SENIOR 2014 — ADVANCED

Titolo nota 02/09/2014

ANALISI BASIC
- → Serie
- → Inf / Sup
- → Convessità
- → Molt. di Lagrange
- → Succ. per ricorrenza
- → Basi di Hamel

Basi di Hamel Insieme $\{r_i\}_{i\in I}$ di <u>numeri reali</u> con queste 2 proprietà

(i) $\forall r \in \mathbb{R}$ $\exists$ $q_1, \dots, q_n$ razionali $\exists$ $r_{i_1}, \dots, r_{i_n}$ nell'insieme tali che

$$r = \boxed{q_1 r_{i_1} + \dots + q_n r_{i_n}}$$

Ogni reale si scrive come somma di alcuni r_i molt. per coeff. raz.

(ii) se una somma è nulla, allora $q_1 = \dots = q_n = 0$.

CONSEGUENZA: Ogni $r \in \mathbb{R}$ è comb. lin. in modo unico a coeff. in $\mathbb{Q}$ degli r_i.

Fatto misterioso In $\mathbb{R}$ esistono basi di Hamel.

<u>Utilizzo olimpico</u>: costruzione di soluz. della Cauchy

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \qquad \forall x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R}$$

che non sono del tipo $f(x) = \lambda x$.

<u>Costruzione</u> Prendiamo una base di Hamel, scegliamo un elemento speciale $\hat{r}$ della base, e poi poniamo

$$f(\hat{r}) = 2\hat{r}$$

$$f(r_i) = 3r_i \quad \text{per ogni altro } r_i \text{ della base}$$

Su ogni altro reale la scrivo "per linearità"

$x = q_1 r_1 + \dots + q_n r_n$ e pongo $f(x) = q_1 f(r_1) + \dots + q_n f(r_n)$

Si verifica che risolve la Cauchy

— o — o —

$$f(x + f(y)) = y + f(x) \qquad x, y \in \mathbb{R}$$

$x = 0 \Rightarrow$ inj + surg.

y = p.to in cui si annulla $\Rightarrow f(x) = \hat{y} + f(x) \Rightarrow \hat{y} = 0$

$f(f(y)) = y$

$y = f(z) \qquad f(x+z) = f(x) + f(z)$ Cauchy

$\rightsquigarrow f(x) = \lambda x$

$\rightsquigarrow \lambda = \pm 1$ Ho finito su $\mathbb{Q}$ $\quad f(x) = x$ oppure $f(x) = -x$

Su $\mathbb{R}$? Esistono altre soluzioni

Prendo una base di Hamel $\{r_i\}_{i \in I}$ e poi per ogni i pongo $f(r_i) = \pm r_i$ scegliendo i segni come mi pare ed estendo per linearità.

— o — o —

$\boxed{\text{SERIE}}$ Serie = somme infinite $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$

$$S_n = a_0 + a_1 + \dots + a_n$$

e vedere che succede per $n \to +\infty$.

Esempi classici

→ Serie geometrica $\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r}$ se $-1 < r < 1$

ad esempio $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots = 2$ $\left(r = \frac{1}{2}\right)$

$$S_n = 1 + r + \dots + r^n = \frac{1 - r^{n+1}}{1-r} \qquad r^{n+1} \to 0$$

→ Serie telescopiche $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n}$

$$\frac{1}{n^2+n} = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

$$\text{Serie} = 1 - \cancel{\frac{1}{2}} + \cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}} + \cancel{\frac{1}{3}} - \cancel{\frac{1}{4}} + \cancel{\frac{1}{4}} - \frac{1}{5} \qquad = 1$$

Rigorosamente: $S_n = 1 - \frac{1}{n+1}$ (si dim. per induzione)

Altro esempio: tutti quelli che si scrivono come somma / diff. di reciproci di interi

→ Serie armoniche: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a}$

Classico: $a = 2$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge $\left(a\ \frac{\pi^2}{6}\right)$

$\boxed{\text{Dim 1}}$ $S_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$ ⤳ induzione

$\boxed{\text{Dim 2}}$ $\quad \frac{1}{n^2} \le \frac{1}{n^2-n} \qquad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2} \le \underbrace{\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-n}}$

↑ telescopica e convergente

Con $a=1$: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$

$\boxed{\text{Dim}}$ $\quad 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\dots$

$$\ge 1+\frac{1}{2}+\underbrace{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}_{\frac{1}{2}}+\underbrace{\frac{1}{8}+\dots+\frac{1}{8}}_{\frac{1}{2}}+\underbrace{\frac{1}{16}}_{\frac{1}{2}}$$

In generale : $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a} = \begin{cases} \nearrow +\infty & \text{se } a \le 1 \\ \searrow \text{converge} & \text{se } a > 1 \end{cases}$

← segue da $a=1$

↑ per $a \ge 2$ segue da $= 2$

$\boxed{\text{Dim.}}$ $\quad 1+\frac{1}{2^a}+\frac{1}{3^a}+\frac{1}{4^a}+\dots+\frac{1}{7^a}+\frac{1}{8^a}+\frac{1}{9^a}+\dots$

$$\le \underbrace{1}_{1}+\underbrace{\frac{1}{2^a}+\frac{1}{2^a}}_{\frac{2}{2^a}}+\underbrace{\frac{1}{4^a}+\dots+\frac{1}{4^a}}_{\frac{4}{4^a}}+\underbrace{\frac{1}{8^a}+\frac{1}{8^a}+\dots}_{\frac{8}{8^a}}$$

$$1+\frac{1}{2^{a-1}}+\frac{1}{4^{a-1}}+\frac{1}{8^{a-1}}+\dots = 1+\frac{1}{2^{a-1}}+\left(\frac{1}{2^{a-1}}\right)^2+\left(\frac{1}{2^{a-1}}\right)^3+\dots$$

Questa è una geometrica di ragione $r = \frac{1}{2^{a-1}}$ e questa è <1 se e solo se $a > 1$.

$\boxed{\text{Fatto generale}}$ (Criterio di condensazione di Cauchy)

Siano $a_n > 0$ e decrescenti ($a_{n+1} \le a_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$)

Allora

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty \iff \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \cdot a_{2^n} < +\infty$$

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + \dots$$
$$\geq a_1 + a_2 + a_4 + a_4 + a_8 + \dots + a_8 + \dots$$

Se voglio $\leq$, trucco dall'altra parte

Applicando il criterio all'armonica ottengo la geometrica

— o — o —

$\boxed{\text{Dim. 2}}$ Spero $S_n \leq A - \dfrac{B}{n^{a-1}}$

$A = B+1$ così va bene per $n=1$

Passo induttivo: $\cancel{A} - \dfrac{B}{n^{a-1}} + \dfrac{1}{(n+1)^a} \overset{?}{\leq} \cancel{A} - \dfrac{B}{(n+1)^{a-1}}$

$$-\frac{(n+1)^{a-1}}{n^{a-1}} + \frac{1}{B(n+1)} \overset{?}{\leq} -1$$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{a-1} \overset{?}{\geq} 1 + \frac{1}{B}\frac{1}{(n+1)}$$

$\boxed{(1+x)^\alpha \geq 1 + \alpha x}$ specie di Bernoulli, solo con α reale >0

Se fosse vera, allora $x = \frac{1}{n}$, $\alpha = a-1$ ...

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{a-1} \geq 1 + \frac{a-1}{n} \geq 1 + \frac{a-1}{n+1}$$

$(1+x)^\alpha \geq 1+\alpha x$ NON può essere vera per $\alpha \in (0,1)$

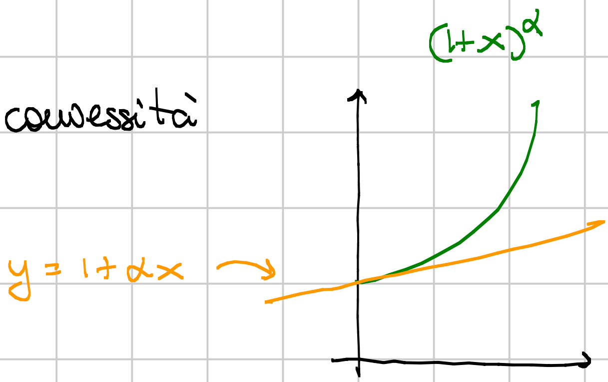
Ad esempio, per $\alpha = \frac{1}{2}$ il LHS cresce come $\sqrt{x}$, il RHS come x

$\boxed{\text{Fatto}}$ $(1+x)^\alpha \geq 1+\alpha x$ vera $\forall x \geq 0$ $\forall \alpha \geq 1$

Ma non è vera per $\alpha \in (0,1)$

① Perché è vera per $\alpha \geq 1$? Disug. di convessità

FUNZIONE STA SOPRA TANGENTE

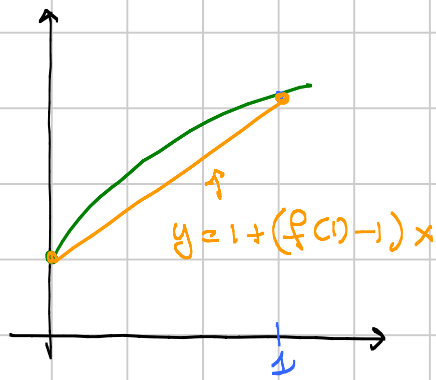


② Come ce la caviamo per $\alpha \in (0,1)$?

Mi serve qualcosa del tipo

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\alpha} \geq 1+\beta\frac{1}{n}$$

Mi serve $\qquad (1+x)^{\alpha} \geq 1+\beta x \qquad \forall x \in [0,1]$

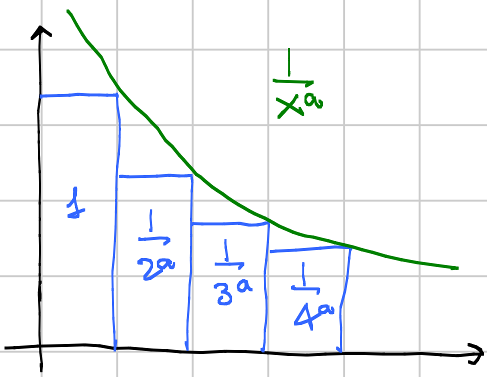


Quindi va bene

$$(1+x)^{\alpha} \geq 1+(2^{\alpha}-1)x$$

— o — o —

Confronto serie - integrali



$$S_n = 1+\frac{1}{2^a}+\dots+\frac{1}{n^a} \leq 1+\int_1^n \frac{1}{x^a}\,dx$$

$$= 1+\frac{1}{-a+1}\left(\frac{1}{n^{a-1}}-1\right)$$

$$= \text{cost.} - \frac{1}{1-a}\,\frac{1}{n^{a-1}}$$

MAX e MIN VINCOLATI

$$\max / \min \{ f(x) : x \in V \}$$

dove $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$V \subseteq \mathbb{R}^n$

<u>Esempio</u>

$$\min \{ \underbrace{x^2 + 4y^2 + 5xy + 7z^3}_{f(x,y,z)} : \underbrace{xyz \geq 1 \quad x>0, y>0, z>}_{\text{Descrivono insieme } V} \}$$

Molt. di Lagrange $\iff$ V è luogo di zeri di una funzione Φ

cioè

$$V = \{ x \in \mathbb{R}^n : \underbrace{\Phi(x) = 0}_{} \}$$

↑ equazione di V

$\boxed{\text{Teorema misterioso}}$ Supponiamo che

- f sia derivabile con derivate continue
- Φ " " " " "
- x_0 p.to di max / min per $f(x)$ su V.

Allora $\exists\, \lambda \in \mathbb{R}$ t.c.

$$\nabla f(x_0) = \lambda \nabla \Phi(x_0)$$

<u>Esempio 1</u>

$$\max \{ \underbrace{x + 3y}_{f(x,y)} : x^2 + 2y^2 = 5 \} \qquad \Phi(x,y) = x^2 + 2y^2 - 5$$

BRUTAL MODE ON

$$\begin{cases} f_x = \lambda \Phi_x \\ f_y = \lambda \Phi_y \\ \Phi = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 1 = \lambda \cdot 2x \\ 3 = \lambda \cdot 4y \\ x^2 + 2y^2 = 5 \end{cases} \qquad \begin{array}{l} \lambda = \frac{1}{2x} \\ \lambda = \frac{3}{4y} \\ x^2 + 2y^2 = 5 \end{array}$$

$$\frac{1}{2x} = \frac{3}{4y} \qquad 4y = 6x \qquad y = \frac{3}{2}x \qquad x^2 + \frac{9}{2}x^2 = 5$$

Le due soluzioni corrispondono ai p.ti di max / min.

BRUTAL MODE OFF

$$\max \{ x+3y \ : \ x^2+2y^2 = 5 \}$$

$$\frac{2y+3x}{2} \leq \sqrt{\frac{4y^2+9x^2}{2}}$$

$$\alpha(2y) + (1-\alpha)3x \leq \sqrt{\alpha\, 4y^2 + (1-\alpha)\, 9x^2}$$

$$4\alpha = 2(1-\alpha)9 \qquad 4\alpha = 18 - 18\alpha$$

$$22\alpha = 18$$

$$\alpha = \frac{9}{11}$$

$$\frac{18}{11}y + \frac{6}{11}x \leq \sqrt{\frac{36}{11}y^2 + \frac{18}{11}x^2}$$

$$\frac{6}{11}(x+3y) \leq \frac{\sqrt{18}}{\sqrt{11}}\sqrt{x^2+2y^2}$$

<u>Esempio 2</u> $\max \{ \underbrace{x^2 y}_{f(x,y)} \ : \ x^2+2y^2 = 5 \}$

$\phi(x,y) = x^2 - 2y^2 - 5$

$f_x = \lambda \phi_x$

$f_y = \lambda \phi_y$

$\phi = 0$

$$\begin{cases} 2xy = \lambda \cdot 2x & (\cdot 2y) \\ x^2 = \lambda \cdot 4y & (\cdot x) \\ x^2+2y^2 = 5 \end{cases} \rightarrow 4xy^2 - x^3 = 0$$

$\swarrow$ $x = 0 \rightarrow$ trovo y

$\searrow$ $x^2 = 4y^2 \rightarrow$ FINE

Esempio 3 $\qquad x^2+4y^2+5xy+7z^3 \qquad xyz-1=0$

$f_x = \lambda \phi_x \qquad 2x+5y = \lambda yz \quad (\cdot x)$

$f_y = \lambda \phi_y \qquad 8y+5x = \lambda xz \quad (\cdot y) \quad 2x^2 = 8y^2$

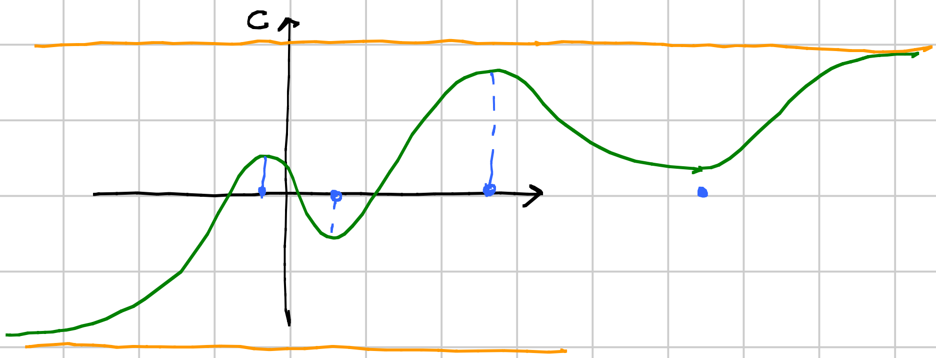
$f_z = \lambda \phi_z \qquad 21z^2 = \lambda xy \quad (\cdot z) \rightarrow 21z^3 = 2x^2+5xy$

$\phi = 0 \qquad xyz = 1$

si sostituisce tutto in funzione di x o y

Problemi connessi all'utilizzo del metodo

1. Ridursi ad un insieme V con un'equazione
2. Sperare che le derivate esistano
3. BISOGNA SAPERE A PRIORI CHE MAX/MIN ESISTE, altrimenti i p.ti prodotti dal sistema potrebbero essere altro



Trovare la più piccola costante c t.c.

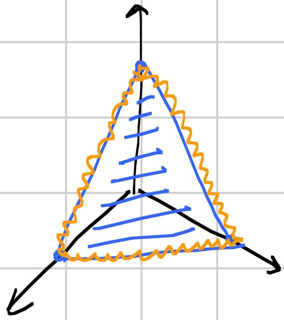
$f(x) \le c \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Weierstrass $\quad$ Se V è limitato (contenuto in cerchio o sfera di raggio opportuno) e chiuso (se un p.to non appartiene, allora tutto un suo intorno non interseca) e f è continua, allora max/min esistono

? $\quad xy + yz + zx = 1$ è limitato

$x \ge 0, \; y \ge 0, \; z \ge 0 \qquad x=0 \rightsquigarrow yz = 1 \rightsquigarrow z$ enorme

$$\begin{cases} x+y+z=5 \\ x\geq 0,\ y\geq 0,\ z\geq 0 \end{cases}$$



Max $\{ x^2 y^3 z$: insieme $\nearrow \}$

→ Max e min esistono (W)

→ Risolvo il sistema e butto le soluz. non ≥ 0

→ Devo considerare a parte il bordo

Se le equazioni sono 2 (o più) $\quad \phi=0 \quad \psi=0$

$$\nabla f = \lambda \nabla \phi + \mu \nabla \psi$$

$$\begin{cases} f_x = \lambda \phi_x + \mu \psi_x \\ f_y = \lambda \phi_y + \mu \psi_y \\ f_z = \lambda \phi_z + \mu \psi_z \\ \phi = 0 \\ \psi = 0 \end{cases}$$

KARAMATA

$$f(x_1)+\dots+f(x_n) \geq f(y_1)+\dots+f(y_n)$$

Vera se $f(x)$ convessa e $\{x_i\} \succ \{y_i\}$ nel senso del bunching

cioè posto che
$$x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_n$$
$$y_1 \geq y_2 \geq \dots \geq y_n$$

si ha che

$x_1 \geq y_1$

$x_1+x_2 \geq y_1+y_2$

$x_1+\dots+x_i \geq y_1+\dots+y_i$ per ogni $i=1,\dots,n-1$

$x_1+\dots+x_n = y_1+\dots+y_n$

se qui è solo $\geq$ bisogna aggiungere f crescente oltre che convessa.

KARAMATA $\Rightarrow$ JENSEN : basta prendere $y_1=\dots=y_n=\dfrac{x_1+\dots+x_n}{n}$

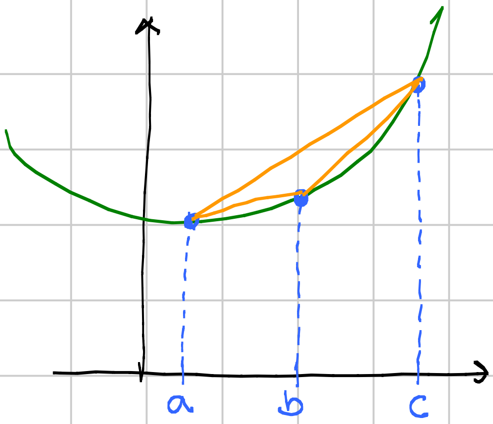
a pesi costanti

e si ottiene

$$f(x_1)+\dots+f(x_n) \geq n\, f\left(\frac{x_1+\dots+x_n}{n}\right)$$

— o — o —

<u>Lemma</u> (dei 3 rapp. increm.) Se f è convessa



$$R(a,b) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = R(b,a)$$

$$\boxed{R(a,b) \leq R(a,c) \leq R(b,c)}$$

$R(x,y)$ è separatamente debolmente crescente nelle 2 variabili

$\boxed{\text{Dim. KARAMATA}}$

$$R_i = R(x_i, y_i) = \frac{f(x_i) - f(y_i)}{x_i - y_i}$$

$X_i = x_1 + \dots + x_i \qquad Y_i = y_1 + \dots + y_i \qquad X_0 = Y_0 = 0$

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i) - f(y_i) = \sum_{i=1}^{n} R_i (x_i - y_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} R_i (X_i - X_{i-1} - Y_i + Y_{i-1})$$

$$= \sum_{i=1}^{n} R_i (X_i - Y_i) + \sum_{i=1}^{n} R_i (Y_{i-1} - X_{i-1})$$

$$= \sum_{i=1}^{n} R_i (X_i - Y_i) + \sum_{i=0}^{n-1} R_{i+1} (Y_i - X_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{n-1} \underbrace{(R_{i+1} - R_i)}_{\text{Spero } \leq 0} \underbrace{(Y_i - X_i)}_{\leq 0} + \underbrace{R_n (X_n - Y_n)}_{\overset{\shortparallel}{0}} + \underbrace{R_1 (Y_0 - X_0)}_{\overset{\shortparallel}{0}}$$

oppure $\geq 0 \cdot \geq 0$ se f è crescente e $X_n \geq Y_n$

Sarebbe tutto ok se $\quad R_i \geq R_{i+1}$

$$R_i = R(x_i, y_i) \geq R(x_{i+1}, y_i) \geq R(x_{i+1}, y_{i+1}) = R_{i+1} .$$

$\square$

Esempio 1 $\quad \sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma \quad$ ristretta ai triangoli acutangoli

$\{\alpha, \beta, \gamma\} \prec \{\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, 0\} \quad$ $\sin x$ è concava, quindi karamata al contrario

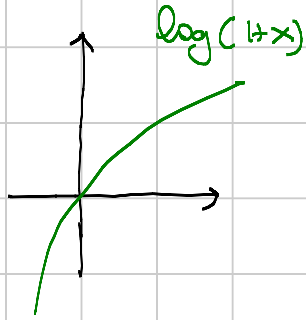
$$\frac{3\sqrt{3}}{2} \underset{\text{jensen}}{>} \sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma \underset{\text{karamata}}{>} 2$$

Esempio 2

$$(1+a_1)(1+a_2)\cdot\ldots\cdot(1+a_n) \le \left(1+\frac{a_1^2}{a_2}\right)\cdot\left(1+\frac{a_2^2}{a_3}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{a_n^2}{a_1}\right)$$

Mi riduco a

$$\sum \log(1+a_i) \le \sum \log\left(1+\frac{a_i^2}{a_{i+1}}\right)$$



$f(x) = \log(1+x) \rightsquigarrow$ concava

quindi spero che

$$\{a_i\} \succ \left\{\frac{a_i^2}{a_{i+1}}\right\}$$

Controllo l'ultima $\quad a_1 + \ldots + a_n \le \frac{a_1^2}{a_2} + \frac{a_2^2}{a_3} + \ldots + \frac{a_n^2}{a_1}$

$a_1^2, \ldots, a_n^2 \qquad \frac{1}{a_1}, \ldots, \frac{1}{a_n} \qquad$ ordinati al contrario

Controllo la prima: $\quad \frac{a_i^2}{a_{i+1}} \ge \frac{a_M^2}{a_{M+1}} \ge a_M$

quello che massimizza $\qquad a_M$ è il + grande a_i

Controllo la seconda:

$$\frac{a_i^2}{a_{i+1}} + \frac{a_j^2}{a_{j+1}} \ge \frac{a_M^2}{a_{M+1}} + \frac{a_s^2}{a_{s+1}} \ge a_M + a_s$$

$1^a \qquad 2^a \qquad$ vera per def. $\qquad$ crea problemi se $a_{s+1} = a_M$

$$\frac{a_M^2}{a_{M+1}} + \frac{a_s^2}{a_M} \ge \frac{a_M^2}{a_s} + \frac{a_s^2}{a_M} \ge a_M + a_s$$

Procedendo si ottiene $\{a_i\} < \left\{\frac{a_i^2}{a_{i+1}}\right\}$

Alternativa: scrivere $a_i = e^{x_i}$ $\frac{a_i^2}{a_{i+1}} = e^{2x_i - x_{i+1}}$

$\{x_i\} < \{2x_i - x_{i+1}\}$

funzione $\log(1+a_i) = \log(1+e^x) = f(x)$

$f'(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$ $f''(x) = \frac{e^x(1+e^x) - e^x \cdot e^x}{(\ )^2} = \frac{e^x}{(\ )^2} \geq 0$

$x_M < \underbrace{2x_i - x_{i+1}}_{\text{massimizza RHS}}$ $2x_i - x_{i+1} \geq 2x_M - x_{M+1} \geq x_M$

$\boxed{\text{OK}}$