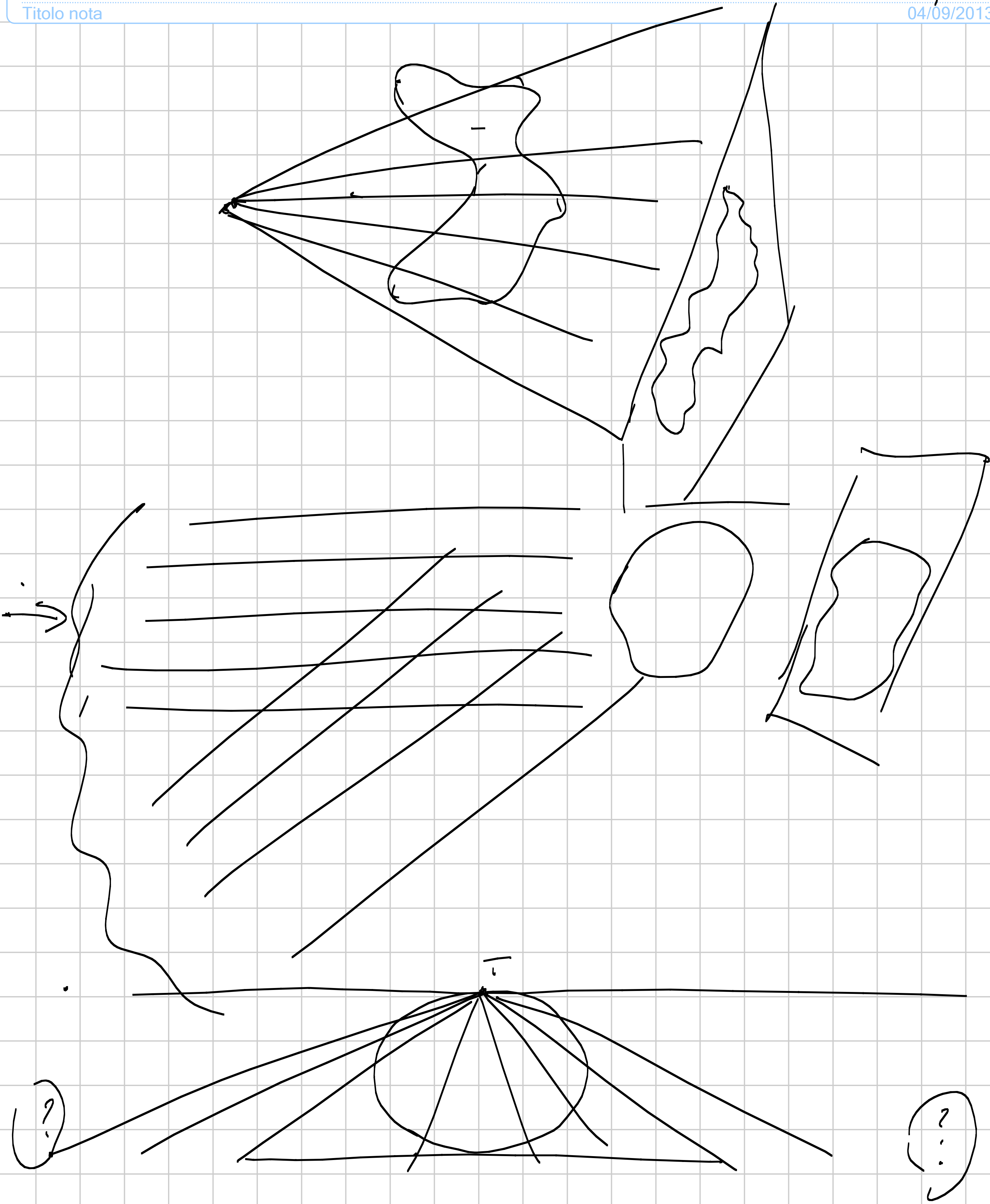
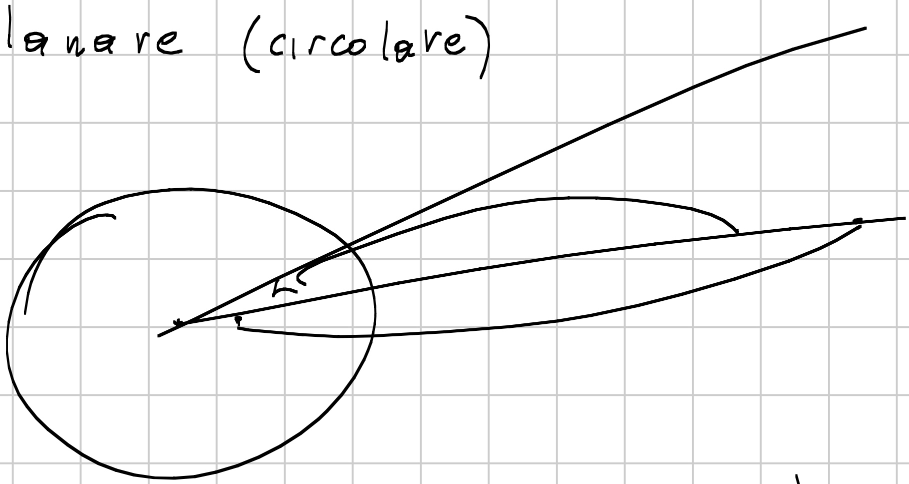
Senior 2013 - G2 medium (proiettiva)

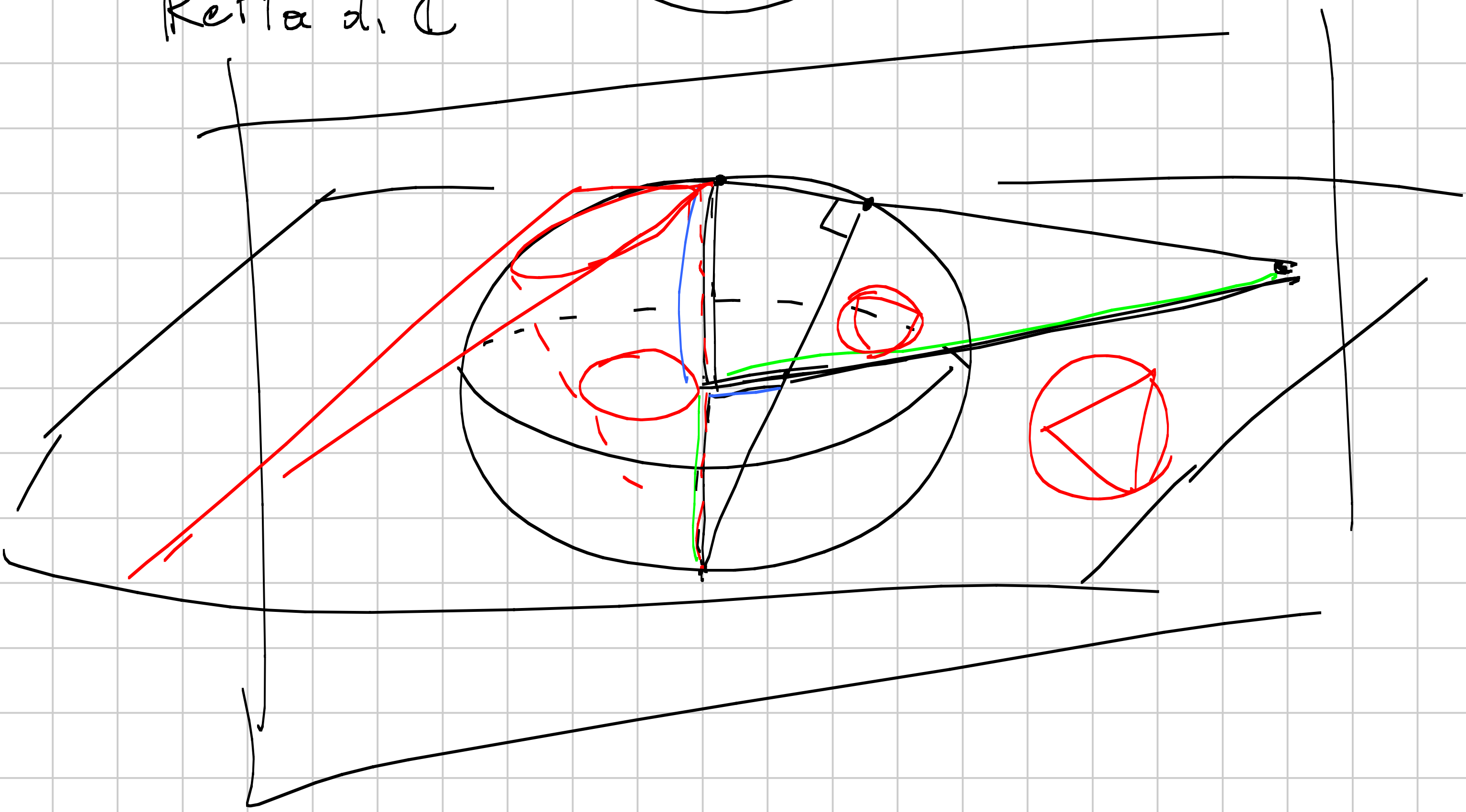
Titolo nota 04/09/2013



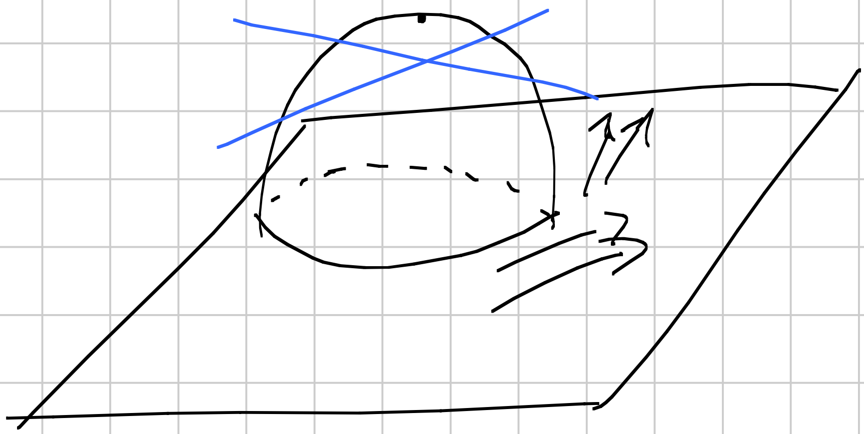
Inversione planare (circolare)

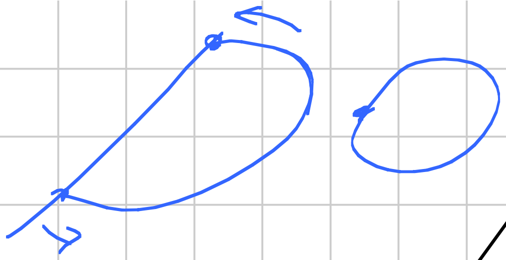


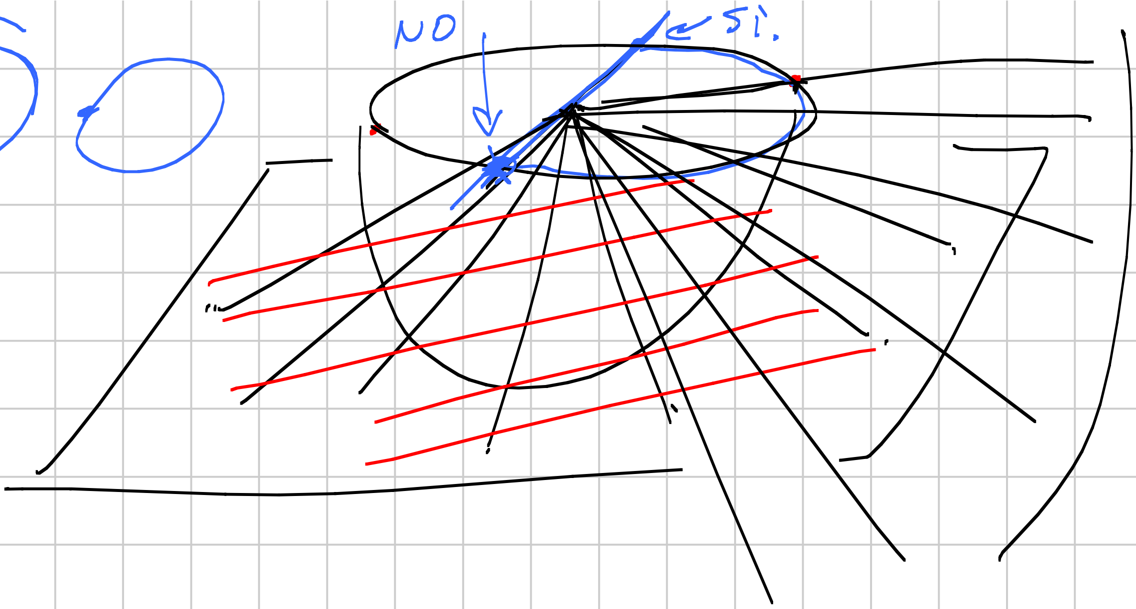
Retta di "C"

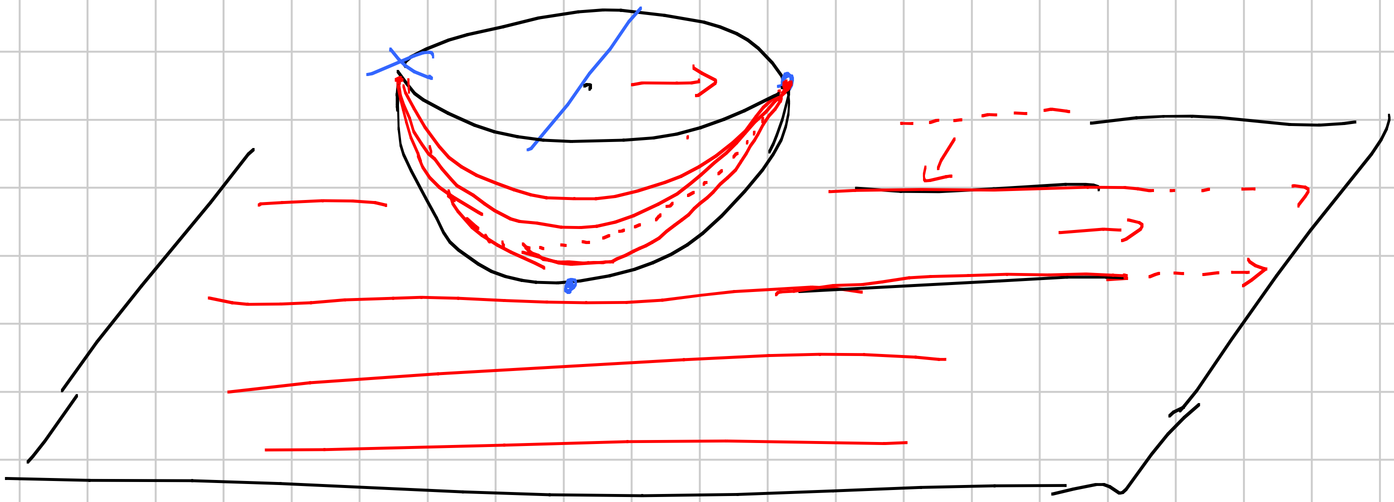


Piano reale

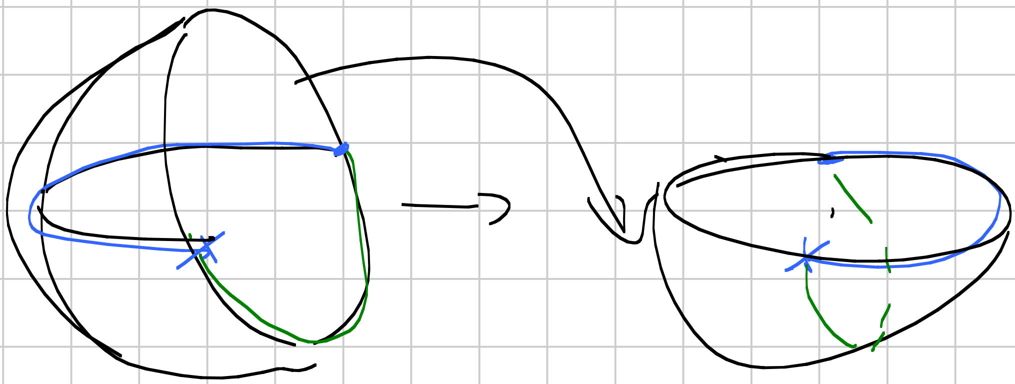


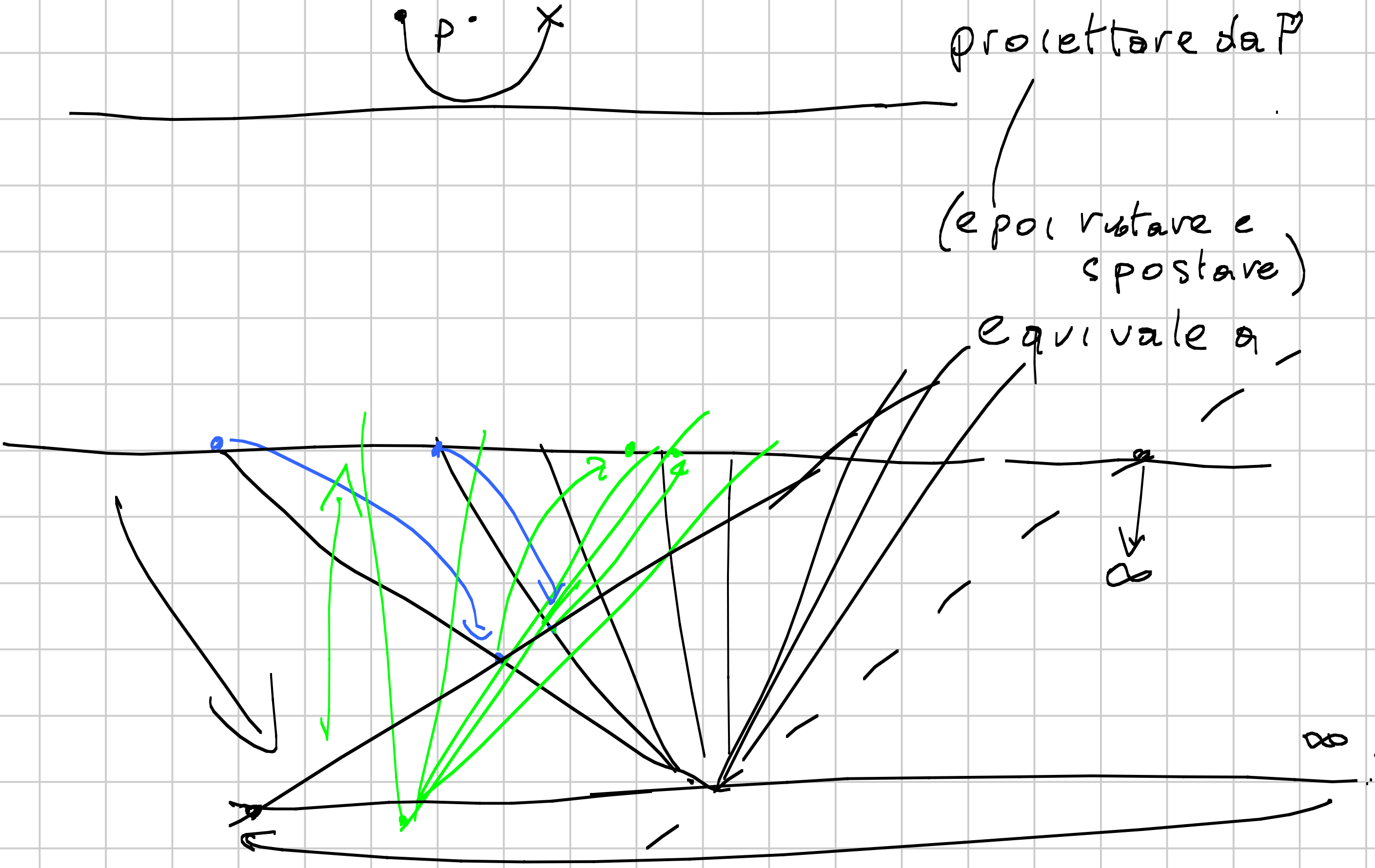






Nel piano proiettivo, tutte le rette (distinte) si intersecano in 1 punto.





proiettore da P

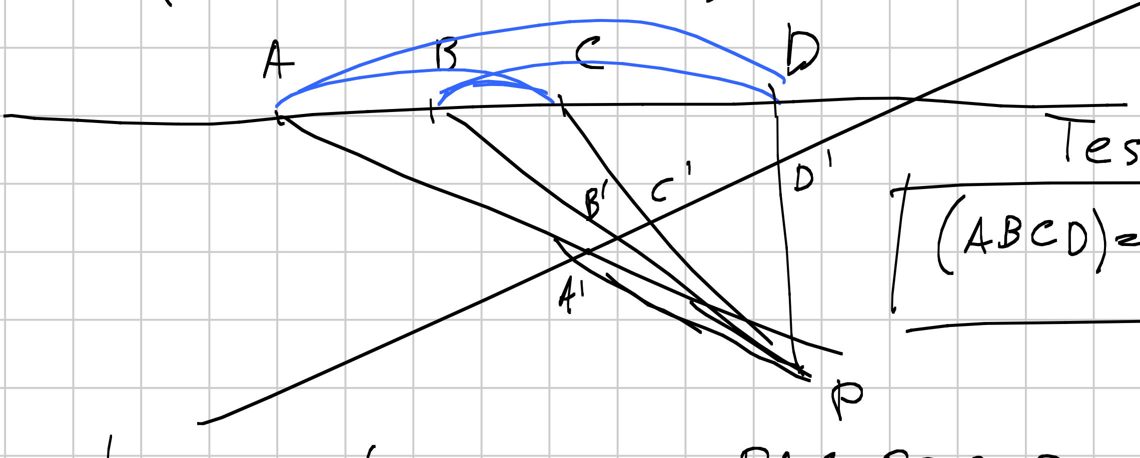
(e poi ruotare e spostare)

equivale a

$$\frac{\frac{AC}{BC}}{\frac{AD}{BD}} = (AB;CD)$$

birapporto dei 4 punti A, B, C, D (lunghezze con segno)

Così se A, B, C, D sono 4 punti <u>allineati</u> nel piano (o dove volete voi!).



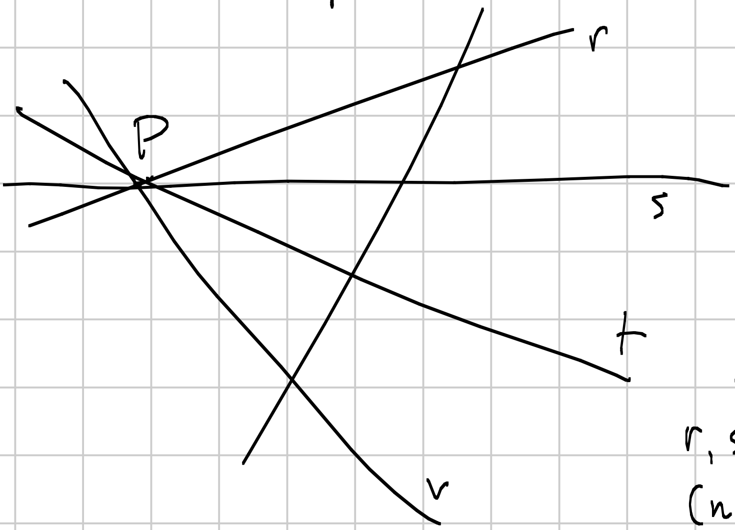
Tesi:

$$\boxed{(ABCD) = (A'B'C'D')}$$

Dim.: teorema dei seni su PAC PBC PAD PBD

$$(ABCD) = \frac{\text{sen}\, A\hat{P}C}{\text{sen}\, B\hat{P}C} : \frac{\text{sen}\, A\hat{P}D}{\text{sen}\, B\hat{P}D}$$, quindi è

indipendente dalla retta su cui lo calcolo (se non passa per P, almeno). □



$(rstv)$ birapporto di 4 rette concorrenti

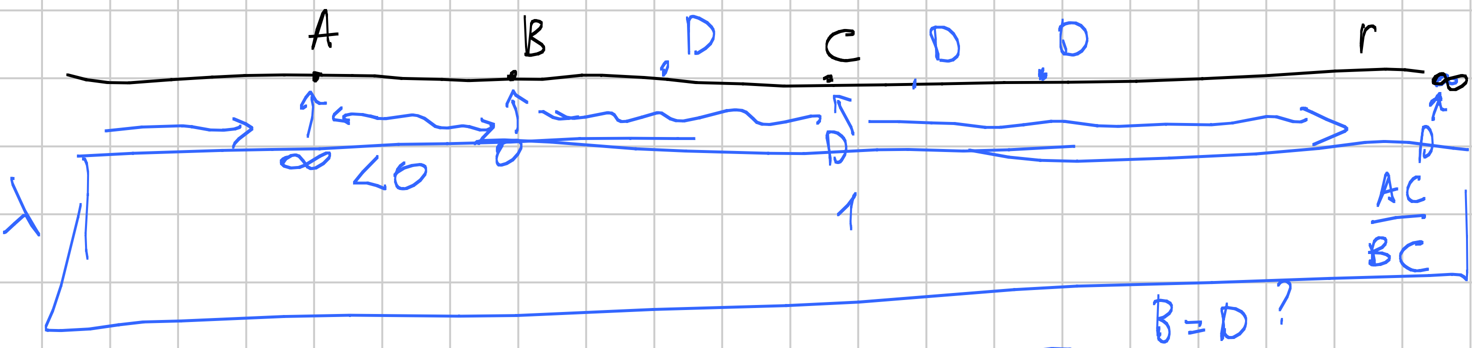
$\Updownarrow$

birapporto di 4 punti ottenuti intersecando r, s, t, v con una trasversale (non per P magari).

$$(ABCD) = \lambda \qquad (ABDC) = \frac{1}{\lambda} = (BACD)$$

$$(ACBD) \overset{?}{=} 1-\lambda \qquad (ADCB)$$

$$\left(\lambda, \frac{1}{\lambda}, 1-\lambda, \frac{\lambda}{1-\lambda}, \frac{1-\lambda}{\lambda}, \frac{1}{1-\lambda}\right)$$



$D = \infty$? $\quad \frac{AC}{BC} \cdot \frac{BD}{AD} = \frac{AC}{BC} \cdot \frac{B\infty}{A\infty} = \frac{AC}{BC} > 1$

Importante oss.: è una biezione tra $\lambda \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ e le posizioni di D su $r \cup \{\infty\}$

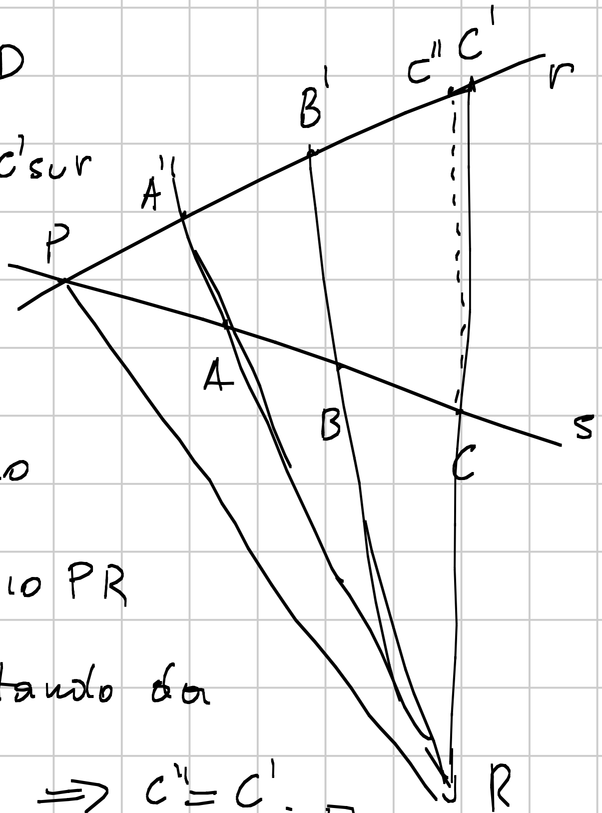
$$(ABCD)+(ACBD)=1$$

$A\ B\ C\ D\ D'$ allineati

$(ABCD)\cdot(ABDD')$

$$\frac{(ABCD)}{(ABDD')}=(ABCD') \qquad \frac{(ABCD)}{(ABEF)}=(CDEF)$$

$$(ABCD)=1 \iff C=D$$



Teorema P,A,B,C su s; P,A',B',C' su r

$$(PABC)=(PA'B'C')$$

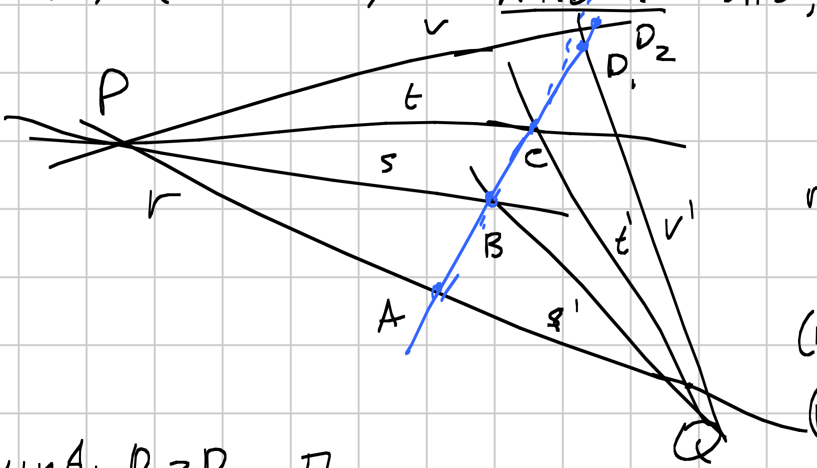
Allora le rette AA', BB' e CC' concorrono

Dim.: $R=AA'\cap BB'$. Traccio PR

$RC\cap r=C''$; ma proiettando da R su r $(PA'B'C'')=(PABC) \Rightarrow C''=C'$. $\square$

[r,s,t,v 4 rette concorrenti in P, e così r,s',t',v' in Q $(r,s,t,v)=(r,s',t',v')$. Allora $s\cap s'$, $t\cap t'$, $v\cap v'$ sono allineati.

Dim



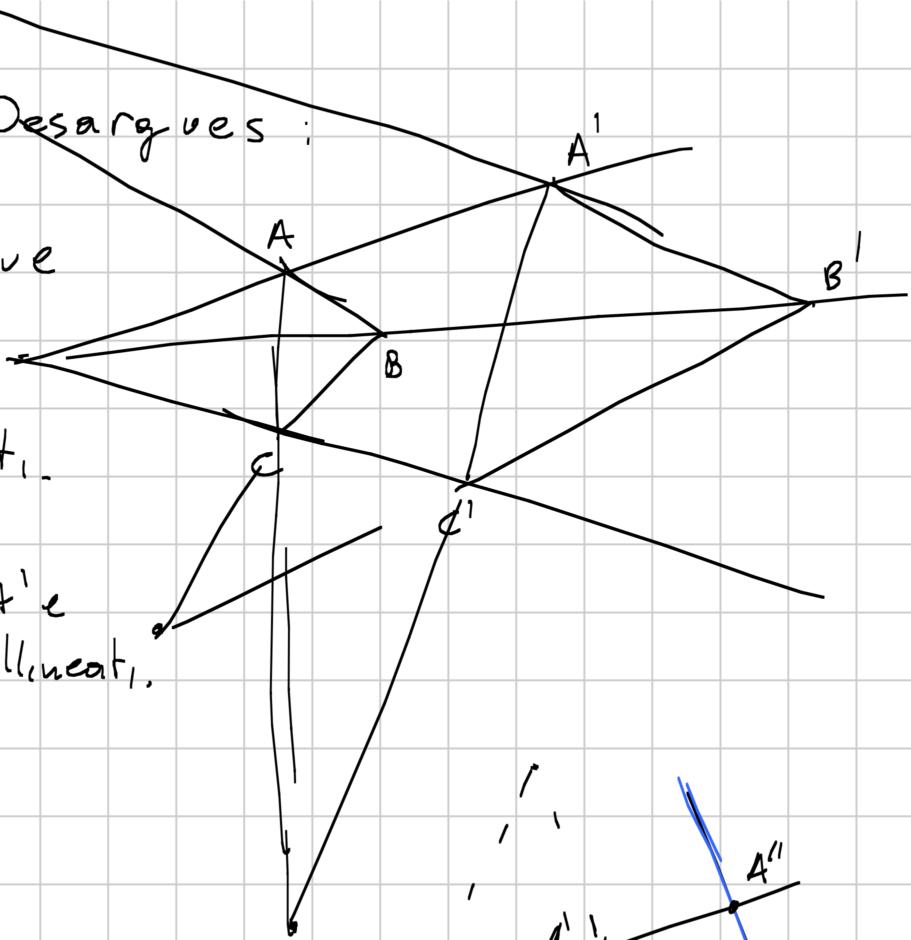
Considero la retta per $s\cap s'$ e $t\cap t'$:

$(rstv)=(ABCD_2)$

$(rs't'v')=(ABCD_1)$.

Quindi $D_1=D_2$ $\square$

Teorema di Desargues:

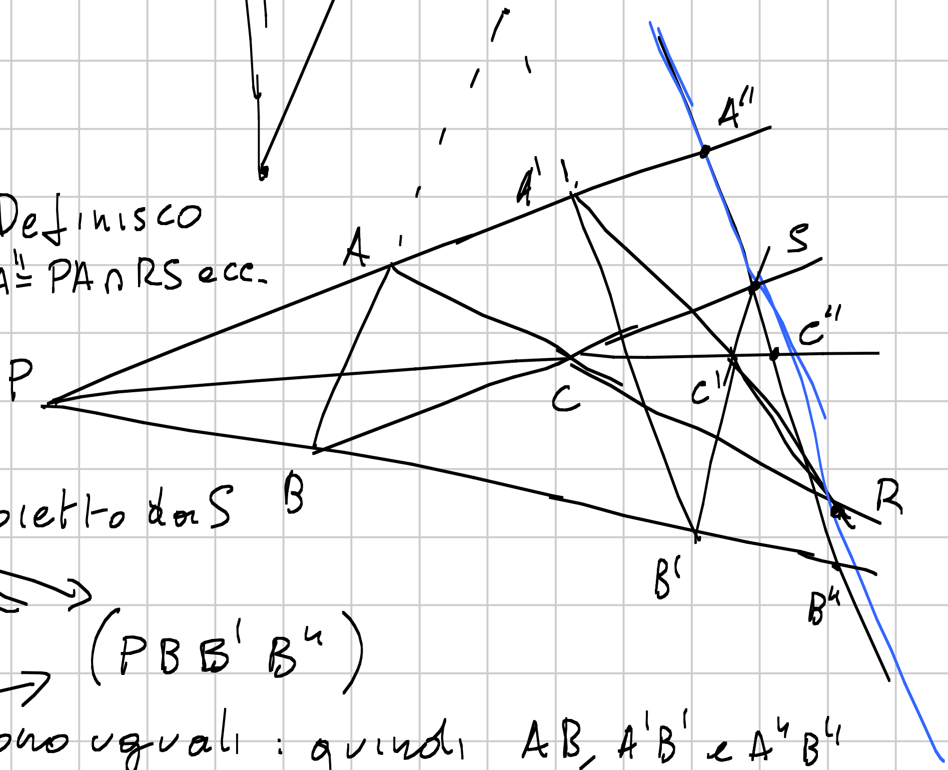


ABC $A'B'C'$ due triangoli t.c. AA', BB' e CC' sono concorrenti.
Allora $AB \cap A'B'$, $CA \cap C'A'$ e $BC \cap B'C'$ sono allineati.

Dim

Dimostrerò che AB, $A'B'$ e RS concorrono.

Definisco $A'' = PA \cap RS$ ecc.



$(PCC'C'') \xrightarrow{\text{proietto da } S} (PBB'B'')$

proietto da R

$(PAA'A'')$

$(PCC'C'')$ proietto da S $=$ $(PBB'B'')$, $(PCC'C'')$ $=$ proietto da R $(PAA'A'')$

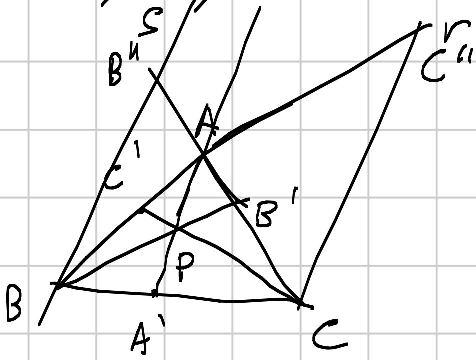
$(PAA'A'') \leftrightarrow (PBB'B'')$ sono uguali: quindi AB, $A'B'$ e $A''B''$ concorrono
$ \overset{\parallel}{RS}$

$\square$

Teorema di Ceva:

ABC triangolo, $A' \in BC$, $B' \in CA$, $C' \in AB$. AA', BB', CC' concorrono $\iff \dfrac{BA'}{CA'} \cdot \dfrac{CB'}{AB'} \cdot \dfrac{AC'}{BC'} = -1$

Dim.



Traccio le parallele a AA' per B e C (concorrono con AA')

proietto da B

$$(A' P A \infty) = (C B' A B'') = \frac{CA}{CB''}\cdot\frac{B'B''}{B'A} \qquad (A C B' B'') \parallel (A B C' C'')$$

↓ proj. da C

$$(B C' A C'') = \frac{BA}{BC''}\cdot\frac{C'C''}{C'A}$$

Così, e quindi

$$\frac{AB'}{CB'}\cdot\frac{BC'}{AC'} = \frac{AB''}{CB''} : \frac{AC''}{BC''} = \frac{A'B}{\cancel{C}B} : \frac{A'C}{B\cancel{C}}_{-1} =$$

(Talete su se $AA' \parallel r$)

$$= -\frac{A'B}{A'C} \qquad \frac{AB'}{CB'}\cdot\frac{BC'}{AC'}\cdot\frac{CA'}{BA'} = -1$$

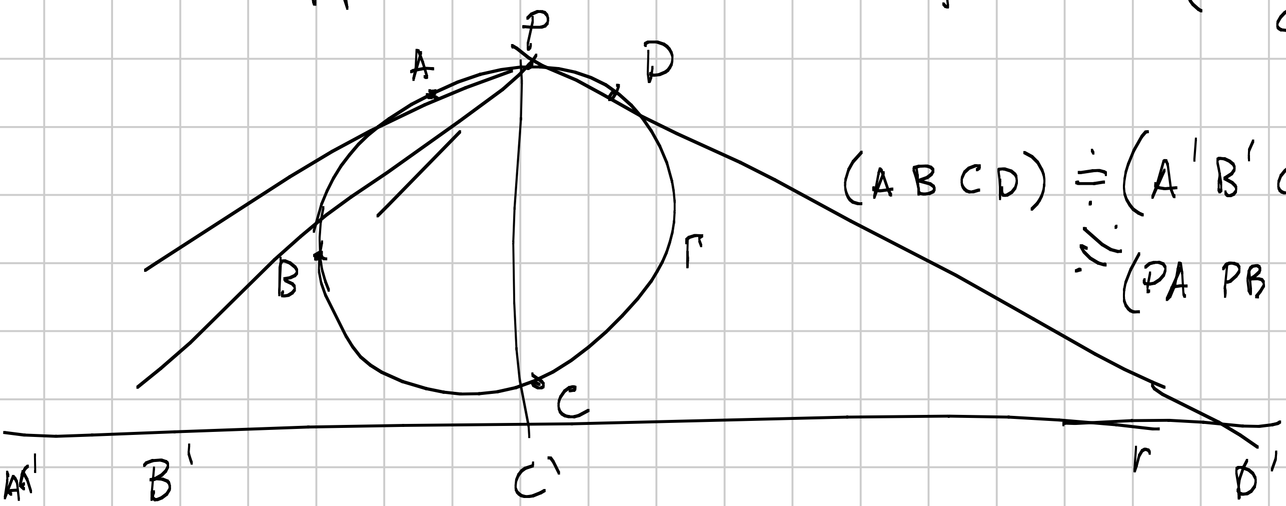
Teorema di Menelao: ABC triangolo, r,s,t; $\exists$ retta v per tre punti di r,s,t A', B', C'

$A' = v\cap r$, $B' = v\cap s$, $C' = v \cap t$

$$\Longleftrightarrow \frac{A'B}{A'C}\cdot\frac{B'C}{B'A}\cdot\frac{C'A}{C'B} = -1$$

Dim. idem. □

Birapporto su una circonferenza (o su una conica)

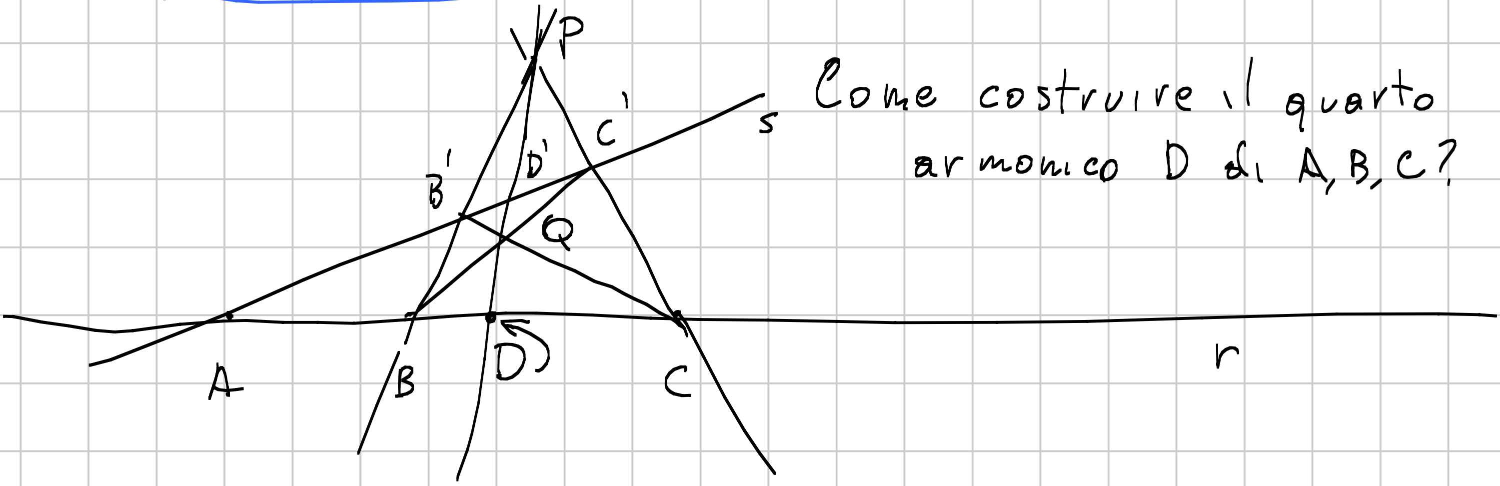


$$(A B C D) \doteq (A' B' C' D') \doteq (PA\ PB\ PC\ PD)$$

Qualunque sia P, qualunque sia r il birapporto $(A'B'C'D')$ è lo stesso!

A, B, C, D allineati t.c. $(ABCD) = -1$ si dicono $\boxed{\text{quaterna armonica}}$

Come costruire il quarto armonico D di A, B, C?



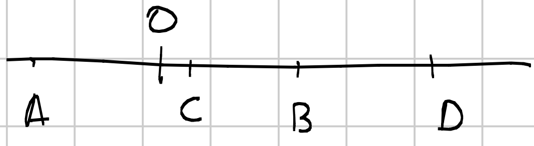
Scelgo s per A, $P \notin r \cup s$; traccio PB e PC, chiamo $B' = PB \cap s$, $C' = PC \cap s$ e $Q = CB' \cap BC'$; sia $D = r \cap PQ$ e $D' = s \cap PQ$.

$$(ADBC) = (AD'B'C') = (ADCB) = \frac{1}{(ADBC)}$$

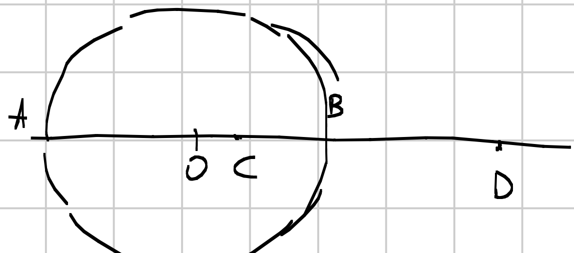
$$\Rightarrow (ADBC) = \begin{cases} \cancel{+1} & \text{no perché } A, B, C, D \text{ distinti} \\ -1 \end{cases}$$

D è anche detto coniugato di A rispetto a BC

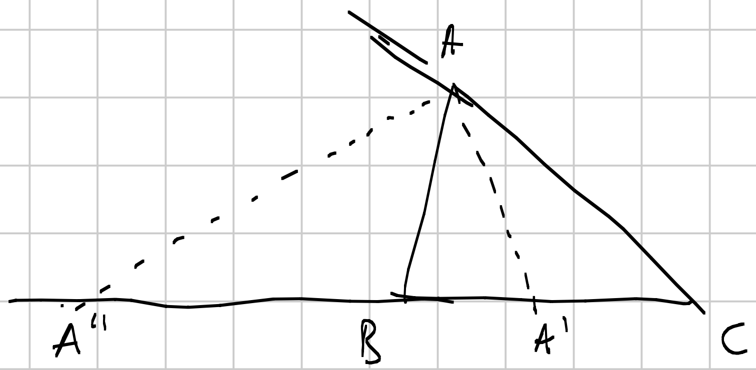
Proprietà: A, B, C, D quat. armonica, $O =$ p. medio di AB



1. $\dfrac{2}{AB} = \dfrac{1}{AC} + \dfrac{1}{AD}$
2. $CA \cdot CB = CO \cdot CD$
3. $OC \cdot OD = OA^2 = OB^2$ $\longrightarrow$



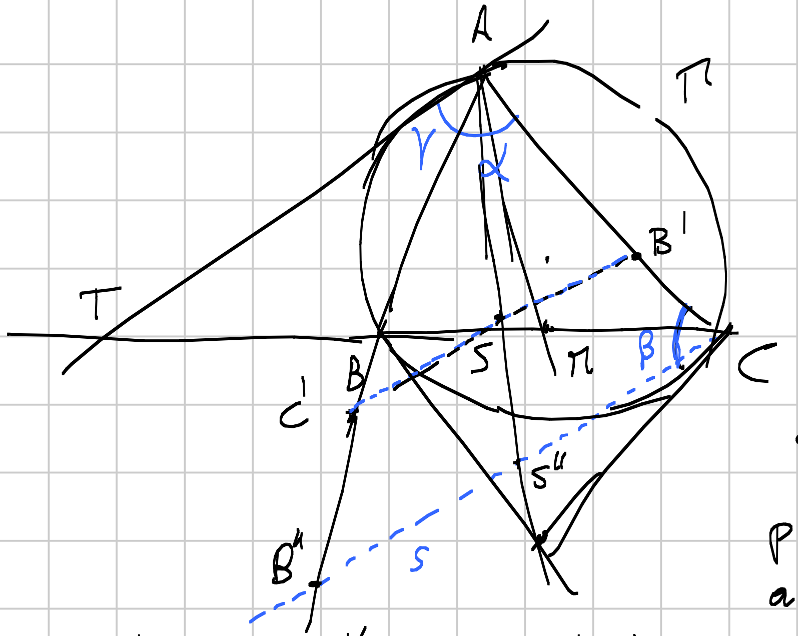
4. $\dfrac{OC}{OD} = \left(\dfrac{AC}{AD}\right)^2 = \left(\dfrac{BC}{BD}\right)^2$



AA', AA'' bisettrici

$(A''A'BC) = -1$.

(calcolo con seni o teo. bisettrice).



AT tangente in A a Γ

AS simmediana.

$(T\ S\ B\ C) = -1$

Simmediana = luogo dei p. medi delle antiparallele al lato opposto

Simmetrizzo: l'antiparallela per C a BC fa con AC un angolo β. AT con AC fa un angolo $\pi - \beta$

$\Rightarrow$ AT e s sono parallele. S'' è p. medio di $B''C$.

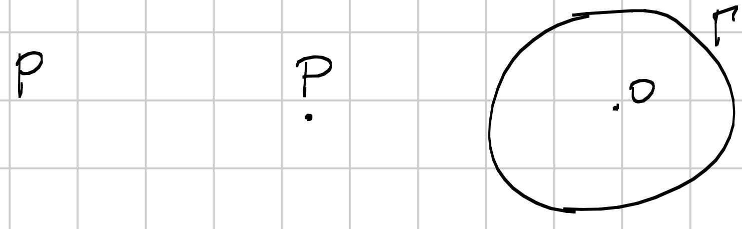
Ma il p. medio è il coniugato armonico di ∞

$$(\infty\ S''B''C) = \left(\frac{S''B''}{S''C}\right)^{-1} = -1$$

$\Rightarrow$ $TSBC$ è armonica. $\square$

Polo e polare

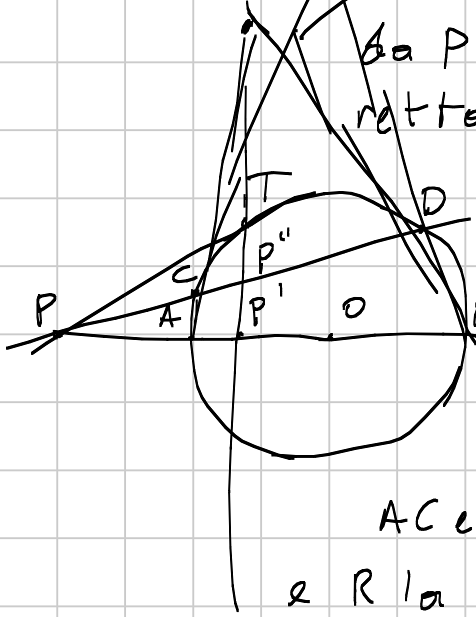
$\mathcal{C}$ conica (circonferenza, o 2 rette)



Il luogo dei punti Q quarti armonici di P e delle due intersezioni delle rette per P con Γ è una retta, chiamata <u>polare di P</u>

La polare è anche: retta per i punti di tangenza da P

retta $\perp PO$ per l'inverso di P.



$(PP'AB) = -1$

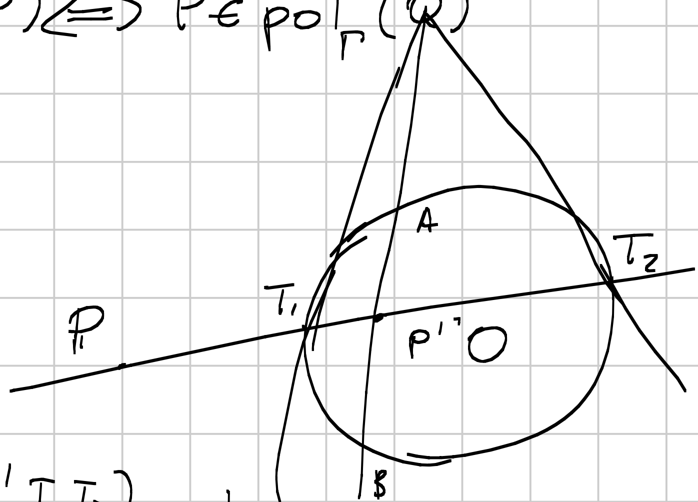
$(PTTT) = -1$

$(PP''CD) = -1$ perché

AC e BD si intersecano su $P'T \cap R$

e R la proietta su $(PP'AB)$.

Dualità: $Q \in pol_\Gamma(P) \Longleftrightarrow P \in pol_\Gamma(Q)$

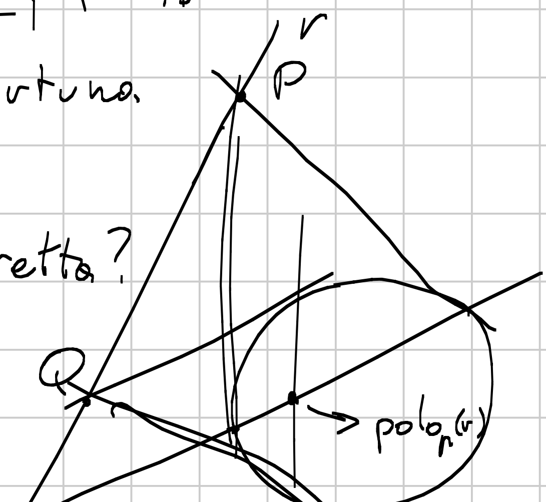


$(QPAB) = -1$

Quanto vale

(PQX_1X_2) ? $= (PP'T_1T_2) = -1$

proiettando dal punto opportuno.

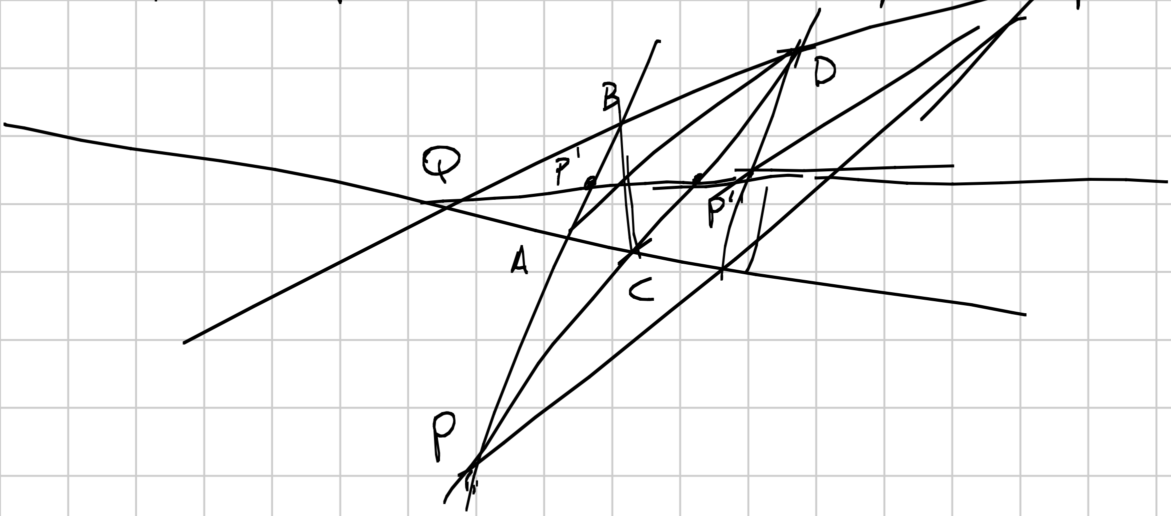


Come calcolo il polo di una retta?

Per $polo_\Gamma(r) \in pol_\Gamma(P)$

$polo_\Gamma(r) \in pol_\Gamma(Q)$

r passa per P e Q $\iff$ $\text{polo}_\Gamma(r) \in \text{pol}_\Gamma(P) \cap \text{pol}_\Gamma(Q)$

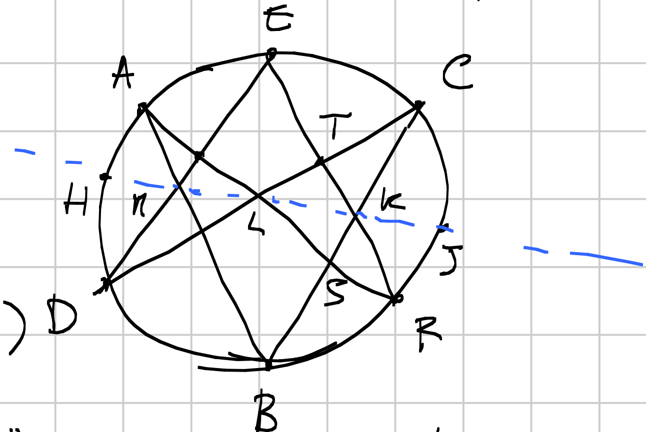


Teorema di Pappo: $A, B, C \in r$ $A', B', C' \in s$

$AB' \cap BA'$ $AC' \cap CA'$ $BC' \cap CB'$ sono allineati

Teorema di Pascal: $ABCDEF$ su conica

$AB \cap DE$ $BC \cap EF$ $CD \cap FA$ sono allineati



$H, J = ML \cap \Gamma$

$$(HMLJ) \overset{D}{=} (HECJ) \overset{T}{=} (HK'LJ)$$

$$\|$$

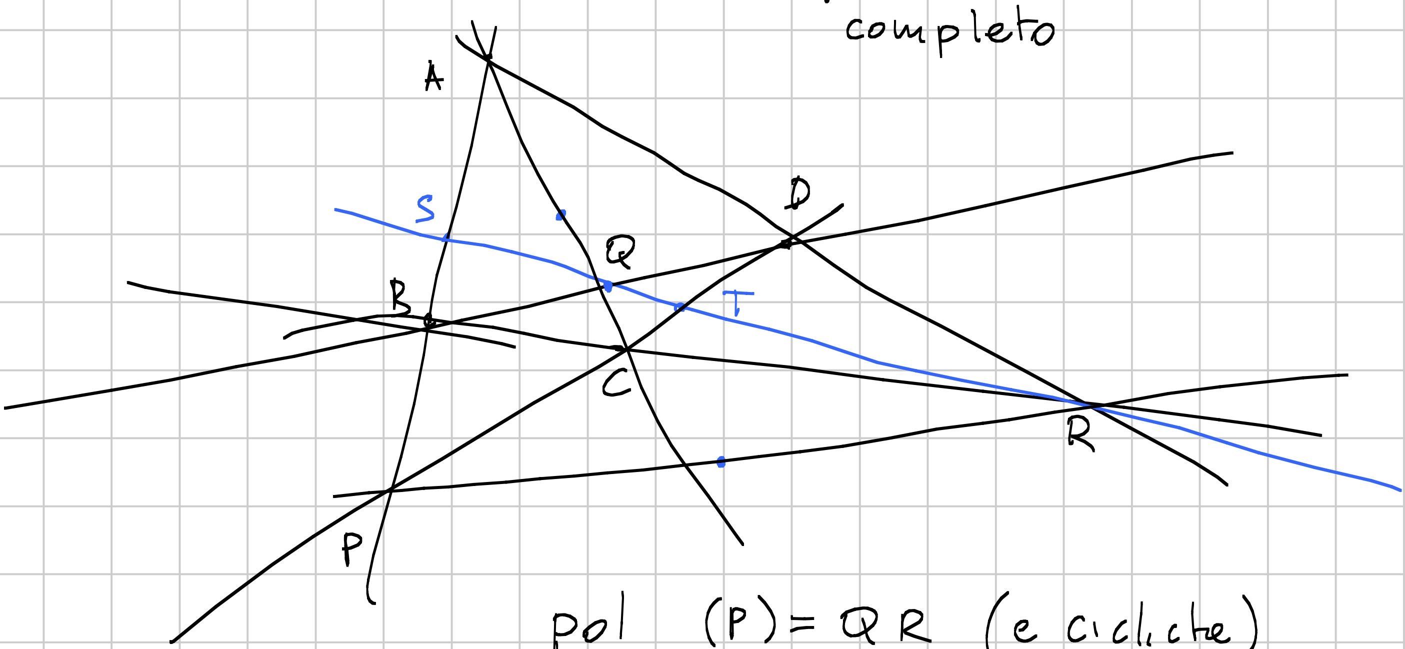
$$(HMLJ) \overset{A}{=} (HBFJ) \overset{S}{=} (HK''LJ)$$

$K' = ET \cap ML$

$K'' = BS \cap ML$

Quindi $K' = K'' \Rightarrow BC \cap EF \in ML$

quadrilatero completo

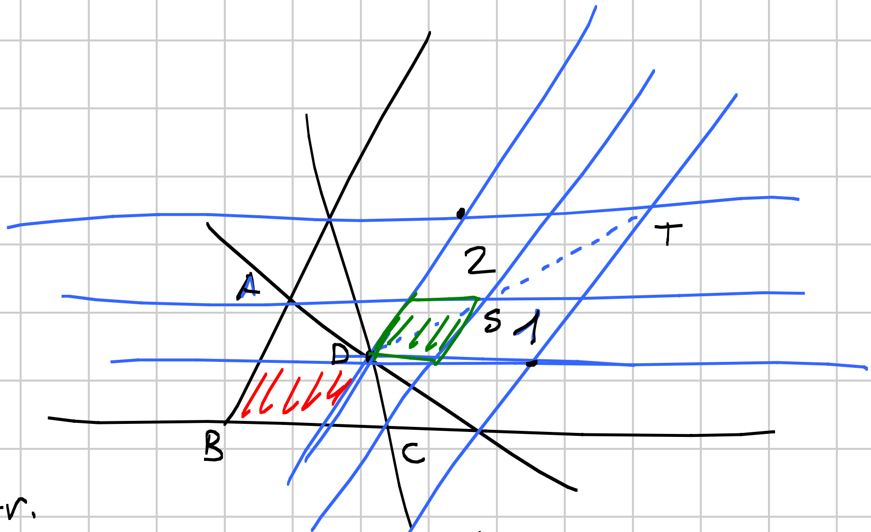


$\mathrm{pol}_{AD,BC}(P) = QR$ (e cicliche$_{P,Q,R}$)

$(S\,T\,Q\,R) = -1$ $(P\,S\,B\,A) = -1$ $(P\,T\,C\,D) = -1$

Diagonali: AC, BD, PR

Es. M_1 M_2 M_3 (p. medi di AC, BD e PR) sono allineati

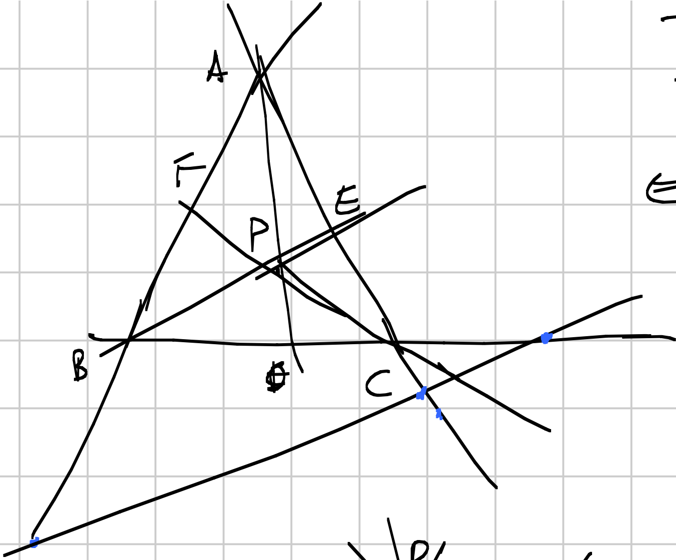


D S T allineati:

se diag. parallelogr.

$\iff$ $1 = 2$: ma $1 + \;\; = \;\; = 2 + \;\;$!

M_1 M_2 M_3 sono p. medi di BD, BS, BT



Teorema (Ceva vs Menelao)

AD BE CF concorrono

$\Longleftrightarrow$ i quarti armonici di

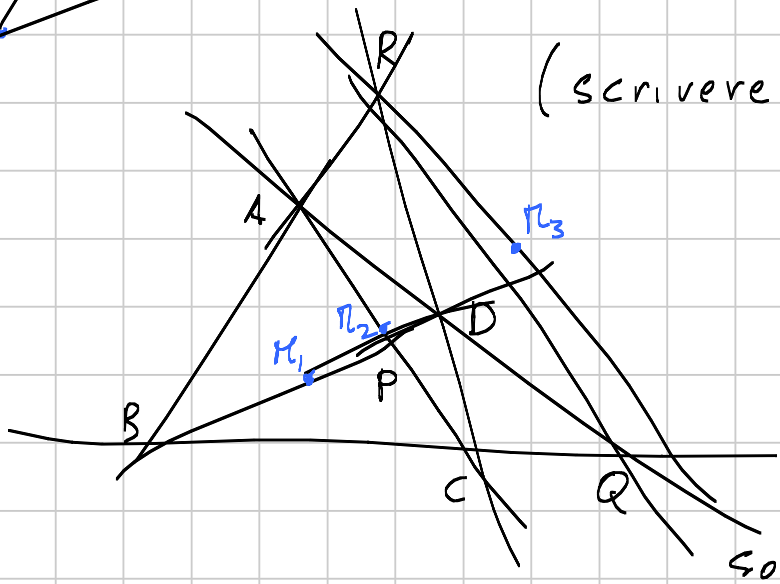
D risp. B C

E A C

F A B

sono allineati

(scrivere i birapporti)



In BQR

BD RC e AQ

concorrono in D

$\Rightarrow$ i quarti armonici delle terne sui lati sono allineati.

I rapporti di Menelao sono quelli della formula (4)

$\Rightarrow$ il prodotto dei quadrati fa 1 $\Rightarrow$ M_1, M_2 e M_3 sono allineati.