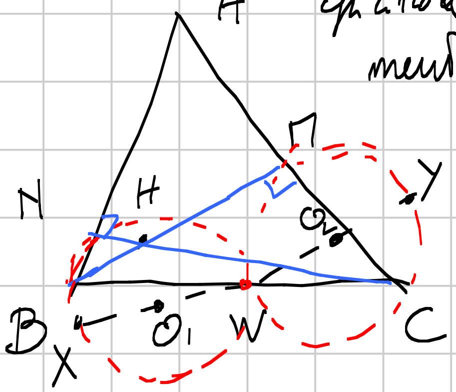
GEOMETRIA SINTETICA – G3M

Titolo nota 05/09/2013

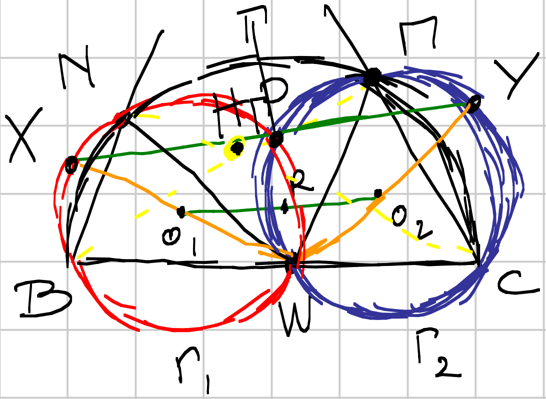
IMO 2013 – B1



circ. circ. BNW e CMW consideriamo i diametralmente opposti a W, X e Y.

Allora X, H, Y allineati.

Dim: Notiamo BCMN ciclico (due angoli retti)



$pow_{\Gamma}(A) = AN \cdot AB = AM \cdot AC$

$pow_{\Gamma_1}(A) = AN \cdot AB$

$pow_{\Gamma_2}(A) = AM \cdot AC$

(altrimenti: AB asse rad tra Γ e Γ_1
AC asse rad tra Γ e Γ_2)

$\Rightarrow$ $A \in$ asse rad tra Γ_1 e Γ_2

se $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \{W, P\}$ $\Rightarrow$ $A \in PW$

$\Rightarrow$ $AP \perp O_1O_2$

Ma $XY \parallel O_1O_2$ per Talete $\Rightarrow$ $AP \perp XY$

Inoltre per simmetria, se $PW \cap O_1O_2 = R$, si ha $PR = WR$

$\Rightarrow$ P sta su XY (sempre per Talete)

$\boxed{\text{Hope:}}$ $H\hat{P}A = \frac{\pi}{2}$

ANHM ciclico con diam. AH. Se P sta sulla sua circ. avrei finito. Questo è vero per il Teorema di Miquel.

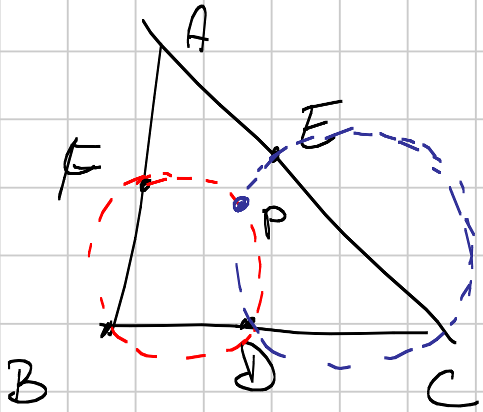
Oppure, da ipotesi, calcoliamo

$$\widehat{NP\Pi} = 2\pi - \widehat{NPW} - \widehat{\Pi PW} = 2\pi - (\pi - \beta) - (\pi - \gamma) =$$

$$= \beta + \gamma \implies AN P\Pi \text{ ciclico} \implies \text{ho finito.} \quad \square$$

<u>Teo</u> (Miquel): Dato un triangolo ABC con tre punti D, E, F sui suoi lati, le circonferenze circoscritte a AEF, BDF, CED concorrono.

<u>Dim</u>:



Traccio le cf per B, D, F e C, E, D che si incontrano, oltre che in D, in un punto P.

$$\widehat{FPE} = 2\pi - \widehat{FPD} - \widehat{EPD} =$$

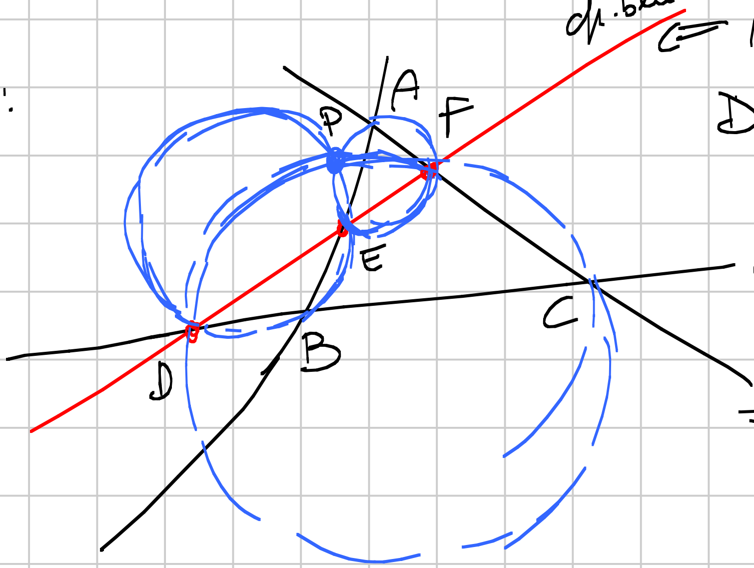
$$= 2\pi - (\pi - \beta) - (\pi - \gamma) = \beta + \gamma$$

$\implies AFPE$ ciclico. $\square$

<u>Oss</u>: Il Teo di Miquel vale per qualunque configurazione.

<u>Teo</u> (di Miquel): Date 4 rette r_1, r_2, r_3, r_4, a 3 a 3 non concorrenti, sia Γ_i la cf. circo al Tri formato da $r_j r_k r_l$ per $\{i, j, k, l\} = \{1, 2, 3, 4\}$. Allora $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4$ concorrono.

<u>Dim</u>:



$\Leftarrow$ ABC Tri, DEF punti sui lati

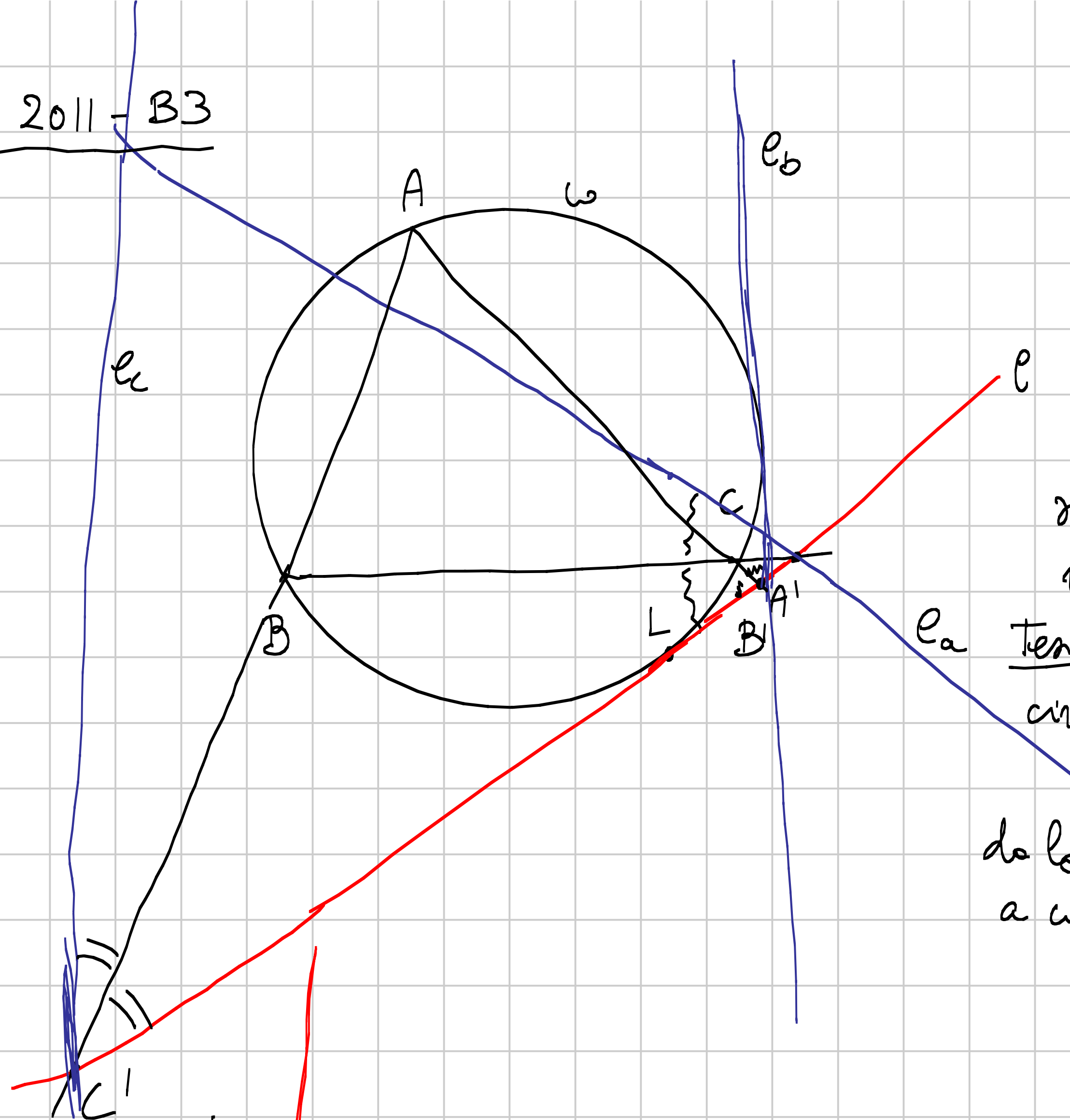
DCF Tri, AEB punti sui lati

$\Downarrow$

circo a CAB, AEF, DBE concorrono

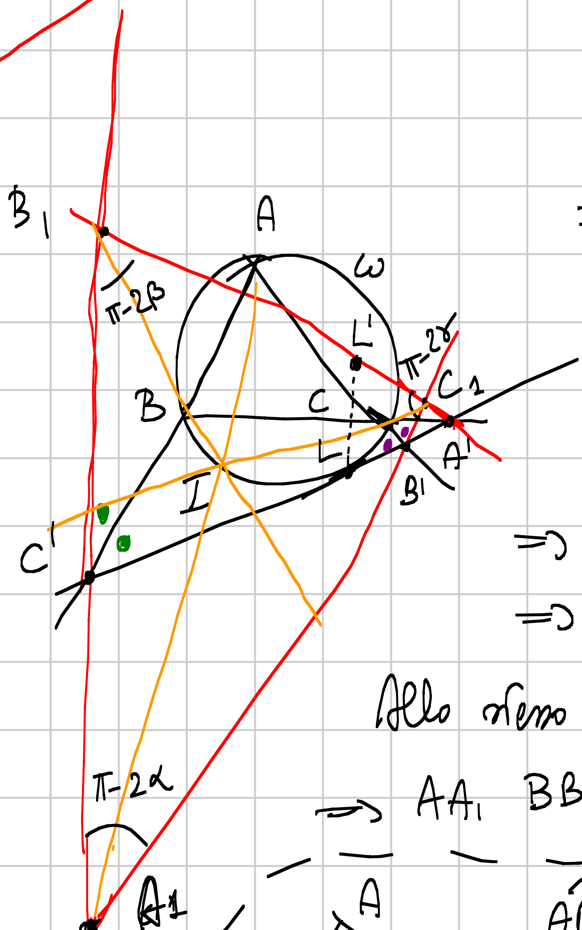
$\implies$ circo a CAB passa per l'ulteriore intersez. delle circo a AEF e DBE, ovvero P. $\square$

IMO 2011 - B3



$\ell_a\ \ell_b\ \ell_c$ simmetriche di ℓ rispetto ai lati:

Tesi: le circonferenze circoscritta al triangolo formato da $\ell_a \ell_b \ell_c$ è tangente a ω



Facendo i simmetrici di ℓ "producevano" angoli uguali

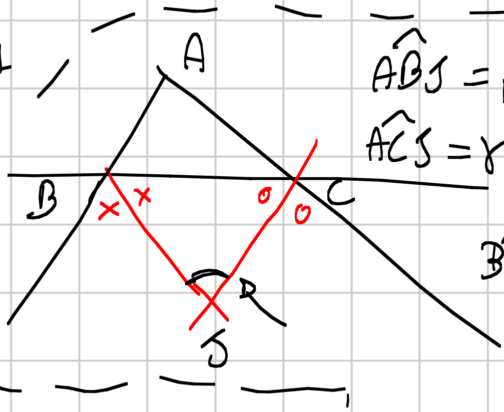
$\Rightarrow$ AC' e AB' sono bisett. esterne di $C'A_1B'$

$\Rightarrow$ A è excentro di $C'A_1B'$

$\Rightarrow$ AA_1 bisett. interna di $A_1C'B'$.

Allo stesso modo BB_1, CC_1 bisettrici

$\Rightarrow$ $AA_1\ BB_1\ CC_1$ concorrono in I



$$\widehat{ABJ} = \beta + \frac{\pi-\beta}{2}$$

$$\widehat{ACJ} = \gamma + \frac{\pi-\gamma}{2}$$

$$\widehat{BJC} = 2\pi - \alpha - \beta - \frac{\pi-\beta}{2} - \gamma - \frac{\pi-\gamma}{2}.$$

$$= \pi - \alpha - \beta + \frac{\beta}{2} - \gamma + \frac{\gamma}{2} =$$

$$\Rightarrow C\hat{A}B = \frac{\pi}{2} - \frac{C'\hat{A_1}B'}{2}$$

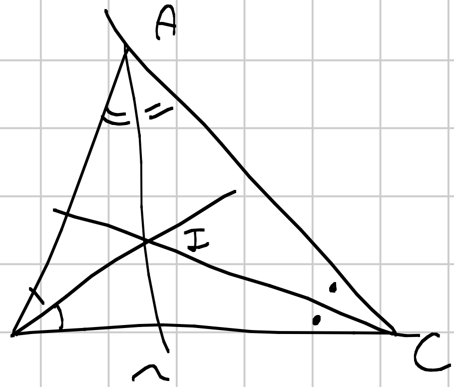
$$C_1\hat{A_1}B_1 = C'\hat{A_1}B' = \pi - 2\,C\hat{A}B = \pi - 2\alpha$$

$$B_1\hat{I}C_1 = \frac{\pi}{2} + \frac{B_1\hat{A_1}C_1}{2} =$$

$$= \frac{\pi}{2} + \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \pi - \alpha$$

$\Rightarrow B\hat{I}C = \pi - \alpha \Rightarrow BICA$ ciclico.

$$= \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}.$$

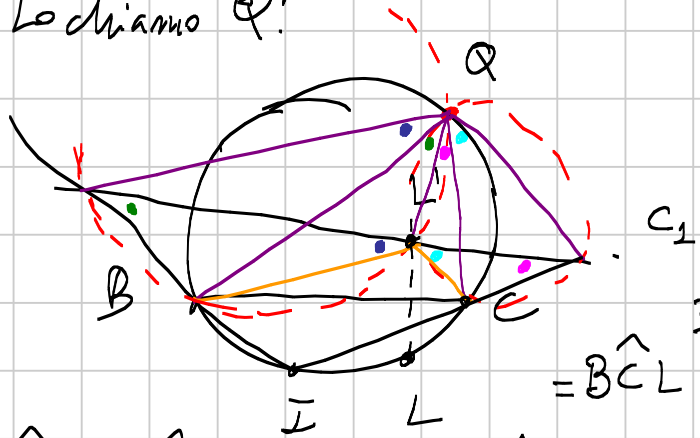


$$B\hat{I}C = \pi - \frac{\beta}{2} - \frac{\gamma}{2} =$$

$$= \frac{\pi}{2} + \frac{\alpha}{2}$$

Sia L' simm. di L risp. a BC

considero il pt. di Miquel in $\triangle B_1IC_1$ dato dai punti, B, C, L' sui lati. Lo chiamiamo Q!



$$B_1\hat{Q}B = B_1\hat{L'}B = B\hat{L}C' =$$
$$= B\hat{C}L = B\hat{C}L'$$

$$B_1\hat{Q}C_1 = B\hat{Q}L' + L'\hat{Q}C + B_1\hat{Q}B + C\hat{Q}C_1 =$$

$$= I\hat{B_1}C_1 + I\hat{C_1}B_1 + C\hat{B}L' + B\hat{C}L' =$$

$$= \pi - B_1\hat{I}C_1 + \pi - C\hat{L'}B = \pi - B_1\hat{I}C_1 + \pi - C\hat{L}B =$$

$$= \pi - B_1\hat{I}C_1 + \pi - B\hat{I}C = 2\pi - 2B_1\hat{I}C_1 =$$

$$= \pi - B_1\hat{A_1}C_1$$

$\Rightarrow Q$ sta sulla cfr per $A_1B_1C_1$

$$\boxed{B_1\hat{Q}B + Q\hat{C_1}B_1 = B\hat{C}Q}$$

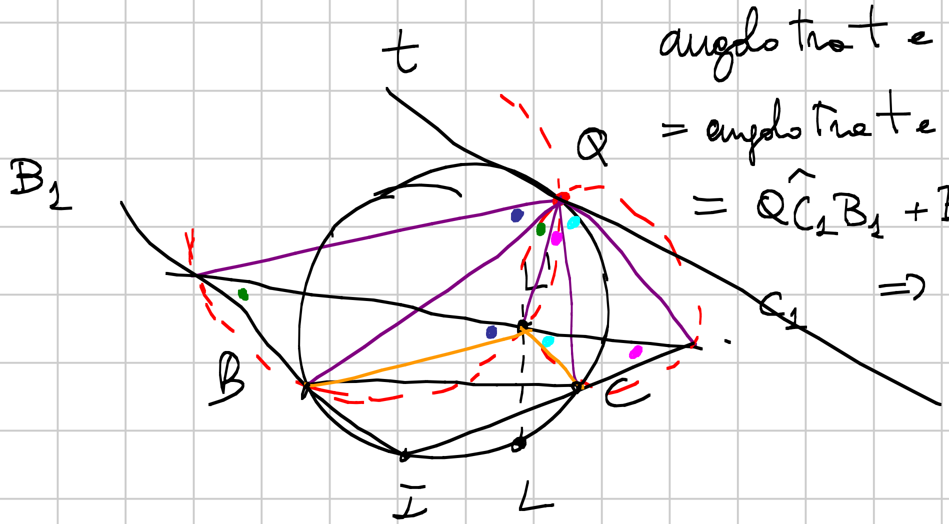
t tg alla cf per $A_1B_1C_1$ in Q

angolo tra t e QB =

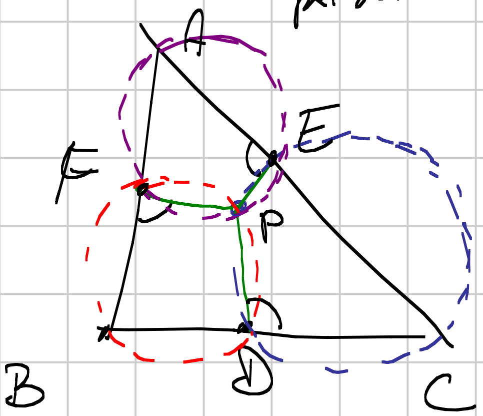
= angolo tra t e QB_1 + $B_1\hat{Q}B$ =

$= Q\hat{C_1}B_1 + B_1\hat{Q}B = Q\hat{C}B$

$\Rightarrow$ t è tangente a ω. $\square$

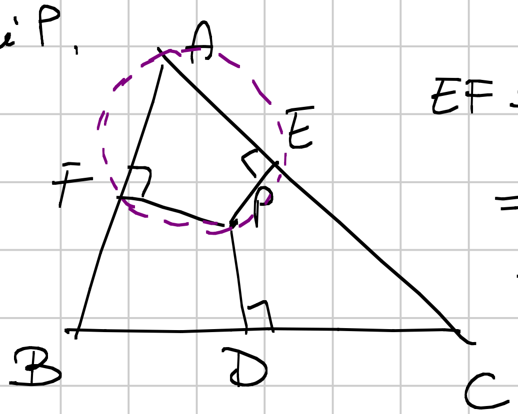


__Oss__: P punto di Miquel per DEF $\Rightarrow$ $P\hat{D}C \cong P\hat{E}A \cong P\hat{F}B$ (*)



Vale anche il contrario:
dato P, se costruisco D, E, F sui lati t.c. valga (*)
$\Rightarrow$ P è il punto di Miquel di DEF.

__Oss 2__: Se $P\hat{D}C = P\hat{E}A = P\hat{F}B = \frac{\pi}{2}$, DEF si dice triangolo pedale di P.



$EF = 2R_{AFPE} \cdot \sin F\hat{A}E =$

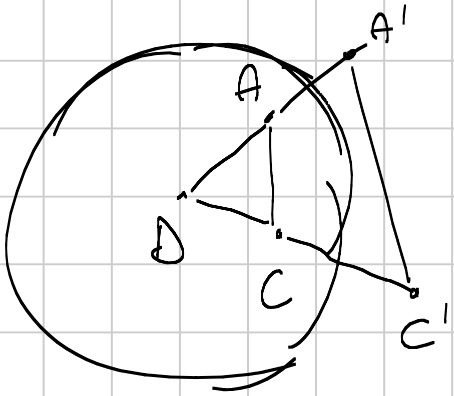
$= AP \cdot \sin\alpha = \frac{AP \cdot BC}{2R}$

$ED = \frac{CP \cdot AB}{2R}$

$DF = \frac{BP \cdot AC}{2R}$

__Teo di Tolomeo__: Un quadrilatero convesso $ABCD$ è ciclico se e solo se $AB \cdot CD + BC \cdot DA = AC \cdot BD$.

__Dim__: Invertiamo in D!!!



$DA \cdot DA' = R^2$

$DC \cdot DC' = R^2$

$DC \cdot DC' = DA \cdot DA'$

$\Updownarrow$

$\frac{DC}{DA} = \frac{DA'}{DC'} \iff \overset{\triangle}{DCA} \sim \overset{\triangle}{DA'C'}$

$\iff \frac{A'C'}{AC} = \frac{DC'}{DA}$

$$\boxed{A'C' = \frac{AC \cdot DC'}{DA} = R^2 \frac{AC}{DA \cdot DC}}$$

La circonferenza per DCA diventa la retta A'C'

e il punto B va nel punto B'.

ABCD ciclico $\iff$ B', A', C' allineati.

B e B' stanno tra le semirette DA e DC.

$\Rightarrow$ B', A', C' allineati $\iff A'B' + B'C' = A'C'$

$$\iff \cancel{R^2} \frac{AB}{DA \cdot DB} + \cancel{R^2} \frac{BC}{DB \cdot DC} = \cancel{R^2} \frac{AC}{DA \cdot DC}$$

$$\iff AB \cdot DC + BC \cdot DA = DB \cdot AC \qquad \square$$

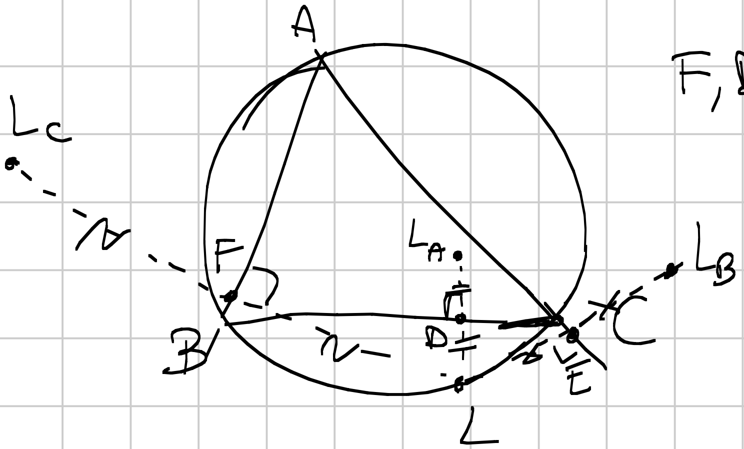
Teo: P punto, le proiez. di P sui lati (D, E, F) sono allineate se e solo se P sta sulla cfr. circoscritta ad ABC

Dim: wlog $DE + EF = DF \iff \frac{CP \cdot AB}{\cancel{2R}} + \frac{AP \cdot BC}{\cancel{2R}} = \frac{BP \cdot AC}{\cancel{2R}}$

$\iff CP \cdot AB + AP \cdot BC = BP \cdot AC \iff$ CPAB ciclico $\square$

(Retta di Simson)

Oss:



F, D, E allineati x il Teo di Simson.

$\Downarrow$

L_A, L_B, L_C allineati.

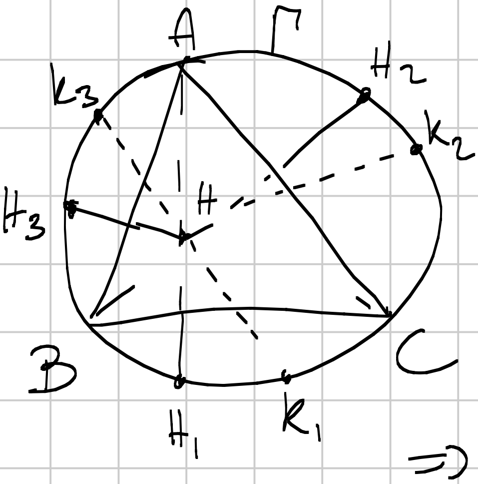
Se mettiamo l'origine nel circocentro e osserviamo

$$\ell_a = \overline{\left(\frac{l-b}{c-b}\right)}(c-b)+b = \frac{\frac{1}{l}-\frac{1}{b}}{\frac{1}{c}-\frac{1}{b}}(c-b)+b =$$

$$= \frac{l-b}{\cancel{c-b}}\cdot\frac{c\cancel{b}}{l\cancel{b}}\cancel{(c-b)}+b = c+b-\frac{bc}{l}$$

calcolando anche ℓ_b, ℓ_c si vede che $h=a+b+c$ sta sulla retta per ℓ_a, ℓ_b, ℓ_c.

Cor: la linea di Simson di L passa per il pt. medio tra L e H.



omot. di centro H e fattore $\frac{1}{2}$

$K_1, K_2, K_3 \longrightarrow$ pt. medi dei lati

$H_1, H_2, H_3 \longrightarrow$ piedi delle altezze

$A, B, C \longrightarrow$ pt. medi di AH, BH, CH.

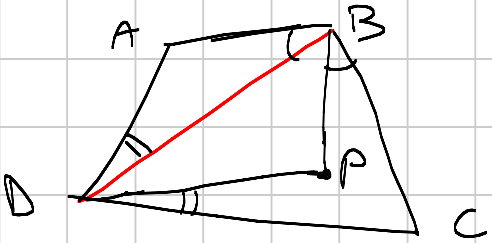
$\Rightarrow \Gamma \longrightarrow$ Feuerbach

IMO 2004 – B2

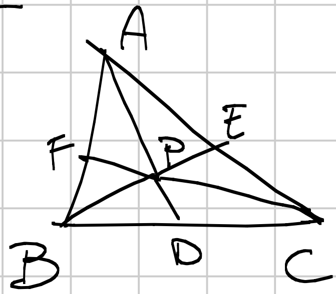
$ABCD$ quad. convesso

P t.c. $A\widehat{D}B = P\widehat{D}C$ e $A\widehat{B}D = P\widehat{B}C$

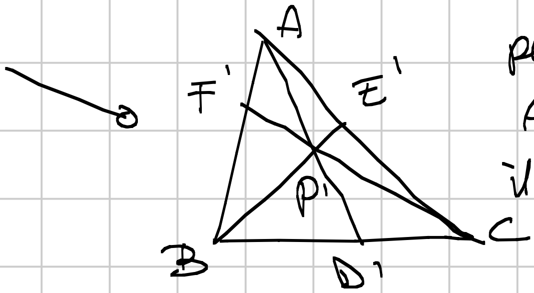
Dim che $ABCD$ è ciclico $\Longleftrightarrow AP = PC$



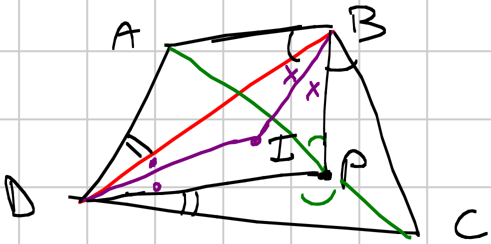
Dim: I punti A e C sono coniugati isogonali in $\overset{\triangle}{DPB}$



sia AD' simm. di AD risp. alla bisett. int. in A
sia BE' " " BD " " " " in B
sia CF' " " CF " " " " in C



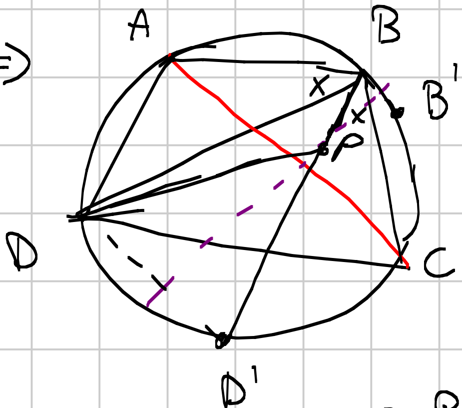
per Ceva Trigonometrico AD', BE', CF' concorrono. il punto P' di conc. si dice coniugato isogonale di P



$\widehat{ABI} = \widehat{IBC}$
$\widehat{ADI} = \widehat{IDC}$ $\Rightarrow$ AP e PC sono simm. risp. alla bisett. interna in P

$\Rightarrow \widehat{APB} = \pi - \widehat{DPC}$

ciclico $\Rightarrow$

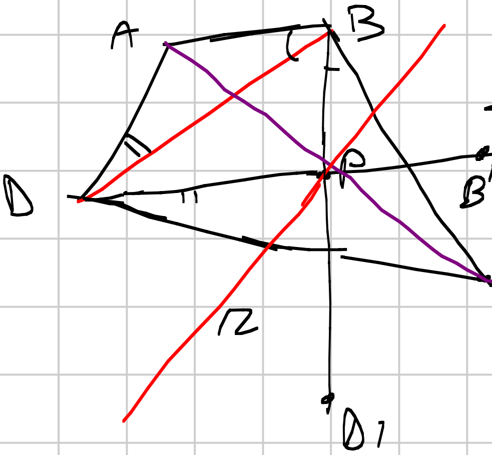


D', B' simm. risp. all'asse di AC di D, B. stanno sulla cfr.
inoltre $D\hat{B}A = P\hat{B}C \Rightarrow B, P, D'$ sono allineati
allo stesso modo D, P, B' allineati.

$\Rightarrow P = DB' \cap D'B$
ma la simm. risp. all'asse di AC scambia DB' e $D'B$ $\Rightarrow$ fissa P $\Rightarrow$ P sta sull'asse di AC $\Rightarrow AP = PC$.

AP=PC $\Rightarrow$ asse di AC passa per P e AP e CP sono simm. risp. a questo asse. Poiché A, C sono coniug. isogonali, PA, PC sono simm. risp. alla bisettrice

⇒ asse di AC è bisettrice esterna di $B\hat{P}D$



Se B' e D' sono simm. di B, D risp. a r allora D', B, P allineati

D, B', P allineati.

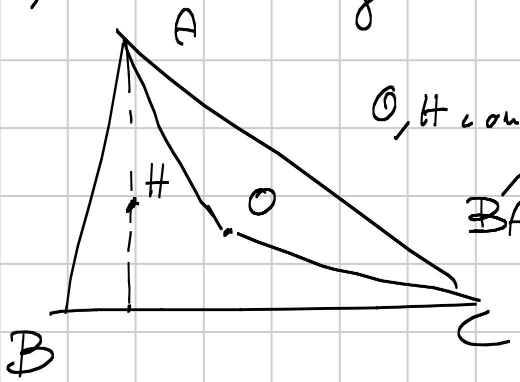
$$A\hat{B}P = A\hat{B}D' = C\hat{B}D = A\hat{B'}D'$$

⇒ A, B, D', B' ciclico.

$C\hat{B}D = A\hat{B}D' = C\hat{B'}D$ ⇒ CDB'D ciclico

inoltre D, D', B, B' conciclici ⇒ ABCD conciclici. □

<u>Oss</u>: O, H sono coniugati isogonali



O, H con. isog ⇔ $B\hat{A}H = O\hat{A}C$ e cicliche

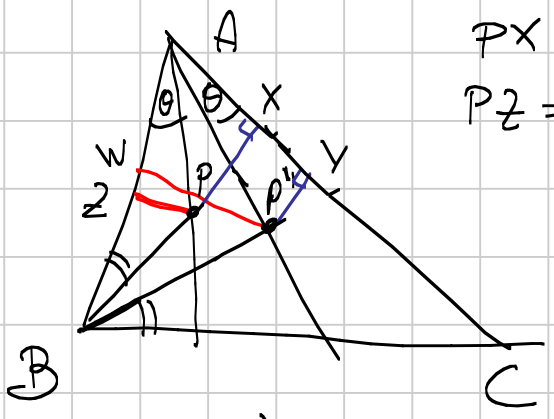
$$B\hat{A}H = \frac{\pi}{2} - \beta$$

$$O\hat{A}C = \frac{\pi - A\hat{O}C}{2} = \frac{\pi - 2\beta}{2} = \frac{\pi}{2} - \beta$$

⇒ <u>ok</u>.

<u>Teo</u>: Se P e P' sono coniugati isogonali, allora i loro triangoli pedali hanno la stessa circonferenza circoscritta, il cui centro è punto medio tra P e P'.

<u>Dim</u>:



$PX = AP \cdot \sin(\alpha - \theta)$ ($P\hat{A}X$)

$PZ = AP \cdot \sin\theta$ ($P\hat{A}Z$)

$P'Y = AP' \sin\theta$

$P'W = AP' \sin(\alpha - \theta)$

$AX = AP \cdot \cos(\alpha - \theta)$ $\quad AY = AP' \cos\theta$

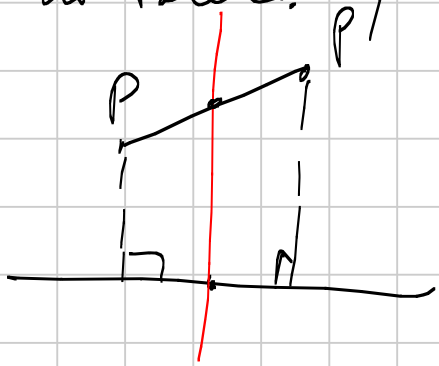
$AZ = AP \cos\theta$ $\quad AW = AP' \cos(\alpha - \theta)$

$$AX \cdot AY = AP \cdot AP' \cos(\alpha-\theta)\cos\theta = AZ \cdot AW$$

$\Rightarrow X, Y, Z, W$ sono conciclici.

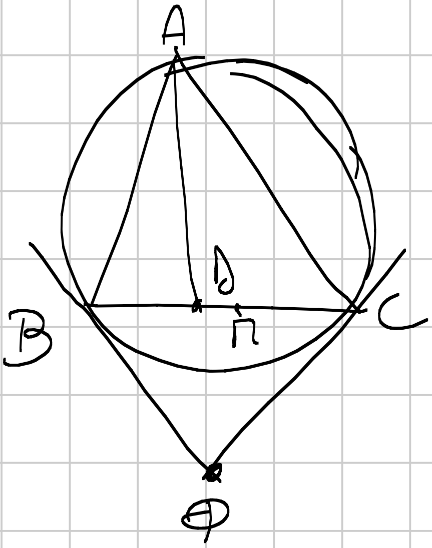
In questo modo ottengo 3 quadrilateri ciclici con circonferenze circoscritte che, se distinte, hanno i 3 lati AB, AC, BC come assi radicali. Assurdo $\Rightarrow$ le 3 cfr coincidono.

Il centro è il pt. medio di PP' per una banale applicazione del teo di Talete.



Coniugato isogonale del baricentro (punto di Lemoine)

Simm. di una mediana nella bisettrice = simmediana



PB, PC tangenti
AD simmediana $\Rightarrow A, D, P$ allineati.

Tesi $\Leftrightarrow AP$ è simmediana
$\Leftrightarrow AP$ è simm di AM
M pt medio di BC

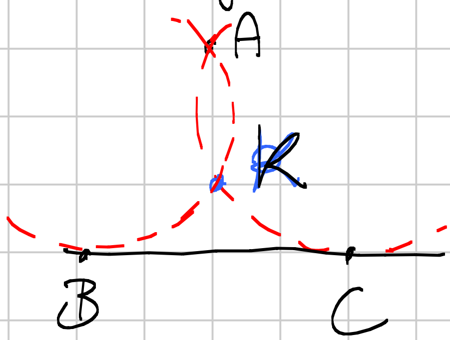
Inversione in A di raggio $\sqrt{AB \cdot AC}$
+
simmetria nella bisettrice di A

$B \to B'$ $\quad AB' = AC$
$C \to C'$ $\quad AC' = AB$

$B \to C$
$C \to B$

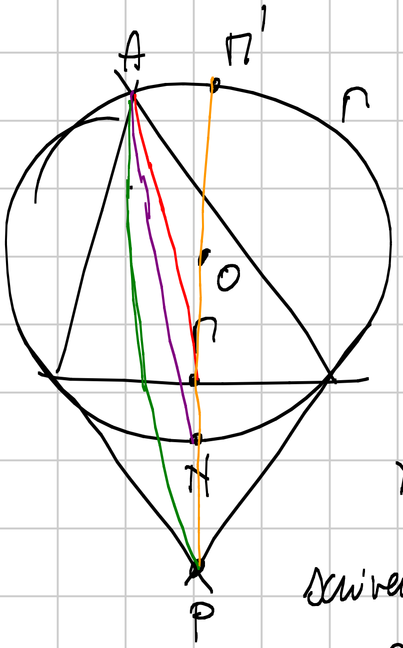
cfr. circo $\to$ retta BC
retta BC $\to$ cfr circo.

BP → circo per A, B tg. a BC P → K
CP → cerchio per A, C tg a BC



AK è asse radicale
BC è tg comune
⇒ AK passa per il pt medio di BC. fine □

Dim 2:



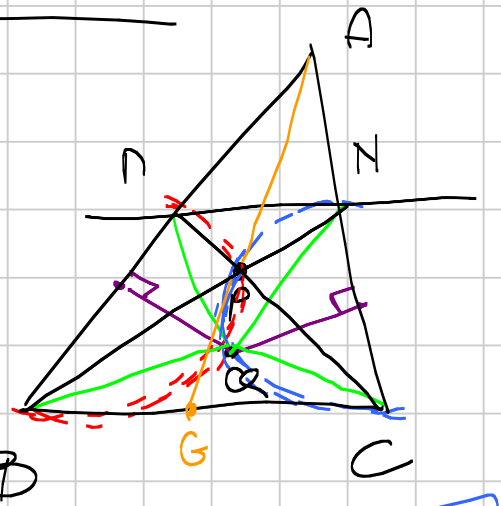
Γ $P \in pol_\Gamma(M)$
$\Downarrow$
$(M', N, M, P) = -1$

$(AM', AN, AM, AP) = -1$

$N\hat{A}M' = \frac{\pi}{2}$

scrivendo il birapporto con i seni si vede che $M\hat{A}N = N\hat{A}P$.

BMO 2009-2



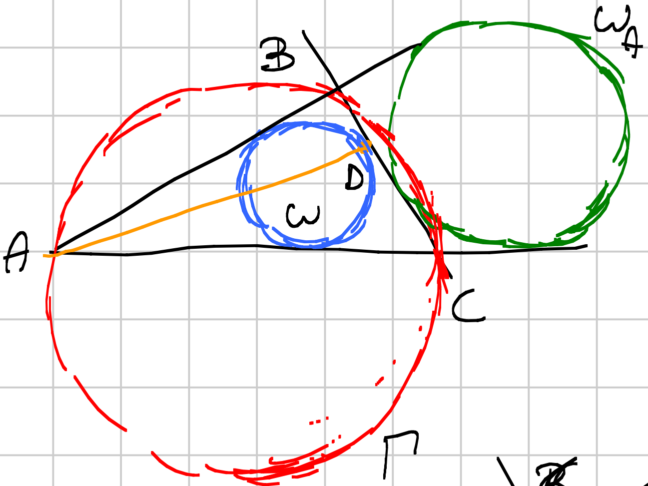
$MN \parallel BC$
$P = MC \cap NB$
circo a BPM e CPN si incontrano nuovamente in Q.
Dim che $B\hat{A}Q = C\hat{A}P$

x Ceva: $\frac{BG}{GC} \cdot \underbrace{\boxed{\frac{CN}{NA} \cdot \frac{AM}{MB}}}_{=1} = 1$ ⇒ G pt. medio.

Devo dim che AQ è simmediana.

conclusione x esercizio
(calcolo delle distanze di Q dai lati)

Coniugati isogonali di Nagel e Gergonne

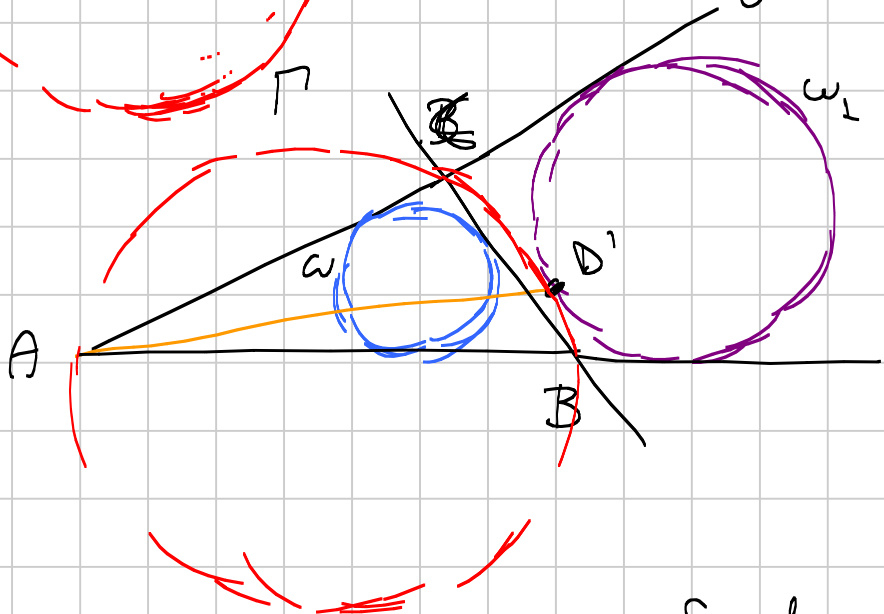


Inv. in A con raggio $\sqrt{AB \cdot AC}$
+
simm. nella bisett. di A.

$\Gamma \to BC \quad BC \to \Gamma$

$B \to C \quad C \to B$

$\omega \to \omega_1$ = tg a AB, AC, Γ esternamente



$D \to D'$

D' = centro di simil interno tra Γ e ω_1

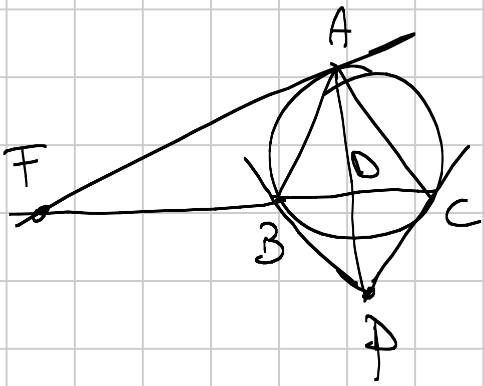
A = centro di simil esterno tra ω e ω_1

$\Rightarrow$ centro di simil interno tra ω e Γ sta su AD'!

$\Rightarrow AD'$ = simm di AD risp alla bisett. interna.
= retta da A al centro di simil. interno tra ω e Γ.

$\Rightarrow$ centro di simil interno tra ω e Γ è coniug. isog. di Gergonne
" " " esterno tra ω e Γ " " " " Nagel.

Fatto:

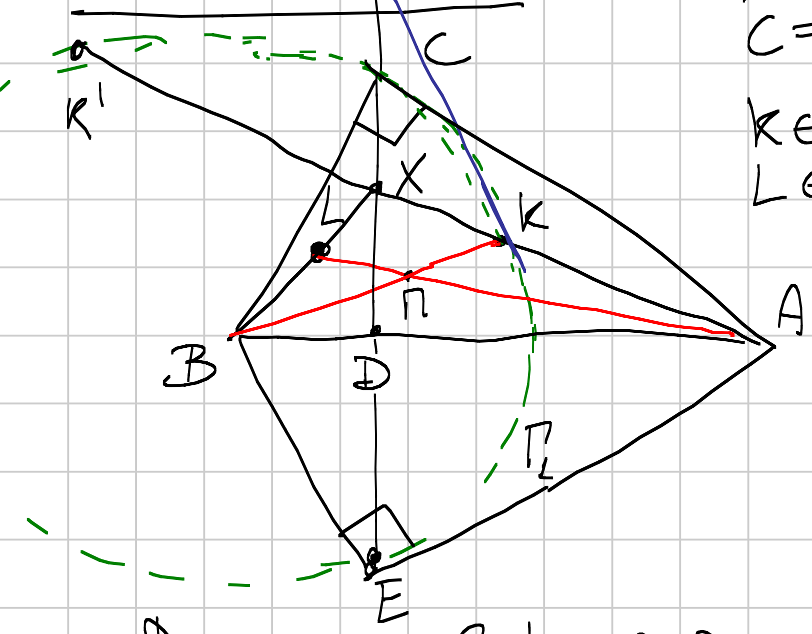


AD simmediana

$(B, C, D, F) = -1$.

Fatto ieri!

IMO 2012 - B2



$\hat{C} = \frac{\pi}{2}$

$K \in AX$ t.c. $BC = BK$

$L \in BX$ t.c. $AC = AL$

$M = BK \cap AL$

<u>Tesi</u>: $ML = MK$

<u>Dim</u>: Disegno Γ_1 di centro B per C, K. E l'altra intersez. di CD con Γ_1

$(A, X, K, K') = -1$ (Lemma della polare)

$(C, E, K, K')_\Gamma = -1$ $\quad (KC, KE, KK, KK') = -1$ intersechiamo con CE

$(C, E, S, X) = -1$

Se ora rifaccio tutto in Γ_2 centro A e raggio AC, con $T = CE \cap LL$

$(C, E, T, X) = -1$

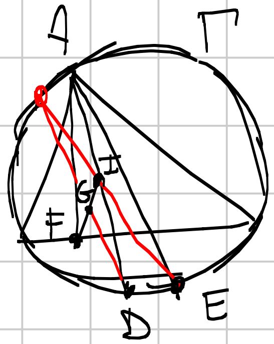
Ma, fissati 3 punti, ne esiste uno solo che realizza un dato birapporto $\Rightarrow S = T$.

Ma CD è asse radicale delle due cfr

$\Rightarrow SL = SK$

$\Rightarrow S\hat{L}M \cong S\hat{K}M \Rightarrow LM = KM.$

<u>ES per casa</u> (IMO 2010 - A2)



$F\hat{A}B = E\hat{A}C$

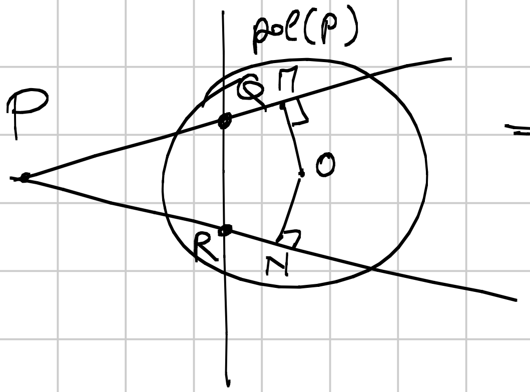
$GI = GF$

<u>Th</u>: $EI \cap DG \in \Gamma$

<u>Inizio</u>: Basta dim $A\hat{E}I = I\hat{D}G$ ....

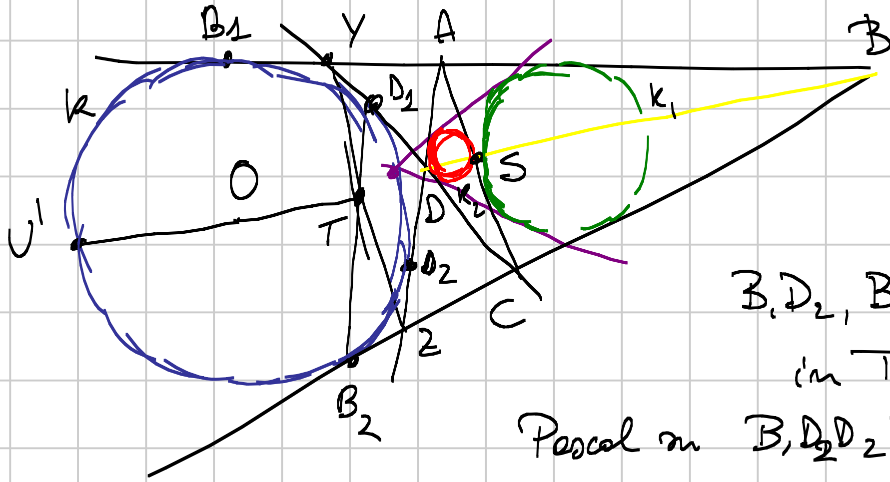
(usare I_a excentro opposto ad A).

Es:



$\Rightarrow$ RNMQ ciclico.

IMO 2008 - B3



Tg. esterne comuni a k_1, k_2 si incontrano su k.

centro di simil tra k_1, k_2

$S = AC \cap DB$

B_1D_2, B_2D_1, YZ, BD concorrono in T.

Pascal su $B_1D_2D_2B_2D_1D_1$

$\Rightarrow B_1D_2 \cap D_1B_2 \ (= T)$, D, $D_2B_2 \cap D_1B_1 \ (= X)$ sono all.

$\hookrightarrow T, D, X$ sono all

$B_1B_1D_2B_2B_2D_1$

$\hookrightarrow T, B, X$ sono all

$(ZB, ZS, ZA, ZY) = -1$ quad. completo $ABCD$

$(OB, OS, OA, OY) = -1$ $\quad \ell$ = retta per i centri O_1, O_2 di k_1, k_2

$OB \cap \ell = O_1$, $\quad S \in \ell$, $\quad OT \cap \ell = U$

$OD \cap \ell = O_2$

$\Rightarrow (O_1, O_2, S, U) = -1$

$\Rightarrow U$ centro est. di simil tra k_1, k_2

Si fanno conti con i birapporti fino a dim che se $OT \cap k = \{?, U'\}$ con U' + lontano da AC

$\Rightarrow (S, T, U, U') = -1$

$+$ $AC = pol(T) \Rightarrow U \in k$.