Stage Senior 2014 – Livello Advanced

Stampato integrale delle lezioni

Autori vari

Indice

P - ADVANCED

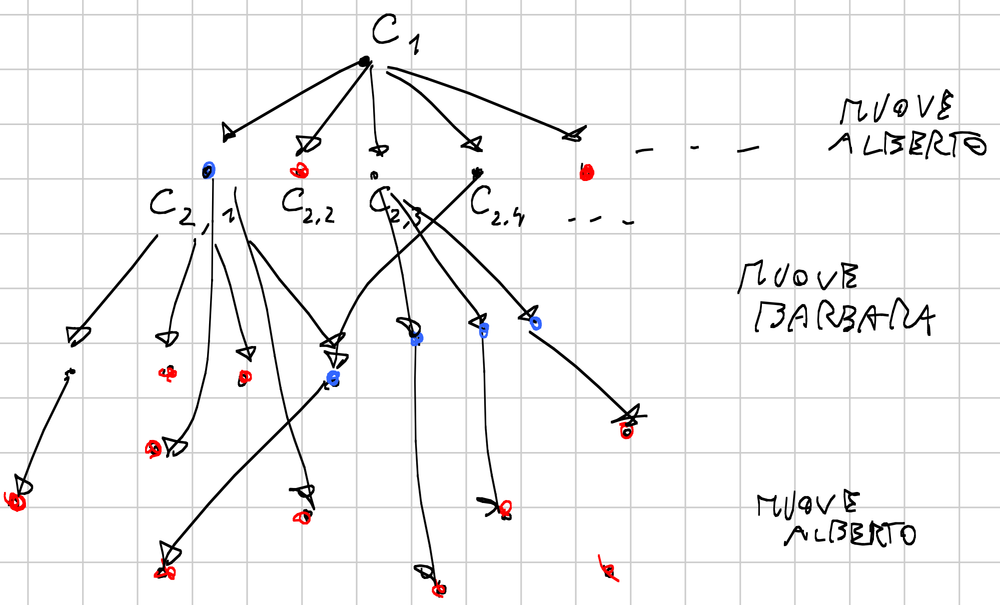
Titolo nota 01/09/2014

INDUZIONE

① ALBERTO E BARBARA GIOCANO A UN GIOCO
- MOSSE ALTERNE
- CHI NON PUÒ MUOVERE PERDE
- INIZIA ALBERTO
- NON SI PUÒ PAREGGIARE
- $\exists\, n \in \mathbb{N}$ T.C. IL GIOCO TERMINA ENTRO n MOSSE

TESI: UNO DEI DUE GIOCATORI HA UNA STRATEGIA VINCENTE.

IDEA DISEGNO IL GRAFO ORIENTATO DELLE CONFIGURAZIONI RAGGIUNGIBILI



NON CI SONO CICLI ORIENTATI (SENNÒ IL GIOCO PUÒ DURARE IN ETERNO)

PARTO DA UN GIOCO G E GLI ASSOCIO IL PIÙ PICCOLO n TALE CHE VALGA LA CONDIZIONE SUL

N° DI MOSSE $F(G) = \min n$ t.c. . . .
IND. SU $F(G)$

<u>P.B.</u> $F(G) = 0$. ALBERTO PERDE

<u>P.I.</u> $F(G) > 0$ ALBERTO PUÒ SCEGLIERE
ALLA PRIMA MOSSA TRA VARIE CONFIGURAZIONI (O GIOCHI)

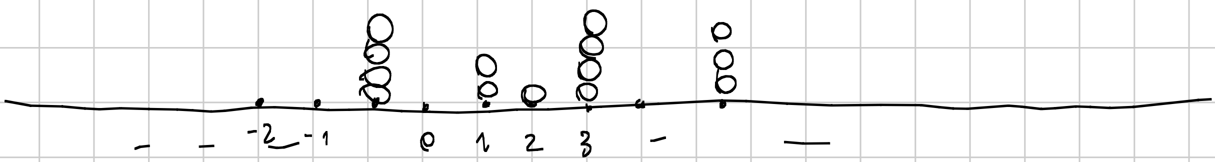
$G_1, G_2, \ldots G_k, \ldots$

$F(G_i) \leq F(G) - 1$ ALTRIMENTI $F(G_i) \geq F(G)$
ALLORA ESISTE SEQUENZA DI ALMENO $F(G)$ MOSSE A PARTIRE DA G_i, QUINDI A PARTIRE DA G SI POSSONO FARE ALMENO $F(G)+1$ MOSSE IN SEQUENZA.

- SE $\exists\, G_i$ IN CUI IL 2° GIOCATORE HA STRATEGIA VINCENTE, ALBERTO HA UNA STRATEGIA VINCENTE IN G
- SE $\forall\, G_i$ IL 1° GIOCATORE HA UNA STRAT. VINCENTE, ALLORA IN G VINCE BARBARA.

---

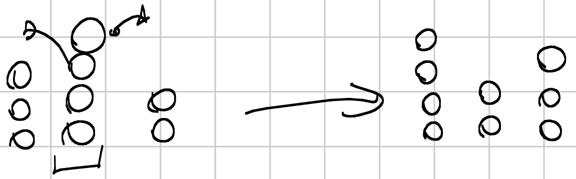
② PILE DI MONETE SUI NUMERI INTERI



- CI SONO FINITE MONETE

UNA MOSSA CONSISTE NEL PRENDERE UNA PILA

CON ALMENO 2 MONETE E SPOSTARNE UNA A DX E UNA A SX



- DIM. CHE DOPO UN CERTO N° DI MOSSE SI OTTENGONO TANTE PILE DA 1
- DIM. CHE LA CONF. FINALE, E IL NUMERO DI MOSSE PER RAGGIUNGERLA, NON DIPENDONO DALLE MOSSE SCELTE

<u>INVARIANTI</u>

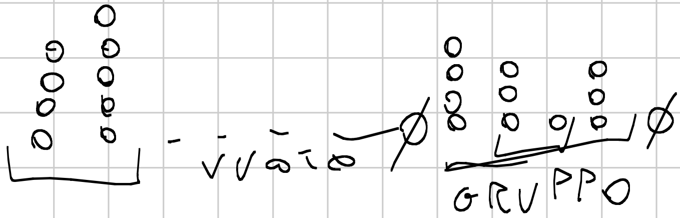
1) $$\sum_{n\in\mathbb{Z}} n\cdot\left(\#\text{ di monete sopra } n\right) = \sum_{\text{monete}} \text{posizione della moneta}$$

NON CAMBIA

2) $$\sum_{m \text{ moneta}} (\text{pos. di } m)^2 \quad \text{aumenta sempre di } 2$$

$$n^2+n^2 \rightsquigarrow (n-1)^2+(n+1)^2$$

COSA È UN GRUPPO



UN GRUPPO È L'INSIEME DELLE MONETE CONTENUTE IN UNA SEQUENZA MASSIMALE DI PILE SENZA DUE PILE VUOTE CONSECUTIVE

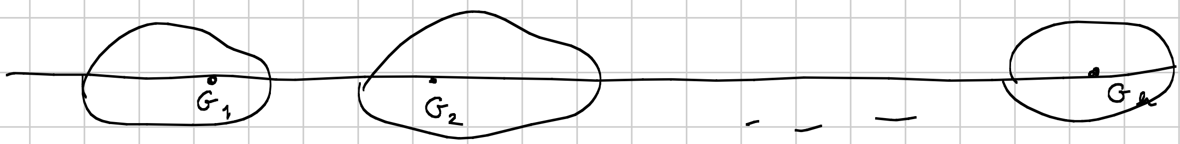
- DUE GRUPPI POSSONO SALDARSI

- UNA MOSSA PUÒ CREARE AL PIÙ UNA PILA VUOTA
  UN GRUPPO NON SI PUÒ SFALDARE

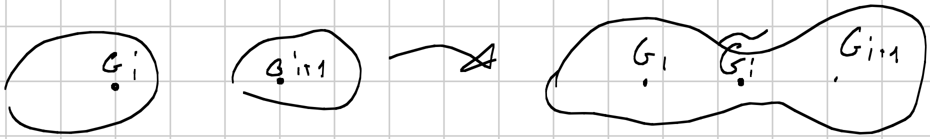
- IL NUMERO TOTALE DI GRUPPI DECRESCE DEBOLMENTE

(CI SONO k MONETE)

SE C'È UNA MONETA $> k+100$ E UNA $< k+100$ IN MEZZO CI SONO 2 PILE VUOTE CONSECUTIVE



$G_1, \dots G_h$ SONO I BARICENTRI



- WOW! ABBIAMO DIM. IL 1° PUNTO

- $\forall$ CONFIG. DI MONETE $\exists\, n \in \mathbb{N}$ t.c. NON SI POSSONO FARE PIÙ DI n MOSSE

$F(C) = \min n$ t.c. NON SI POSSONO FARE PIÙ DI n MOSSE

RESTA DA DIM. CHE LA CONF. FINALE È UNICA
(POI IL N° DI MOSSE SI CALCOLA COL 2° "INVARIANTE")

<u>INDUZIONE SU $F(C)$</u>

<u>P.B.</u> $F(C) = 0$ OK

<u>P.I.</u> $F(C) > 0$. CONFRONTIAMO 2 SEQUENZE DI MOSSE

$C = C_0, C_1, C_2, \dots, C_m$

$C = C'_0, C'_1, \dots, C'_n$

$n, m \geq 1$ TUTTI E DUE

<u>1° CASO</u> $C_1 = C'_1$ $\quad F(C_1) = F(C'_1) < F(C)$

PER IP. IND. $C_m = C'_n$ E $m = n$

<u>2° CASO</u> $C_1 \neq C'_1$

IN C ESISTONO ALMENO 2 PILE ≥ 2, QUINDI $m, n \geq 2$

$$\begin{tikzcd}
 & C_1 \arrow[r] \arrow[dr, "\text{muove su } b"] & C_2 \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & C_m \arrow[d, equal] \\
C_0 \arrow[ur, "\text{muove sulla pila } a"] \arrow[dr, "\text{muove sulla pila } b"'] & & C''_2 \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & C''_r \arrow[d, equal] \\
 & C'_1 \arrow[ur, "\text{muove su } a"'] \arrow[r] & \cdots \arrow[rr] & & C'_n
\end{tikzcd}$$

PIGEONHOLE INFINITO

- SE HO INFINITI OGGETTI E FINITI CASSETTI, C'È UN CASSETTO CON INFINITI OGGETTI

③ EGMO 2012 / 6

C'È UN SOCIAL NETWORK CON INFINITE PERSONE ISCRITTE. OGNUNO HA FINITI AMICI, L'AMICIZIA È RECIPROCA, OGNUNO HA ALMENO UN AMICO. OGNUNO SCEGLIE TRA I PROPRI AMICI IL MIGLIORE AMICO, LA "MIGLIORE AMICIZIA" NON È NECESSARIAMENTE SIMMETRICA.

UNA PERSONA P È 1-FAMOSA SE È IL MIGLIORE AMICO DI QUALCUNO, È 2-FAMOSA S // // // DI UNA PERSONA 1-FAMOSA, ...
È $(n+1)$-FAMOSA SE È IL MIGLIORE AMICO DI UN (n)-FAMOSO

UNA PERSONA È CELEBRE SE È n-FAMOSA PER INFINITI n NATURALI.

TESI: OGNI PERSONA CELEBRE È IL MIGLIOR AMICO DI ALMENO UNA PERSONA CELEBRE

GRAFO (V,E) INFINITO, OGNI VERTICE HA GRADO FINITO

$F : V \to V$ $\quad F(v) =$ il miglior amico di v

$\{F(v), v\} \in E \quad \forall v \in V$

v è un 1-FAMOSO $\quad v \in \operatorname{Im} F$

v è 2-FAMOSO $\quad v \in F(\operatorname{Im} F) = \operatorname{Im}(F^2)$

$\vdots$

v è n-FAMOSO $\quad v \in \operatorname{Im}(F^n)$

V CELEBRE. $v_1, \ldots, v_k$ SONO GLI AMICI DI V, MA NON TUTTI, QUELLI CHE HANNO SCELTO V COME MIGLIOR AMICO $\{v_1, \ldots, v_k\} = F^{-1}(\{v\})$

$\forall n \ \exists \ w_1^n, \ldots, \ldots w_n^n$ CON $F(w_i^n) = (w_{i+1}^n)$ $1 \le i \le n-1$

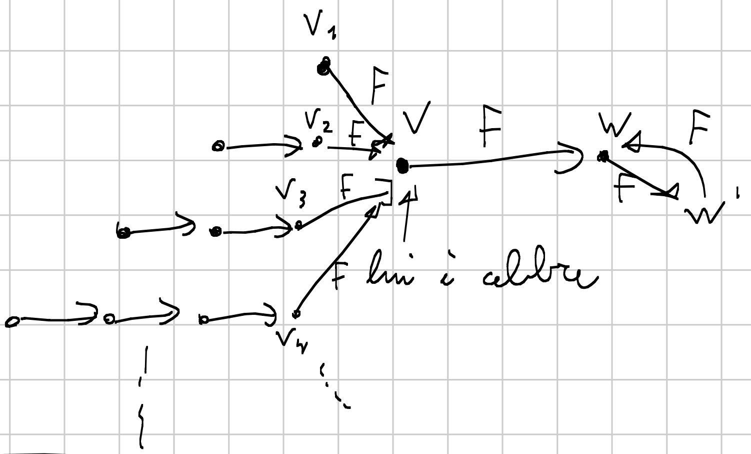
$w_n^n = v$

$$w_1^n \xrightarrow{F} w_2^n \xrightarrow{F} w_3^n \longrightarrow \ldots \longrightarrow w_{n-1}^n \xrightarrow{F} v$$

esistono ∞ n per cui w_{n-1}^n è la stessa persona v_j

Allora v_j è celebre

E SE AMMETTIAMO CHE I VERTICI ABBIANO GRADO INFINITO?
TROVARE UN CONTROESEMPIO.



---

(4) RAMSEY INFINITO
SE HO UN GRAFO INFINITO, C'E' UN INSIEME INFINITO DI VERTICI TUTTI COLLEGATI O TUTTI SCOLLEGATI.

<u>COROLLARIO</u> OGNI SUCCESSIONE $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$

DI NUMERI REALI AMMETTE UNA SOTTO SUCCESSIONE DECRESCENTE (STRETTAMENTE) O DEB. CRESCENTE.

<u>IDEA</u> COLLEGO CON UN ARCO a_i e a_j SE

$i < j$ E $a_i \leq a_j$.

PER RAMSEY ESISTE SOTTOINSIEME TUTTO COLLEGATO (SOTTO SUCC DEB. CRESCENTE) o TUTTO SCOLLEGATO (DECRESCENTE)

<u>DIM (RAMSEY)</u> (V, E) $|V| = \infty$

Prendo $v_1 \in V$; v_1 è collegato a infiniti altri vertici oppure è scollegato. Facciamo che v_1 è collegato a ogni $w \in S_1 \subseteq V$ $|S_1| = \infty$

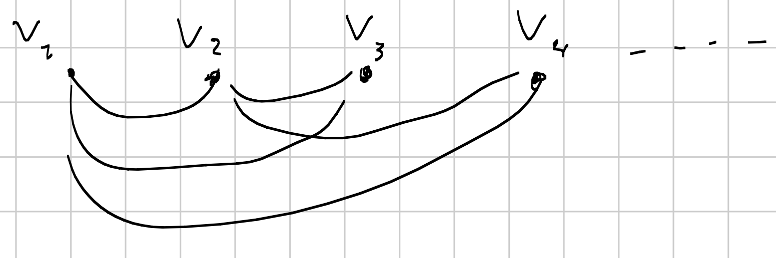
Prendiamo $v_2 \in S_1$; v_2 facciamo che è collegato anche lui a infiniti el. di S_1. $\exists S_2$ infinito

$S_2 \subseteq S_1 \setminus \{v_2\}$ S_2 collegato a v_2.

$v_3 \in S_2$. Stavolta v_3 è scollegato da tutto

$S_3 \subseteq S_2 \setminus \{v_3\}$ $|S_3| = \infty$, e così via

Otteniamo una successione di vertici



Un vertice è rosso se è collegato a tutti i successivi
è blu se è scollegato da tutti i successivi
Esistono infiniti vertici rossi o infiniti blu

SENIOR 2014 – ADVANCED

Titolo nota 02/09/2014

ANALISI BASIC
- → Serie
- → Inf / Sup
- → Convessità
- → Molt. di Lagrange
- → Succ. per ricorrenza
- → Basi di Hamel

Basi di Hamel: Insieme $\{r_i\}_{i \in I}$ di numeri reali con queste 2 proprietà

(i) $\forall r \in \mathbb{R}$ $\exists$ $q_1, \ldots, q_n$ razionali $\exists$ $r_{i_1}, \ldots, r_{i_n}$ nell'insieme tali che

$$r = \boxed{q_1 r_{i_1} + \ldots + q_n r_{i_n}}$$

Ogni reale si scrive come somma di alcuni r_i molt. per coeff. raz.

(ii) se una somma è nulla, allora $q_1 = \ldots = q_n = 0$.

CONSEGUENZA: ogni $r \in \mathbb{R}$ è comb. lin. in modo unico a coeff. in $\mathbb{Q}$ degli r_i.

Fatto misterioso: In $\mathbb{R}$ esistono basi di Hamel.

Utilizzo olimpico: costruzione di soluz. della Cauchy

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \qquad \forall x \in \mathbb{R} \ \forall y \in \mathbb{R}$$

che non sono del tipo $f(x) = \lambda x$.

<u>Costruzione</u> Prendiamo una base di Hamel, scegliamo un elemento speciale $\hat{r}$ della base, e poi poniamo

$$f(\hat{r}) = 2\hat{r}$$
$$f(r_i) = 3r_i \quad \text{per ogni altro } r_i \text{ della base}$$

Su ogni altro reale la scrivo "per linearità"

$x = q_1 r_1 + \ldots + q_n r_n$ e pongo $f(x) = q_1 f(r_1) + \ldots + q_n f(r_n)$

Si verifica che risolve la Cauchy

— o — o —

$$f(x + f(y)) = y + f(x) \qquad x, y \in \mathbb{R}$$

$x = 0 \Rightarrow$ inj + surj.

y = p.to in cui si annulla $\Rightarrow f(x) = \hat{y} + f(x) \Rightarrow \hat{y} = 0$

$f(f(y)) = y$

$y = f(z) \qquad f(x+z) = f(x) + f(z) \qquad$ Cauchy

$\rightsquigarrow f(x) = \lambda x$

$\rightsquigarrow \lambda = \pm 1 \qquad$ Ho finito su $\mathbb{Q}$ $\qquad f(x) = x$ oppure $f(x) = -x$

Su $\mathbb{R}$? Esistono altre soluzioni

Prendo una base di Hamel $\{r_i\}_{i \in I}$ e poi per ogni i pongo $f(r_i) = \pm r_i$ scegliendo i segni come mi pare ed estendo per linearità.

— o — o —

$\boxed{\text{SERIE}}$ Serie = somme infinite $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$

$$S_n = a_0 + a_1 + \dots + a_n$$

e vedere che succede per $n \to +\infty$.

Esempi classici

→ Serie geometrica $\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r}$ se $-1 < r < 1$

ad esempio $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots = 2$ $\left(r = \frac{1}{2}\right)$

$$S_n = 1 + r + \dots + r^n = \frac{1 - r^{n+1}}{1-r} \qquad r^{n+1} \to 0$$

→ Serie telescopiche $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n}$

$$\frac{1}{n^2+n} = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

Serie $= 1 - \cancel{\frac{1}{2}} + \cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}} + \cancel{\frac{1}{3}} - \cancel{\frac{1}{4}} + \cancel{\frac{1}{4}} - \frac{1}{5} \qquad = 1$

Rigorosamente: $S_n = 1 - \frac{1}{n+1}$ (si dim. per induzione)

Altro esempio: tutti quelli che si scrivono come somma / diff. di reciproci di interi

→ Serie armoniche: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a}$

Classico: $a = 2$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge $\left(\text{a } \frac{\pi^2}{6}\right)$

$\boxed{\text{Dim 1}}$ $S_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$ ⇝ induzione

$\boxed{\text{Dim 2}}$ $\frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n^2-n}$ $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2} \leq \underbrace{\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-n}}$

↑ telescopica e convergente

Con $a=1$: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$

$\boxed{\text{Dim}}$ $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\ldots$

$$\geq 1+\frac{1}{2}+\underbrace{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}_{\frac{1}{2}}+\underbrace{\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{8}}_{\frac{1}{2}}+\underbrace{\frac{1}{16}}_{\frac{1}{2}}$$

In generale: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a} = \begin{cases} \nearrow +\infty & \text{se } a \leq 1 \\ \searrow \text{converge} & \text{se } a > 1 \end{cases}$

← segue da $a=1$

↑ per $a \geq 2$ segue da $= 2$

$\boxed{\text{Dim.}}$ $1+\frac{1}{2^a}+\frac{1}{3^a}+\frac{1}{4^a}+\ldots+\frac{1}{7^a}+\frac{1}{8^a}+\frac{1}{9^a}+\ldots$

$$\leq \underbrace{1}_{1}+\underbrace{\frac{1}{2^a}+\frac{1}{2^a}}_{\frac{2}{2^a}}+\underbrace{\frac{1}{4^a}+\ldots+\frac{1}{4^a}}_{\frac{4}{4^a}}+\underbrace{\frac{1}{8^a}+\frac{1}{8^a}+\ldots}_{\frac{8}{8^a}}$$

$$1+\frac{1}{2^{a-1}}+\frac{1}{4^{a-1}}+\frac{1}{8^{a-1}}+\ldots = 1+\frac{1}{2^{a-1}}+\left(\frac{1}{2^{a-1}}\right)^2+\left(\frac{1}{2^{a-1}}\right)^3+\ldots$$

Questa è una geometrica di ragione $r = \frac{1}{2^{a-1}}$ e questa è <1 se e solo se $a > 1$.

$\boxed{\text{Fatto generale}}$ (Criterio di condensazione di Cauchy)

Siano $a_n > 0$ e decrescenti ($a_{n+1} \leq a_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$)

Allora

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty \iff \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \cdot a_{2^n} < +\infty$$

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + \dots$$
$$\geq \; a_1 + a_2 + a_4 + a_4 + a_8 + \dots + a_8 + \dots$$

Se voglio $\leq$, trucco dall'altra parte

Applicando il criterio all'armonica ottengo la geometrica

— o — o —

$\boxed{\text{Dim. 2}}$ Spero $\quad S_n \leq A - \dfrac{B}{n^{a-1}}$

$A = B+1$ così va bene per $n=1$

Passo induttivo: $\cancel{A} - \dfrac{B}{n^{a-1}} + \dfrac{1}{(n+1)^a} \overset{?}{\leq} \cancel{A} - \dfrac{B}{(n+1)^{a-1}}$

$$-\frac{(n+1)^{a-1}}{n^{a-1}} + \frac{1}{B(n+1)} \overset{?}{\leq} -1$$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{a-1} \overset{?}{\geq} 1 + \frac{1}{B}\,\frac{1}{(n+1)}$$

$\boxed{(1+x)^\alpha \geq 1+\alpha x}$ specie di Bernoulli, solo con α reale >0

Se fosse vera, allora $x = \frac{1}{n}$, $\alpha = a-1$ ...

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{a-1} \geq 1 + \frac{a-1}{n} \geq 1 + \frac{a-1}{n+1}$$

$(1+x)^\alpha \geq 1+\alpha x$ NON può essere vera per $\alpha \in (0,1)$

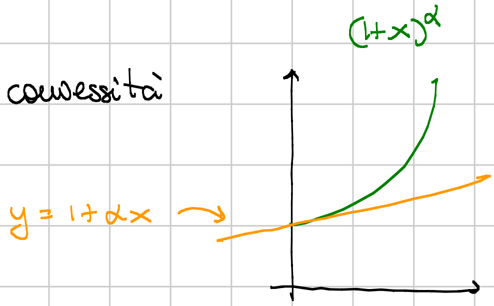
Ad esempio, per $\alpha = \frac{1}{2}$ il LHS cresce come $\sqrt{x}$, il RHS come x

$\boxed{\text{Fatto}}$ $(1+x)^\alpha \geq 1+\alpha x$ vera $\forall x \geq 0 \quad \forall \alpha \geq 1$

Ma non è vera per $\alpha \in (0,1)$

① Perché è vera per $\alpha \geq 1$? Disug. di convessità

FUNZIONE STA SOPRA TANGENTE



② Come ce la caviamo per $\alpha \in (0,1)$?

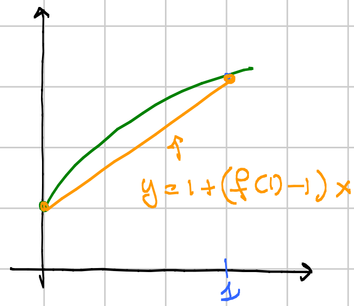
Mi serve qualcosa del tipo

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\alpha} \geq 1+\beta\frac{1}{n}$$

Mi serve $\quad (1+x)^{\alpha} \geq 1+\beta x \quad \forall x \in [0,1]$

Quindi va bene

$$(1+x)^{\alpha} \geq 1+(2^{\alpha}-1)x$$



— o — o —

Confronto serie – integrali

$$S_n = 1+\frac{1}{2^a}+\dots+\frac{1}{n^{\alpha}} \leq 1+\int_1^n \frac{1}{x^a}\,dx$$

$$= 1+\frac{1}{-a+1}\left(\frac{1}{n^{a-1}}-1\right)$$

$$= \text{cost.} - \frac{1}{1-a}\,\frac{1}{n^{a-1}}$$

MAX e MIN VINCOLATI

$$\max / \min \{ f(x) : x \in V \}$$

dove $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$V \subseteq \mathbb{R}^n$

Esempio $\min \{ \underbrace{x^2 + 4y^2 + 5xy + 7z^3}_{f(x,y,z)} : \underbrace{xyz \geq 1 \quad x > 0, y > 0, z > 0}_{\text{Descrivono l'insieme } V} \}$

Molt. di Lagrange $\Longleftrightarrow$ V è luogo di zeri di una funzione Φ

cioè

$$V = \{ x \in \mathbb{R}^n : \underbrace{\phi(x) = 0}_{\uparrow \text{ equazione di } V} \}$$

$\boxed{\text{Teorema misterioso}}$ Supponiamo che

- f sia derivabile con derivate continue
- ϕ " " " " "
- x_0 p.to di max / min per $f(x)$ su V.

Allora $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ t.c.

$$\nabla f(x_0) = \lambda \nabla \phi(x_0)$$

Esempio 1 $\max \{ \underbrace{x + 3y}_{f(x,y)} : x^2 + 2y^2 = 5 \}$ $\quad \phi(x,y) = x^2 + 2y^2 - 5$

BRUTAL MODE ON

$$\begin{cases} f_x = \lambda \phi_x \\ f_y = \lambda \phi_y \\ \phi = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 1 = \lambda \cdot 2x \\ 3 = \lambda \cdot 4y \\ x^2 + 2y^2 = 5 \end{cases} \qquad \begin{array}{l} \lambda = \frac{1}{2x} \\ \lambda = \frac{3}{4y} \\ x^2 + 2y^2 = 5 \end{array}$$

$$\frac{1}{2x} = \frac{3}{4y} \qquad 4y = 6x \qquad y = \frac{3}{2}x \qquad x^2 + \frac{9}{2}x^2 = 5$$

Le due soluzioni corrispondono ai p.ti di max / min

BRUTAL MODE OFF

$$\max \{ x+3y \ : \ x^2+2y^2=5 \}$$

$$\frac{2y+3x}{2} \leq \sqrt{\frac{4y^2+9x^2}{2}}$$

$$\alpha(2y)+(1-\alpha)3x \leq \sqrt{\alpha\, 4y^2+(1-\alpha)\,9x^2}$$

$$4\alpha = 2(1-\alpha)9 \qquad 4\alpha = 18-18\alpha$$

$$22\alpha = 18$$

$$\alpha = \frac{9}{11}$$

$$\frac{18}{11}y+\frac{6}{11}x \leq \sqrt{\frac{36}{11}y^2+\frac{18}{11}x^2}$$

$$\frac{6}{11}(x+3y) \leq \frac{\sqrt{18}}{\sqrt{11}}\sqrt{x^2+2y^2}$$

Esempio 2 $\qquad \max \{ \underbrace{x^2y}_{f(x,y)} \ : \ x^2+2y^2=5 \}$

$$\phi(x,y) = x^2-2y^2-5$$

$$f_x = \lambda \phi_x$$
$$f_y = \lambda \phi_y$$
$$\phi = 0$$

$$\begin{cases} 2xy = \lambda \cdot 2x & (\cdot\, 2y) \\ x^2 = \lambda \cdot 4y & (\cdot\, x) \\ x^2+2y^2=5 \end{cases}$$

$$4xy^2-x^3=0$$

$$x=0 \to \text{trovo } y \qquad\qquad x^2=4y^2 \to \text{FINE}$$

Esempio 3 $x^2+4y^2+5xy+7z^3$ $\qquad xyz-1=0$

$f_x = \lambda \phi_x$ $\qquad 2x+5y = \lambda yz \quad (\cdot x)$

$f_y = \lambda \phi_y$ $\qquad 8y+5x = \lambda xz \quad (\cdot y)$ $\quad 2x^2 = 8y^2$

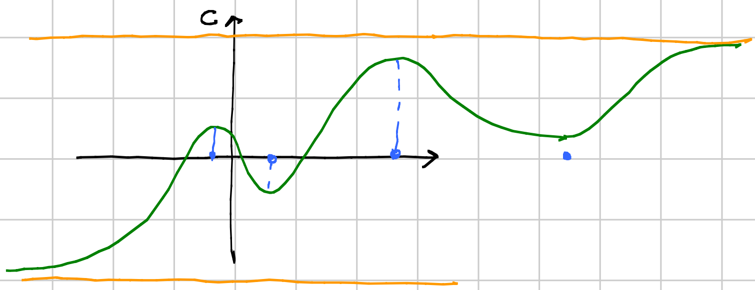
$f_z = \lambda \phi_z$ $\qquad 21z^2 = \lambda xy \quad (\cdot z) \to 21z^3 = 2x^2+5xy$

$\phi = 0$ $\qquad xyz = 1$

si sostituisce tutto in funzione di x o y

Problemi connessi all'utilizzo del metodo

1. Ridursi ad un insieme V con un'equazione
2. Sperare che le derivate esistano
3. BISOGNA SAPERE A PRIORI CHE MAX/MIN ESISTE, altrimenti i p.ti prodotti dal sistema potrebbero essere altro

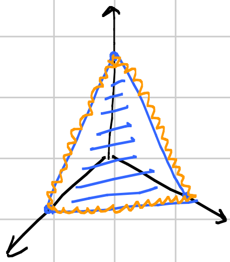


Trovare la più piccola costante c t.c. $f(x) \le c \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Weierstrass Se V è limitato (contenuto in cerchio o sfera di raggio opportuno) e chiuso (se un p.to non appartiene, allora tutto un suo intorno non interseca) e f è continua, allora max/min esistono

? $xy+yz+zx = 1$ è limitato
$x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0$ $\qquad x=0 \leadsto yz=1 \leadsto z$ enorme

$$\begin{cases} x+y+z=5 \\ x\geq 0,\ y\geq 0,\ z\geq 0 \end{cases}$$



$\text{Max}\,\{x^2y^3z : \text{insieme} \nearrow\}$

→ Max e min esistono (W)

→ Risolvo il sistema e butto le soluz. non ≥ 0

→ Devo considerare a parte il bordo

Se le equazioni sono 2 (o più) $\quad \phi=0 \quad \psi=0$

$$\nabla f = \lambda\nabla\phi + \mu\nabla\psi \qquad \begin{cases} f_x = \lambda\phi_x + \mu\psi_x \\ f_y = \lambda\phi_y + \mu\psi_y \\ f_z = \lambda\phi_z + \mu\psi_z \\ \phi = 0 \\ \psi = 0 \end{cases}$$

$\boxed{\text{KARAMATA}}$

$$f(x_1)+\dots+f(x_n) \geq f(y_1)+\dots+f(y_n)$$

Vera se $f(x)$ convessa e $\{x_i\} \succ \{y_i\}$ nel senso del bunching

cioè posto che $x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_n$

$y_1 \geq y_2 \geq \dots \geq y_n$

si ha che

$x_1 \geq y_1$

$x_1+x_2 \geq y_1+y_2$

$x_1+\dots+x_i \geq y_1+\dots+y_i$ per ogni $i=1,\dots,n-1$

$x_1+\dots+x_n = y_1+\dots+y_n$

se qui è solo $\geq$ bisogna aggiungere f crescente oltre che convessa

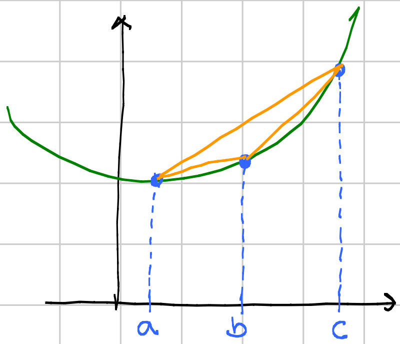
KARAMATA $\Rightarrow$ JENSEN : basta prendere $y_1=\dots=y_n=\dfrac{x_1+\dots+x_n}{n}$

a pesi costanti

e si ottiene

$$f(x_1)+\dots+f(x_n) \geq n\, f\left(\frac{x_1+\dots+x_n}{n}\right)$$

<u>Lemma</u> (dei 3 rapp. increm.) Se f è convessa



$$R(a,b)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=R(b,a)$$

$$\boxed{R(a,b) \leq R(a,c) \leq R(b,c)}$$

$R(x,y)$ è separatamente debolmente crescente nelle 2 variabili

$\boxed{\text{Dim. KARAMATA}}$

$$R_i = R(x_i, y_i) = \frac{f(x_i) - f(y_i)}{x_i - y_i}$$

$X_i = x_1 + \dots + x_i \qquad Y_i = y_1 + \dots + y_i \qquad X_0 = Y_0 = 0$

$$\sum_{i=1}^{m} f(x_i) - f(y_i) = \sum_{i=1}^{m} R_i (x_i - y_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{m} R_i (X_i - X_{i-1} - Y_i + Y_{i-1})$$

$$= \sum_{i=1}^{m} R_i (X_i - Y_i) + \sum_{i=1}^{m} R_i (Y_{i-1} - X_{i-1})$$

$$= \sum_{i=1}^{m} R_i (X_i - Y_i) + \sum_{i=0}^{m-1} R_{i+1} (Y_i - X_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{m-1} \underbrace{(R_{i+1} - R_i)}_{\text{Spero } \le 0} \underbrace{(Y_i - X_i)}_{\le 0} + \underbrace{R_m (X_m - Y_m)}_{\overset{\shortparallel}{0}} + \underbrace{R_1 (Y_0 - X_0)}_{\overset{\shortparallel}{0}}$$

oppure $\ge 0 \cdot \ge 0$ se f è crescente e $X_m \ge Y_m$

Sarebbe tutto ok se $\quad R_i \ge R_{i+1}$

$$R_i = R(x_i, y_i) \ge R(x_{i+1}, y_i) \ge R(x_{i+1}, y_{i+1}) = R_{i+1}.$$

$\square$

Esempio 1 $\quad \sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma \quad$ ristretta ai triangoli acutangoli

$\{\alpha, \beta, \gamma\} \prec \{\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, 0\} \qquad \sin x$ è concava, quindi karamata al contrario

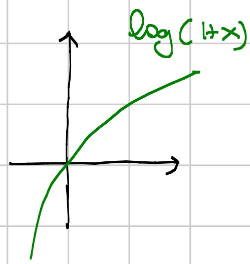
$$\underset{\text{jensen}}{\frac{3\sqrt{3}}{2} \ge} \sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma \underset{\text{karamata}}{\ge} 2$$

Esempio 2

$$(1+a_1)(1+a_2)\cdot\ldots\cdot(1+a_n) \leq \left(1+\frac{a_1^2}{a_2}\right)\cdot\left(1+\frac{a_2^2}{a_3}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{a_n^2}{a_1}\right)$$

Mi riduco a

$$\sum \log(1+a_i) \leq \sum \log\left(1+\frac{a_i^2}{a_{i+1}}\right)$$



$f(x) = \log(1+x) \rightsquigarrow$ concava

quindi spero che

$$\{a_i\} \succ \left\{\frac{a_i^2}{a_{i+1}}\right\}$$

Controllo l'ultima $\quad a_1+\ldots+a_n \leq \frac{a_1^2}{a_2} + \frac{a_2^2}{a_3} + \ldots + \frac{a_n^2}{a_1}$

$a_1^2, \ldots, a_n^2 \qquad \frac{1}{a_1}, \ldots, \frac{1}{a_n} \qquad$ ordinati al contrario

Controllo la prima: $\quad \underbrace{\frac{a_i^2}{a_{i+1}}}_{\text{quello che massimizza}} \geq \underbrace{\frac{a_M^2}{a_{M+1}}}_{a_M \text{ è il + grande } a_i} \geq a_M$

Controllo la seconda:

$$\underbrace{\frac{a_i^2}{a_{i+1}}}_{1^a} + \underbrace{\frac{a_j^2}{a_{j+1}}}_{2^a} \underbrace{\geq}_{\text{vera per def.}} \frac{a_M^2}{a_{M+1}} + \frac{a_S^2}{a_{S+1}} \underbrace{\geq}_{\text{crea problemi se } a_{S+1}=a_M} a_M + a_S$$

$$\frac{a_M^2}{a_{M+1}} + \frac{a_S^2}{a_M} \geq \frac{a_M^2}{a_S} + \frac{a_S^2}{a_M} \geq a_M + a_S$$

Procedendo si ottiene $\{a_i\} \prec \left\{ \frac{a_i^2}{a_{i+1}} \right\}$

Alternativa: scrivere $a_i = e^{x_i}$ $\quad \frac{a_i^2}{a_{i+1}} = e^{2x_i - x_{i+1}}$

$$\{x_i\} \prec \{2x_i - x_{i+1}\}$$

funzione $\log(1+a_i) = \log(1+e^x) = f(x)$

$$f'(x) = \frac{e^x}{1+e^x} \qquad f''(x) = \frac{e^x(1+e^x) - e^x \cdot e^x}{(\ )^2} = \frac{e^x}{(\ )^2} \geq 0$$

$$x_M < \underbrace{2x_i - x_{i+1}}_{\text{massimizza RHS}} \qquad 2x_i - x_{i+1} \geq 2x_M - x_{M+1} \geq x_M$$

$$\boxed{\text{OK}}$$

C1 ADVANCED

Titolo nota 04/09/2014

"ALGORITMI"

① IMO SL 2005 C1

C'È UNA CASA CON DELLE STANZE.
IN OGNI STANZA ≥ 3 LAMPADE. TUTTE LE LAMPADE SONO DIVISE IN COPPIE. PER OGNI COPPIA C'È UN INTERRUTTORE CHE CAMBIA SIMULTANEAMENTE LO STATO DELLA COPPIA DI LAMPADE.
LE COPPIE SONO DISGIUNTE.

<u>TESI</u> È POSSIBILE, PREMENDO OPPORTUNAMENTE GLI INTERRUTTORI, FARE IN MODO CHE IN OGNI STANZA CI SIANO SIA LAMPADE ACCESE CHE SPENTE, A PARTIRE DA QUALSIASI CONFIG.

② IMO SL 2005 C7

SIAMO IN $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, $n \geq 2$. ABBIAMO n NUMERI $a_1, a_2, \ldots, a_n$ CON $a_1 + \ldots + a_n \equiv 0 \ (n)$.

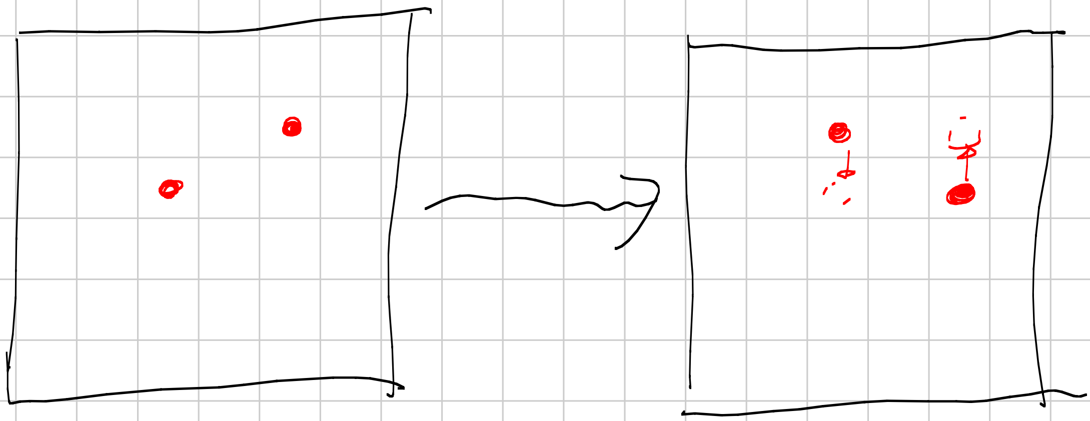
ALLORA ESISTONO σ, τ PERMUTAZIONI SU $\{1, \ldots n\}$

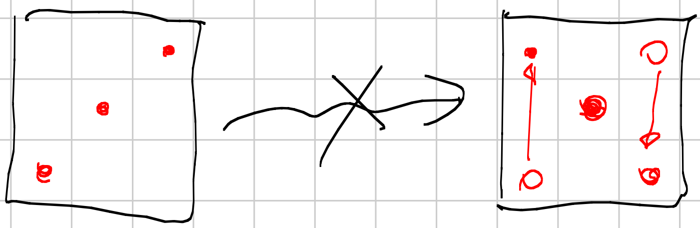
T.C. $\sigma(i) + \tau(i) \equiv a_i \ (n)$

③ IMO SL 2006 C4

A e B sono due griglie $n \times n$ con righe e colonne numerate da 1 a n. Chiamo $R_A(x,y)$ il rettangolo in A formato dalle prime x righe e dalle prime y colonne $1 \leq x, y \leq n$

analogamente $R_B(x,y)$.
Sia su A che su B metto n fragole, una per ogni riga e una per ogni colonna.
Una mossa in una griglia consiste nello scegliere due fragole in posizioni (x,y) e (z,t) con $x<z$ e $t<y$, t.c. nel rettangolo $[x,z]\times[t,y]$ ci sono solo queste 2 fragole, e nello spostarle nelle posizioni (x,t) e (z,y)





SUPPONIAMO CHE $\forall\, x,y$ IN $R_A(x,y)$ CI SIANO PIÙ O TANTE FRAGOLE QUANTE IN $R_B(x,y)$. ALLORA CON UN PO' DI MOSSE SU B SI RENDE B UGUALE AD A.

(4) IMO 2007 3 C'È UN GRAFO IN CUI LA MASSIMA DIMENSIONE DI UNA CRICCA È PARI. ALLORA POSSO DIVIDERE I VERTICI IN DUE SOTTOINSIEMI PER CUI LE MASSIME DIMENSIONI

DELLE CRICCHE NEI DUE SOTTOINSIEMI SONO UGUALI

(5) IMO 2009 6. DATI $a_1, \dots, a_n$ INTERI POSITIVI TUTTI DISTINTI, SIA $S = a_1 + \dots + a_n$.
SIANO $0 < b_1, \dots, b_m < S$ INTERI POSITIVI DISTINTI CON $m < n$.
UNA CAVALLETTA PARTE DA 0 E DEVE ARRIVARE IN S SALTANDO SULLA RETTA REALE; DEVE FARE IN QUALCHE ORDINE SALTI DI LUNGHEZZE $a_1, \dots, a_n$.
IN $b_1, \dots, b_m$ CI SONO DELLE MINE CHE LA CAVALLETTA DEVE EVITARE. DIM CHE LA CAVALLETTA PUÒ ARRIVARE SANA E SALVA IN S.

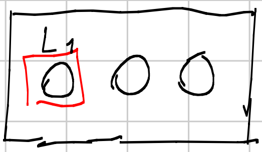
---

(1) CHIAMIAMO "NORMALE" UNA STANZA IN CUI IN UNA CERTA CONFIG., CI SONO SIA LAMPADE ACCESE CHE SPENTE.

CERCHIAMO UN ALGORITMO CHE, DATA UNA CONFIG., LA "MIGLIORA": IL NUMERO DI STANZE NORMALI DEVE AUMENTARE.

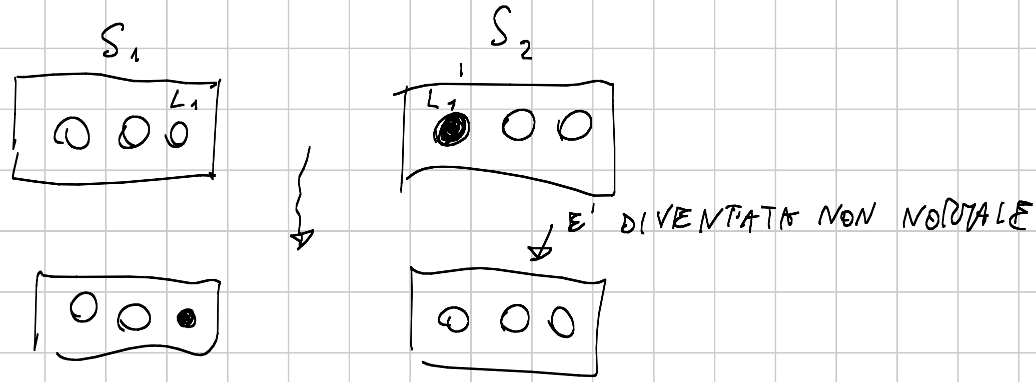
- SUPPONIAMO CHE CI SIA UNA STANZA NON NORMALE

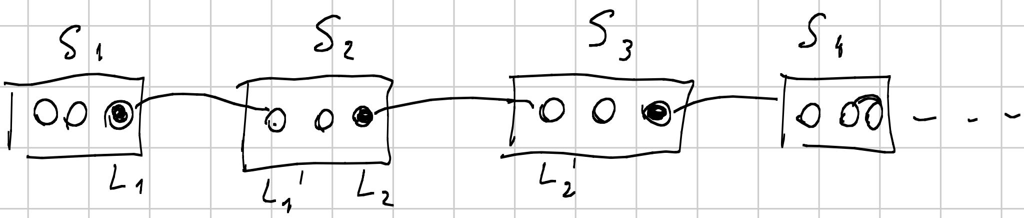
S_1 ○ = ACCESO ● = SPENTO



OSS SE PREMO UN INTERRUTTORE DI UNA LAMPADA DI UNA STANZA NON NORMALE, LA STANZA DIVENTA NORMALE

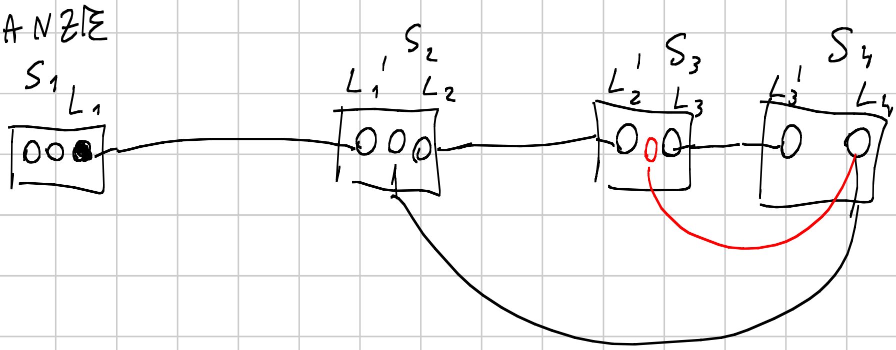
PREMO L'INTERRUTTORE DI L_1: S_1 DIVENTA NORMALE, MA LA STANZA S_2 IN CUI SI TROVA LA COMP. DI S_1 POTREBBE DA NORMALE DIVENTARE NON NORMALE; ALTRIMENTI IL N° TOT. DI ST. NORMALI AUMENTA E SIAMO FELICI.





CON QUESTO METODO S_1 DIVENTA NORMALE, S_2 RIDIVENTA NORMALE A SPESE DI S_3, ...

SE S_i CONTIENE 2 LAMPADE COLLEGATE, RENDO S_i NORMALE SENZA CAMBIARE ALTRE STANZE



SE IL PERCORSO È $S_1 S_2 \dots S_n$ S_i

CON $S_1 \dots S_n$ TUTTE DIVERSE E $1 \le i \le n$

$\boxed{i=1}$ $L'_n \neq L_1$ E C'È ALMENO UN'ALTRA LAMPADA CHE CON L_1 GIÀ GARANTISCE LA NORMALITÀ

$i>1$ L_i e L'_{i-1} già garantiscono la normalità di S_i, e $L'_n \neq L'_{i-1}$ perché $L_n \neq L_{i-1}$ perché $n \neq i-1 \Rightarrow S_n \neq S_i \Rightarrow L'_n \neq L'_{i-1}$

$L'_n \neq L_i$ perché $L_n \neq L'_n$ per $i=n$

$L'_n \neq L_i$ con $1<i<n$ perché le loro "amiche" L_n e L'_i sono diverse (una è scelta tra le disponibili in S_n, l'altra è etichettata all'arrivo in una stanza).

---

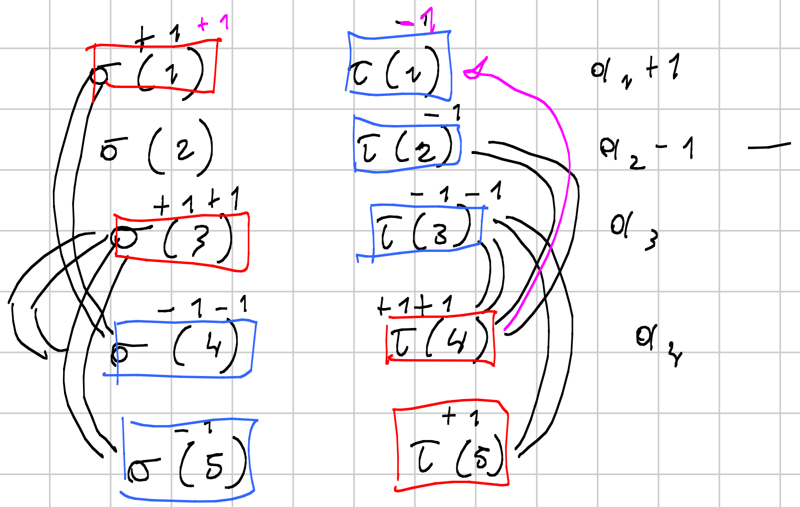
(2) SE RIESCO A RISOLVERE IL PROBLEMA PER $a_1, \dots, a_n$ E MODIFICO DI POCO LA n-UPLA, RIESCO A MODIFICARE OPPORTUNAMENTE σ E τ?

$$\begin{array}{ccccc} \sigma(1) & + & \tau(1) & a_1 & b_1 \\ \sigma(2) & + & \tau(2) & a_2 & b_2 \\ & & \vdots & & \\ \sigma(n) & + & \tau(n) & a_n & b_n \end{array}$$

<u>OSS</u> Se ho σ e τ per $a_1, \dots, a_n$, posso rimescolare $a_1, \dots, a_n$ (cioè prendere una

permutazione ρ e considerare $(a_{\rho(1)}, \dots, a_{\rho(n)})$ e anche per la nuova n-upla ha una soluzione.

Cerco di sistemare la n-upla $a_1+1, a_2-1, a_3, \dots, a_n$

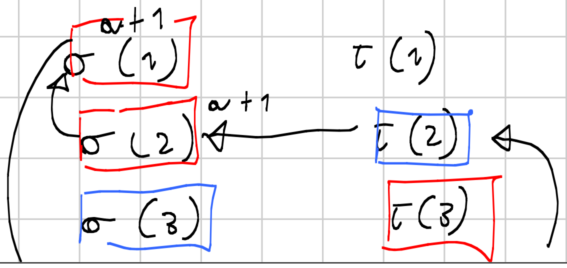


Se a un certo punto capito in una riga già visitata, vado avanti come se niente fosse.

<u>IDEA</u> COLORO DI ROSSO UN NUMERO NUOVO A CUI DEVO AGGIUNGERE 1 LA 1ª VOLTA CHE LO INCONTRO, DI BLU UN NUMERO A CUI TOLGO 1 LA PRIMA VOLTA

<u>LEMMA</u> VISITERÒ ALTERNATIVAMENTE CASELLE ROSSE E BLU

PER ASSURDO PRENDO IL PRIMO PASSAGGIO DA ROSSO A ROSSO ...



$\boxed{\sigma(4)} \longrightarrow \boxed{\tau(4)}$

OGNI VOLTA CHE VISITO UNA CASELLA, SE È ROSSA AGGIUNGO 1, SE È BLU TOLGO 1.

LA 1ª VOLTA CHE CADO IN UNA RIGA (AD ES. LA 2ª), È TRAMITE UNO SPOSTAMENTO

DA ROSSO A BLU IN VERTICALE

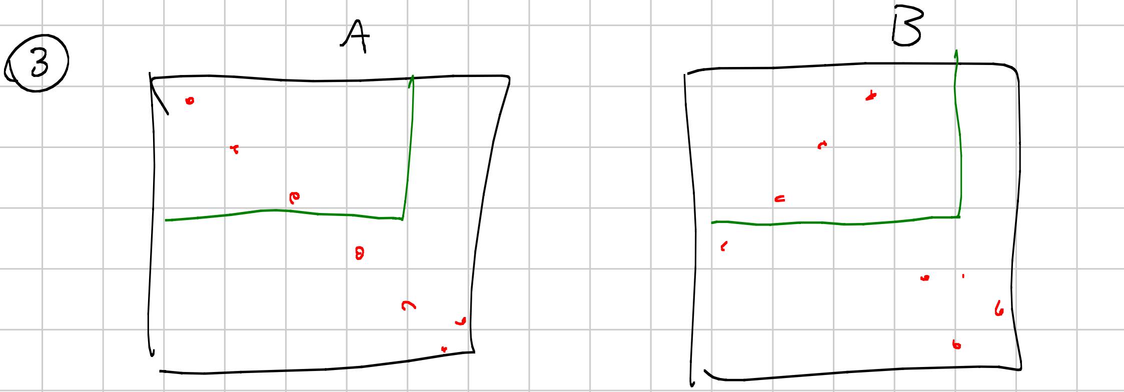
PERCHÉ PRIMA O POI CADO IN $\sigma(2)$ O $\tau(2)$?

A OGNI PASSAGGIO UNA CASELLA ROSSA (A SX O A DX) AUMENTA DI 1; PRIMA O POI C'È UNA CASELLA ROSSA CHE RAGGIUNGE UNO TRA $\sigma(2)$ E $\tau(2)$ ($\sigma(2)$ SE È A SX, $\tau(2)$ SE È A DX).

A QUEL PUNTO HO TROVATO 2 PERM. CHE VANNO BENE PER $\alpha_1+1, \alpha_2-1, \alpha_3, \dots, \alpha_n$ E TANTO MI BASTA.

---

(3)



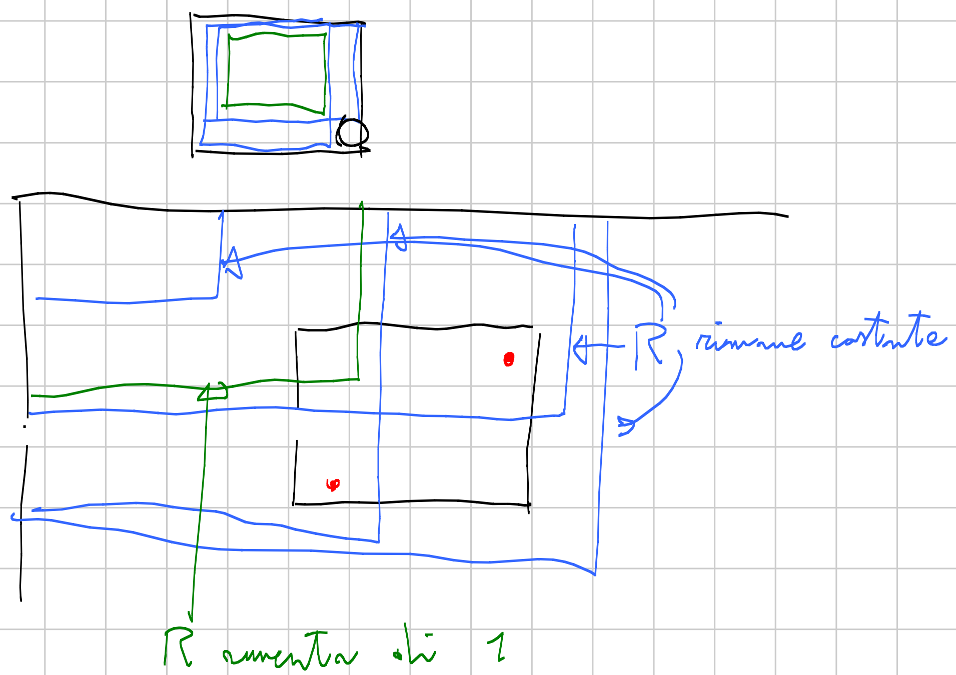
OSS 1 OGNI MOSSA SU B FA AUMENTARE (DEBOLMENTE) OGNUNO DEGLI $R_B(x,y)$

OSS 2 IN GENERALE NON SI POSSONO FARE INFINITE MOSSE

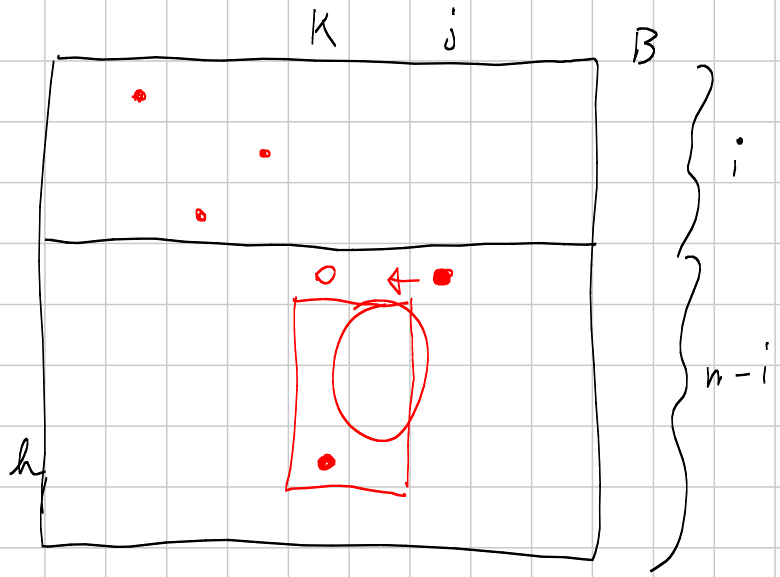
OSS 3 SE $R_A(x,y) = R_B(x,y) \quad \forall x,y$ ALLORA $A = B$

OSS 4 $R(x,y) + R(x-1,y-1) - R(x,y-1) - R(x-1,y)$

$$= \begin{cases} 1 & \text{se c'è } \bullet \text{ in } (x,y) \\ 0 & \text{se non c'è} \end{cases}$$



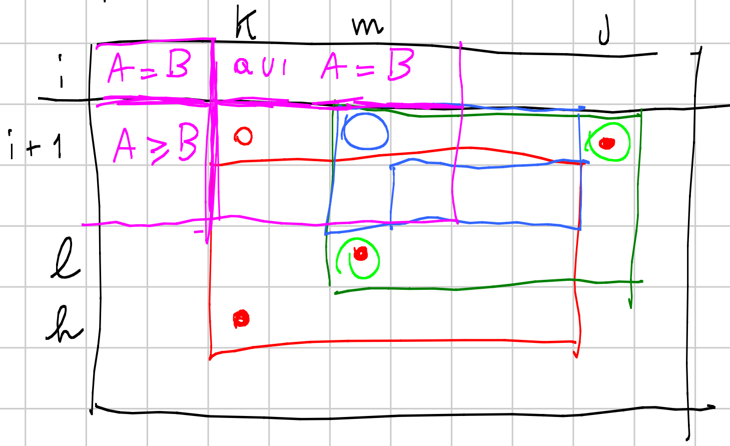
CI BASTA DIMOSTRARE CHE SE $R_A(x,y) > R_B(x,y)$ PER QUALCHE (x,y), ALLORA ESISTE UNA MOSSA CHE MANTIENE LE IPOTESI ($R_A \geq R_B \ \forall x,y$)



nelle prime i righe B coincide con A

nella riga $i+1$ B ha ● nella colonna j, A nella colonna k con $k < j$

Nel rettangolo rosso c'è almeno una fragola; prendiamo quella più in alto, nella riga l e nella colonna m



Gli $R_B(x,y)$ che aumentano di 1 sono quelli rel. a rettangoli che contengono la casella ○ ma non le ◎

Per effettuare la mossa $(i+1, j), (l, m) \rightsquigarrow$

$\rightsquigarrow (i+1, m), (l, j)$

Il rettangolo viola ha vertice (x, y)

$m < x < j \qquad i+1 < y < l \qquad R_B(x,y) < R_A(x,y)$

Nel rettangolo $[i+1, x] \times [k, y]$ A contiene almeno una ● e B nessuna; negli altri rettangoli =

vale comunque il $\geq$ sul n° di •

PAUSA ALGEBRICA : COMBINATORIAL NULLSTELLENSATZ

$F(x_1, \dots, x_n)$ è un polinomio $\neq 0$ in n variabili a coefficienti in $\mathbb{C}$. Riusciamo a dire qualcosa sulle n-uple $(a_1, \dots a_n)$ in cui F non si annulla? Ce ne sono abbastanza? Intanto ce ne sta almeno una?

$$F(x_1, \dots, x_n) = F_k(x_2, \dots, x_n)\, x_1^k + \dots + F_0(x_2 \dots x_n)$$

$k = \deg_{x_1} F$ Se $k=0$ allora x_1 non compare

F è un pol. in $n-1$ variabili, scelgo x_1 a piacere e gli altri per ip. induttiva.

Se $k \geq 1$ scelgo $x_2, \dots, x_n$ t.c. $F_k(x_2 \dots x_n) \neq 0$ e posso farlo per ip. ind. Mi ritrovo con un pol. in 1 variabile di grado k che ammette un "non-zero".

C. N. F ha grado totale k e contiene un monomio della forma $\lambda x_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot x_n^{\alpha_n}$

$\lambda \neq 0 \quad \alpha_1 + \dots + \alpha_n = k$

Prendiamo $S_1, S_2, \dots, S_n \subseteq \mathbb{C} \quad |S_i| = \alpha_i + 1$

Allora posso scegliere $a_1 \in S_1, \dots, a_n \in S_n$ per cui

$F(a_1, \dots, a_n) \neq 0$

DIM Suppongo che $\alpha_1 \geq 1$ (se $K=0$ il teorema è banale) (uno degli α_i è quindi ≥ 1)

Prendo $s \in S_1$

$$g(x_1, \dots, x_n) := F(x_1, \dots, x_n) - F(s, x_2, \dots x_n)$$

$g(s, x_2 \dots x_n)$ come polinomio in $x_2 \dots, x_n$ è nullo

$$g = (x_1 - s) \cdot h(x_1, \dots, x_n)$$

$$\deg h + 1 = \deg g \leq \deg F$$

Se in F compare $\lambda x_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot x_n^{\alpha_n}$, in h compare $\lambda x_1^{\alpha_1 - 1} \cdot x_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot x_n^{\alpha_n}$

Quindi in realtà h ha grado tot. $K-1$ e quello trovato è un monomio di grado massimo

$$\exists\ a_1 \in \underbrace{S_1 \setminus \{s\}}_{\text{ha } \alpha_1 = (\alpha_1 - 1) + 1 \text{ elementi}},\ a_2 \in S_2, \dots\ a_n \in S_n$$

$$h(a_1, \dots, a_n) \neq 0$$

$$(a_1 - s) \cdot h(a_1, \dots, a_n) = g(a_1, \dots a_n) \neq 0$$

$$F(a_1, a_2, \dots, a_n) - F(s, a_2, \dots, a_n) \neq 0$$

non possono essere tutti e due nulli

IMO 2007/6 $\{1,\dots,n+1\}^3 \setminus \{(1,1,1)\}$
non si può coprire con $3n-1$ piani che non passano per $(1,1,1)$

Siano $P_1,\dots,P_K$ piani che coprono i punti da coprire ma non $(1,1,1)$ (per assurdo $K \le 3n-1$)
P_i ha equazione $f_i(x,y,z) = a_i x + b_i y + c_i z + d = 0$
di primo grado

$$F(x,y,z) = \prod_{i=1}^{K} F_i(x,y,z)$$

F ha grado totale K, ma come andare avanti?

CURIOSITÀ

GENERALIZZIAMO S_x, S_y, S_z finiti $\subseteq \mathbb{R}$
$\bar{x} \in S_x$ $\bar{y} \in S_y$ $\bar{z} \in S_z$. Vogliamo coprire
$S_x \times S_y \times S_z \setminus \{(\bar{x},\bar{y},\bar{z})\}$ senza coprire
$(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$; congettura: servono $|S_x|+|S_y|+|S_z| - 3$

OSS. Questa quantità basta
$P_1,\dots,P_K$ che coprono $F_1,\dots,F_K$ come prima
$K < |S_x| + \dots - 3 \Rightarrow \deg F < |S_x| + \dots - 3$

SPECIALIZZIAMO (TORNIAMO AL VERO PROBLEMA)

$$g(x,y,z) = (x-2)\cdots(x-(n+1))\cdot(y-2)\cdots(y-(n+1))\cdot(z-2)\cdots(z-(n+1))$$

È UN POLINOMIO DI GRADO $3n$ CON MONOMIO DI GRADO MASSIMO $x^n y^n z^n$.

$F(1,1,1) = \lambda \neq 0$

$\left(\lambda g - g(1,1,1) F\right)$ è un pol. di grado $3n$ con monomio di grado massimo $\lambda x^n y^n z^n$, ma si annulla su $\{1, \dots n+1\}^3$. PER IL NULLSTELLENSATZ COMBINATORICO TROVO UN ASSURDO.

C2A ADVANCED [Troleito Br00tal]

Titolo nota 06/09/2014

- Double Counting
- Invarianti
- Esercizi

Dimostrare che:

$$n\sum_{i=2}^{n}\frac{1}{i} \le \sum_{i=1}^{n}\tau(i) \le n\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}$$

$\forall n \geq 2$, dove $\tau(k)$ denota il numero di divisori di k.

Hint 1: $\tau(k)$ può essere visto come il numero di coppie ordinate (a,b) tali che: $ab=k$

Double counting sul numero di coppie (a,b) ordinate tali che $ab \leq n$.

Notando che il numero di coppie tali che $ab=k$ è $\tau(k)$, il numero totale di coppie sarà...

... C.H.S $\sum_{i=1}^{n}\tau(i)$

Contiamole fissando a:
il numero di b tali che $ab \le n$ in funzione di a ed n è...

$$\dots \left\lfloor \frac{n}{a} \right\rfloor$$

Quindi il numero totale di coppie è...

$$\dots \sum_{i=1}^{n} \left\lfloor \frac{n}{i} \right\rfloor$$

Vale quindi

$$\sum_{i=1}^{n} \left\lfloor \frac{n}{i} \right\rfloor = \sum_{i=1}^{n} \tau(i)$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{n}{i} - 1 \le \left\lfloor \frac{n}{i} \right\rfloor \le \frac{n}{i}$$

$$\Downarrow$$

$$\sum \left(\frac{n}{i} - 1\right) \le \sum \left\lfloor \frac{n}{i} \right\rfloor \le \sum \frac{n}{i}$$

$$\Downarrow$$

TESI.

Dimostrare che $\forall n \geq 1$ vale:

$$\sum_{i=1}^{n} \phi(i) \left\lfloor \frac{n}{i} \right\rfloor = \binom{n+1}{2}.$$

Cosa ci fa più schifo?:
- ϕ
- $\lfloor\ \rfloor$
- $(\ )$

Cerchiamo di trovare un modo sensato per scrivere la ϕ.

In funzione di coppie a e b!

L' LHS ricorda molto la presenza di coppie.

$\phi(k) =$ "Numero di interi a tali che $1 \leq a \leq k$, (a, k)."

$\left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor =$ "Numero di multipli di $k \leq n$".

Contiamo tutte le coppie (a,b) ordinate di interi positivi tali che:

$1 \le a \le n$, $1 \le b \le n$, $b \ge a$.

Sono $\binom{n+1}{2}$.

È come dire: conto le frazioni del tipo $\frac{a}{b}$ con $n \ge b \ge a \ge 1$.

- Se a e b sono coprimi e fisso b avrò esattamente $\phi(b)$ valori.

Noi le contiamo dalle frazioni irriducibili.

$\frac{p}{q}$ $(p,q)=1$ $p \le q$ $\xrightarrow[\text{ASSEGNO}]{}$ $\frac{p}{q}, \frac{2p}{2q}, \frac{3p}{3q}, \dots, \frac{\lfloor \frac{n}{q} \rfloor p}{\lfloor \frac{n}{q} \rfloor q}$ $\lfloor \frac{n}{q} \rfloor p \to \le n$, $\lfloor \frac{n}{q} \rfloor q \to \le n$

Fissando q e contandole tutte troviamo:

$$\phi(q) \cdot \left\lfloor \frac{n}{q} \right\rfloor$$

IL NUMERO DI FRAZIONI $\frac{p}{q}$, $p \le q$

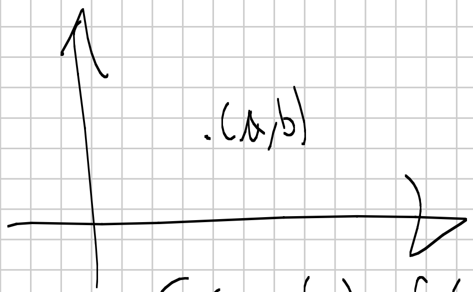
SONO $\binom{n+1}{2}$ PER D.C.

ESERCIZIO DA 7-8 MINUTI (FORSE):

$\forall n \geq 2$, dimostrare che:

$$\sum_{i=2}^{n} \underbrace{\lfloor \sqrt[i]{n} \rfloor}_{\downarrow} = \sum_{i=2}^{n} \underbrace{\lfloor \log_i n \rfloor}_{\downarrow}$$

$$\sqrt[i]{n} \qquad\qquad \log_i n$$



Es.2 (by Davide)

$\forall (a,b) \mid a \geq 1,\ b \geq 1\ a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}$,

Ho $f: \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}^+$ tale che

$$f(a_1,b_1) = f(a_2,b_2) = \dots = f(a_{2015}, b_{2015})$$

$$\Downarrow$$

$(a_i,b_i) = (a_j,b_j)$ PER QUALCHE $1 \leq i < j \leq 2015$.

DIMOSTRARE CHE $f(m,n) \geq mn$ PER QUALCHE (m,n).

Es.1

$$\sum_{i=2}^{n} \lfloor \sqrt[i]{n} \rfloor = \sum_{i=2}^{n} \lfloor \log_i n \rfloor$$

DOUBLE COUNTING SUL NUMERO DI COPPIE ORDINATE (a,b) TALICHE $2 \leq a,b \leq n$ E...

$$a^b \leq n.$$

VOGLIAMO CONDIZIONI SIMMETRICHE SU a E b (I.E. $a \geq 1$, $b \geq 2$ È UN CONTO PIÙ BRUTTO).

MENO DIRETTO.

FISSIAMO a: b ASSUME $\lfloor \log_a n \rfloor - 1$

$b \geq 2$!

FISSIAMO b: a ASSUME $\lfloor \sqrt[b]{n} \rfloor - 1$

SOMMANDO SU a E SU b OTTENGO TUTTE LE COPPIE.

DUNQUE: $\displaystyle\sum_{i=2}^{n} \left(\lfloor \log_i n \rfloor - 1 \right) = \sum_{i=2}^{n} \left(\lfloor \sqrt[i]{n} \rfloor - 1 \right)$

ES. 2 UN DOUBLE COUNTING

SUI VALORI DA 1 A k CONTENUTI NELL'IMMAGINE.

LAVORIAMO PER ASSURDO: $P(m, n) \leq mn$.

E CONTIAMO: LE COPPIE (m,n) CON $mn \leq k$ POSSONO ASSUMERE SOLO VALORI TRA 1 E k

QUINDI. #COPPIE $\leq$ VALORI CHE SI POSSONO ASSUMERE PER NUMERO DI VOLTE CHE CI POSSO ASSUMERE

$$\sum_{i=1}^{k} \tau(i) \leq 2014\, k$$

$\sim k \log k \rightarrow$ PRENDO k GRANDE E VIENE

DIMOSTRARE CHE IL NUMERO DI MODI DI SCRIVERE n COME SOMMA DI INTERI POSITIVI IL CUI MASSIMO È k È UGUALE AL NUMERO DI SCRIVERE n COME SOMMA DI k INTERI POSITIVI.

(NON CONTA L'ORDINE).

ALL RUSSIAN OLYMPIAD 2014 GRADE 11 7.

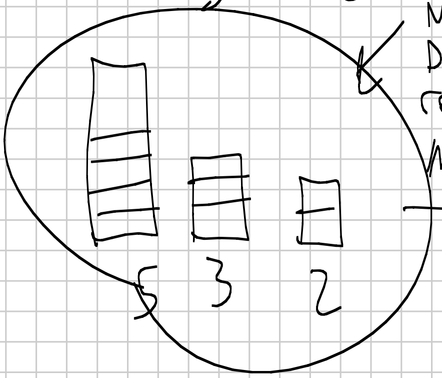
SU UNA LAVAGNA, SE CI SONO SCRITTI I POLINOMI $f(x)$ E $g(x)$ POSSIAMO SCRIVERE ANCHE $f(x)+g(x)$, $f(x)-g(x)$, $f(x)\,g(x)$, $3f(x)$, $f(g(x))$.

PARTENDO DA x^3-3x^2+5 E x^2-4x È POSSIBILE OTTENERE x^n-1?

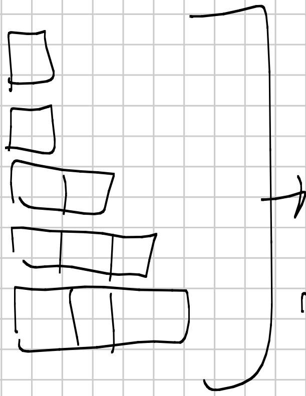
ESERCIZIO DI SOPRA

$n = 10 = 5+3+2$

$K=3$



NUMERO DI MODI CON K INTERI POSITIVI



$K=3$ NUMERO DI MODI CON N MASSIMO K.

QUESTA È UNA BIJEZIONE

OK

INVARIANTI

$x^3 - 3x^2 + 5$

$x^2 - 4x$

ELEMENTI DELL'INSIEME

$f(x) \pm g(x)$

$3f(x)$

$f(x)g(x)$

$f(g(x))$

OPERAZIONI

$x^2 - 1$

VOGLIAMO DIMOSTRARE CHE È FUORI

$f(x) \pm g(x)$

$f(x)\, g(x)$

$3g(x)$

$f(g(x))$ → CONSERVA GLI ZERI IN COMUNE DELLE DERIVATE.

$f'(\alpha) = g'(\alpha) = 0$ IN α

SOMMA: OK

PRODOTTO: $f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ OK

$3f(x)$: OK

$f(g(x))$ → LA DERIVATA È

$g'(x) \cdot f'(g(x))$ → OK

DERIVIAMO I NOSTRI POLINOMI.

$x^3 - 3x^2 + 5 \to 3x^2 - 6x \to x = 0 \lor x = 2$

$x^2 - 4x \to 2x - 4 \to x = 2$

2 È RADICE DELLA DERIVATA DI ENTRAMBI I POLINOMI.

E NON È RADICE DELLA DERIVATA DI $x^n - 1$.

SU UNA CALCOLATRICE FUNZIONANO SOLO I TASTI: $+$, $-$, x^{-1}. LA CALCOLATRICE RIESCE A RICORDARSI I NUMERI CHE HA TROVATO PRIMA.

SE DIAMO ALLA CALCOLATRICE I NUMERI $\underbrace{a \text{ E } b}_{\in \mathbb{R}}$ È SEMPRE POSSIBILE SCRIVERE ab?

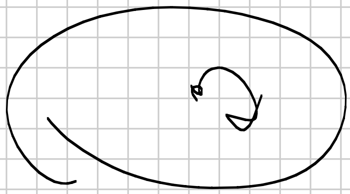
ABBIAMO SU UNA LAVAGNA LA COPPIA $(29, 13)$.
PER OGNI COPPIA (a, b) SULLA LAVAGNA POSSIAMO CANCELLARLA E METTERE AL SUO POSTO UNA TRA:

- (a^3, b)
- (a, b^3)
- $\forall n \geq 1: (\phi(na), \phi(nb))$
- $\forall n \geq 2: (n\phi(a), n\phi(b))$.

È POSSIBILE OTTENERE DUE NUMERI UGUALI?

II PARTE.

ES. 1



OPERAZIONI

$+, -, {}^{-1}$ → SONO SEMPRE DENTRO AD UN CAMPANELLO (FORSE)

$$a = \sqrt{2} \qquad b = \sqrt{3}$$

$S = q_1\sqrt{2} + q_2\sqrt{3}$, CON $q_1, q_2 \in \mathbb{Q}$.

$+$ INTERNO

$-$ INTERNO

$$(\sqrt{2}\,a + \sqrt{3}\,b)^{-1} = \frac{\sqrt{2}\,a - \sqrt{3}\,b}{2a^2 - 3b^2} \in S.$$

SI VERIFICA CHE $a\sqrt{2} + b\sqrt{3} = \sqrt{6}$ NON HA SOLUZIONE

PROBLEMA DISAGIO

$$f: \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{N}$$

$$f(1) = 0$$

$$f(n) = 1 + f(\phi(n)) \to$$ DEFINITA INDUTTIVAMENTE

$$f(a;b) = f(a) - f(b)$$

$$f(29;13) = f(29) - f(13) = f(28) - f(12) =$$
$$= f(12) - f(4) = f(4) - f(2) = f(2) - f(1) = 1.$$

$$f(x;x) = 0$$

MA f COME SI COMPORTA?

$$f(a^3;b)$$

$$f(a;b^3)$$

$$f(\phi(na);\phi(nb)) = f(an;bn)$$

$$f(n\phi(a);n\phi(b))$$

PROPRIETÀ FIGA $a \geq 2, b \geq 2$.

$$f(ab) = f(a) + f(b) - g((a,b))$$

IN SENSO DI MCD.

DOVE $g((a,b)) = 0$ SE $2 \mid (a,b)$

$= 1$ SE $2 \nmid (a,b)$

C'HO IL 2.

$$f(2^n) = n$$

$$f(3^n) = n+1$$

3^n

$2 \cdot 3^{n-1}$

$2 \cdot 3^{n-2}$

QUESTA NON È DIMOSTRATA

$f(p^n)$ CRESCE DI $f(p) - 1$

$\forall p$ DISPARI

E ORA LO DIMOSTRIAMO.

INDUZIONE

$$f(ab) \stackrel{?}{=} f(a) + f(b) - g((a,b))$$

$$f(\phi(ab)) + \cancel{1} \stackrel{?}{=} f(\phi(a)) \cancel{+1} + f(\phi(b)) + 1 - g((a,b))$$

$a = 2^m \cdot \prod p_i^{\alpha} \prod r_i^{\delta}$

$b = 2^n \prod q_i^{\beta} \prod r_i^{\delta}$

DOVE r_i SONO I PRIMI DISPARI IN COMUNE E P E Q GLI ALTRI

$$\phi(a) = 2^{m-1/m} \prod (p_i - 1) \cdot p_i^{\alpha-1} \cdot \prod (r_i - 1) \cdot r_i^{\gamma-1}$$

$$\phi(b) = 2^{n-1/n} \prod (q_i - 1) \cdot q_i^{\beta-1} \prod (r_i - 1) \cdot r_i^{\delta-1}$$

$$\phi(ab) = 2^{m+n-1/m+n} \cdot \prod (p_i - 1) \cdot p_i^{\alpha-1} \prod (q_i - 1) \cdot q_i^{\beta-1} \cdot \prod (r_i - 1) \cdot r_i^{\gamma\delta-1}$$

$$f(\phi(a)) = (m-1)/m + \sum f(p_i - 1) + \sum f(r_i - 1) + \sum f(p_i) \cdot (\alpha - 1) + \sum f(r_i) \cdot (\gamma - 1) - (\# p, \# r)$$

$$f(\phi(b)) = (n-1)/n + \ldots$$

$$f(\phi(ab)) = (m+n-1)/(m+n) + \sum f(p_i - 1) + \sum f(r_i - 1) + \sum f(q_i - 1) + \sum f(p_i) \cdot (\alpha - 1) + \sum f(q_i)(\beta - 1) + \sum f(r_i)(\gamma\delta - 1) - (\# p, \# q, \# r)$$

MA NON TUTTO

$$\sum f(r_i - 1) + \cancel{\# p, \# q, \# r} = \sum f(r_i) + \cancel{\# p, \# r} + \cancel{\# q \# r}$$

$$\phi(r_i) = r_i - 1$$

$$f(r_i) = 1 + f(r_i - 1)$$

I CONTI VENGONO.

$f(\sim$ 13, 21

A UN CERTO PUNTO DIVENTANO PARI.

USO LA PROPRIETÀ FIGA

$$f(n\phi(a), n\phi(b)) = f(n\phi(a)) - f(n\phi(b)) =$$

$$= f(n) + f(\phi(a)) - f(n) - f(\phi(b)) = f(a,b).$$

$$f(\phi(ma), \phi(mb)) = f(\phi(ma)) - f(\phi(mb)) =$$

$$= f(ma) - f(mb) = f(a) + f(m) - f(m) - f(b) = f(a,b)$$

$f(a^3) = 3f(a)$ SE a È PARI

$f(a^3) = 3f(a) - 2$ SE a È DISPARI.

QUINDI $f(a,b)$ CONSERVA LA SUA PARITÀ

COMPOSIZIONI DI ϕ ☑

FINE.

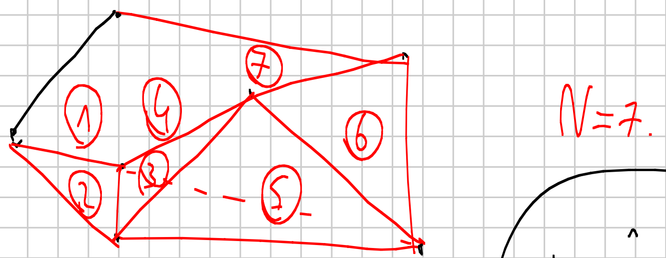
ESERCIZI

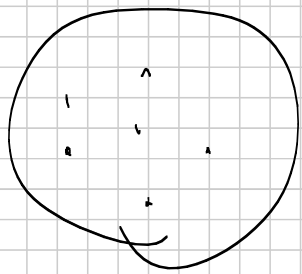
1) $(a,b)=1$ $a \geq 2$, $b \geq 2$.

$$\sum_{i=1}^{b-1} \left\lfloor i \frac{a}{b} \right\rfloor = \sum_{i=1}^{a-1} \left\lfloor i \frac{b}{a} \right\rfloor$$

2) HO DUE NUMERI (a,b) SCRITTI SU UNA LAVAGNA, E LI POSSO SOSTITUIRE CON $(\tau(a), 2^{b-1})$ O $(2^{a-1}, \tau(b))$. PARTENDO DA $(99,100)$ È POSSIBILE OTTENERE 2 NUMERI UGUALI?

3) DATO G, FORMATO DA $n \in \mathbb{N}$ PUNTI NEL PIANO A TRE A TRE NON ALLINEATI, E SEGMENTI CHE LI COLLEGANO. UNA TRIANGOLAZIONE DI QUESTI PUNTI È UN INSIEME DI SEGMENTI $\in G$ TALI CHE NON SI INTERSECANO. OGNI SEGMENTO NON TRACCIATO INTERSECA UN SEGMENTO $\in G$. ALLA FINE OGNI POLIGONO RIMASTO SARÀ UN TRIANGOLO. SIA N IL NUMERO DI TRIANGOLI IN G. DIMOSTRARE CHE N DIPENDE SOLO DAI PUNTI DI G E NON DAI SUOI SEGMENTI.





4) DATA UNA SCACCHIERA 2014×2014 COLORIAMO DI ROSSO I CENTRI DI 2014 DELLE SUE CASELLE. ESISTE UNA RETTA CHE PASSA PER 3 PUNTI ROSSI?

(SALA'S VERSION): DATO IL PRODOTTO CARTESIANO $G = \{0, \dots, 2013\}^2$ ESISTONO 2014 PUNTI DI G A TRE A TRE NON ALLINEATI?

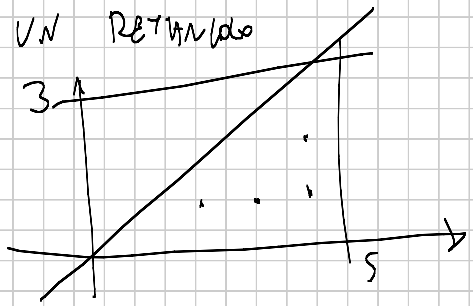
1) $\sum_{i=1}^{b-1} \left\lfloor \frac{i\,a}{b} \right\rfloor = \frac{(a-1)(b-1)}{2}$

• SCAMBRE1: ACCOPPIO $\left\lfloor i\,\frac{a}{b} \right\rfloor$ CON $\left\lfloor (b-i)\,\frac{a}{b} \right\rfloor$

• CONTIAMO IL NUMERO DI INTERI POSITIVI K PER L'EQUAZIONE $K = ax+by$ NON HA SOLUZIONE IN $\mathbb{Z}^+$.

$K \equiv 1 \ (b)$ (LAVORO DA FARE A CASA)

• FAI UN RETTANGOLO



$a=5$ $b=3$

L'ESPRESSIONE È UGUALE AI PUNTI A COORDINATE INTERE $\frac{(a-1)(b-1)}{2}$

---

2) $f: \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{N}$ $f(n) = f(\tau(n)) + 1$ STRONZATE

$f(100) - f(99) = 1$ SI

QUINDI PARI

$f(a,b) = f(a) - f(b)$

$f(a,b) - f(2^{a-1}, \tau(b)) = 2.$

$(100; 99) \to (2^{99}; 6) \to (2^{2^{99}-1}; 4)$

$(2^{2^{2^{99}-1}-1}; 3) \to (2^{2^{2^{2^{99}-1}-1}-1}; 2)$

$$\left(2^{2^{2^{11}-1}-1}-1 \,;\, 2^{2-1}\right) \to \left(2^{2^{11}-1}-1 \,;\, 2^{2^{2-1}}-1\right)$$

$2^{2-1}=2.$

τ DECRESCE

$\downarrow$ 2 $\downarrow$ 2^{2-1} FA 2!

$$\cancel{f(n)=f(\tau(n))+1}$$

$n \leftarrow 2$ $\cancel{f(2)=f(2)+1}$

AVEVAMO | PRIMA

$\emptyset$ 1 | $\leftarrow$ NOI NON CI POTEVAMO MAI ENTRARE

$\uparrow$ PUNTO CRITICO $\uparrow$ VERO

τ 1 2 $\uparrow$ PERÒ CI ARRIVIAMO

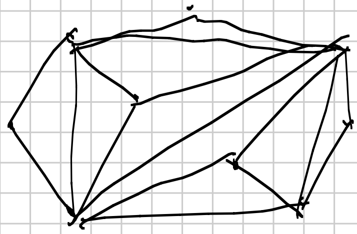
IDEA: PERDO UNO DEI 2 A 2 FACENDO MOLTE τ.

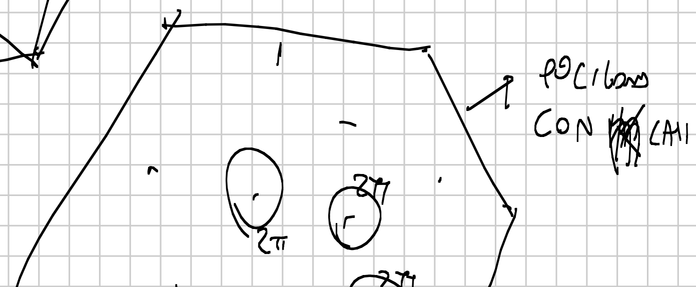
IDEA: 2^{2-1} FA 2.

QUINDI MI BASTA FARE MOLTE τ ALL'ALTRO.

MORALE: CONTROLLATE BENE LE IPOTESI DELLE FUNZIONI

3)



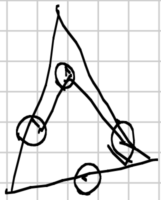


CONVEX HULL:

IL PIÙ PICCOLO POLIGONO CONVESSO CHE CONTIENE I MIEI PUNTI.

$\Downarrow$

DEVE AVERE COME VERTICI I MIEI PUNTI



DENOTIAMO CON: N IL NUMERO DI TRIANGOLI FINALI;

m PUNTI SULL'INVILUPPO;

K PUNTI DENTRO ALL'INVILUPPO.

ORA: DOUBLE COUNTING SULLA SOMMA DEGLI ANGOLI INTERNI DEI TRIANGOLI:

$$N\cdot\pi = K\cdot 2\pi + (m-2)\cdot\pi$$

QUINDI $N = 2K + m - 2$.

4) IL PIÙ ATTESO
IL PIÙ DESIDERATO
IL PIÙ $WAG

- INDUZIONE <u>NON FUNZIONA</u>
- ALGEBRA <u>NON FUNZIONA</u>
- DOUBLE COUNTING

MA SI PUÒ FARE?

PRENDO UN PRIMO p.

E CONSIDERO $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \setminus 0$.

$S_p=\{1,\dots,p-1\}$ E CONSIDERO LA PERMUTAZIONE

$$\sigma : S_p \to S_p.$$

UNA PERMUTAZIONE È BELLA SE: $\sigma(1)=1$

$\sigma(p-1)=p-1$ E $\dfrac{\sigma(a)-\sigma(b)}{a-b} \equiv \dfrac{\sigma(a)-\sigma(c)}{a-c} \ (p)$

IMPLICA $b=c$.

SUPPONIAMO ESISTA. $\sigma(x)=x^{-1}$

$$\frac{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}{a-b} \equiv \frac{\frac{1}{a}-\frac{1}{c}}{a-c} \ (p) \to \frac{1}{-ab} \equiv \frac{1}{-ac} \to b=c$$

$X=\{2,\dots,p-2\}$

ABBIAMO UNA PERMUTAZIONE DA $X \to X$

TALE CHE $\dfrac{\sigma(a)-\sigma(b)}{a-b} \not\equiv \dfrac{\sigma(a)-\sigma(c)}{a-c} \ (p)$

ESISTE UNA PERMUTAZIONE SU $p-3$ ELEMENTI TALE CHE

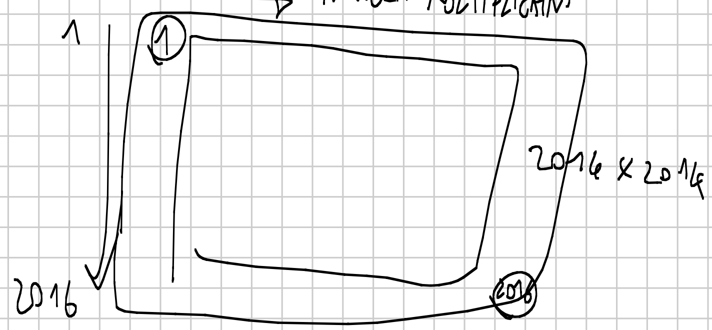
SE $a\neq b$, $a\neq c$, $b\neq c$ ALLORA

$$\boxed{\frac{\sigma(a)-\sigma(b)}{a-b} \neq \frac{\sigma(a)-\sigma(c)}{a-c}}$$

PERCHÉ DIVERSI MODULO p.

$p=2017$.

← GLI INVERSI MOLTIPLICATIVI



□

Senior 2014 – Combinatoria Advanced

Titolo nota 06/09/2014

Funzioni generatrici.

Serie "formale" $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

che raccoglie in un'unica informazione tutti i dati a_n.

Per esempio: quanti sono i sottoinsiemi di 2 elementi di un insieme di n elementi: $\binom{n}{2}$.

$$\to \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n}{2} x^n .$$

Corrispondenza $\{a_n\}_{n\geq 0} \leftrightarrow$ serie $\sum a_n x^n = f(x)$

$\{a_n\}_{n\geq 0} \leftrightarrow f(x)$

Oss. 1 $\{a_{n+1}\} \leftrightarrow \dfrac{f(x)-f(0)}{x}$

$$\frac{\sum a_n x^n - a_0}{x} = \sum_{n\geq 1} a_n x^{n-1} = \sum_{n\geq 0} a_{n+1} x^n .$$

Induttivamente, $\{a_{n+h}\} \longleftrightarrow \dfrac{f(x)-a_0-a_1x-\dots-a_{h-1}x^{h-1}}{x^h}$

Applicazione 1: Numeri di Fibonacci

F_n : $\boxed{F_0=0 \quad F_1=1}$ $\quad F_{n+2}=F_{n+1}+F_n$, $n\geq 0$.

$$F(x) = \sum_{n\geq 0} F_n x^n$$

$$\sum_{n\geq 0} F_{n+2} x^n = \sum_{n\geq 0} F_{n+1} x^n + \sum_{n\geq 0} F_n x^n$$

$$\frac{F(x)-F_0-F_1x}{x^2} = \frac{F(x)-F_0}{x} + F(x)$$

Fatti i calcoli, $F(x) = \dfrac{x}{1-x-x^2}$.

$1-x-x^2 = (1-\alpha x)(1-\beta x) \qquad \alpha, \beta = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

$$\frac{x}{1-x-x^2} = \frac{a}{1-\alpha x} + \frac{b}{1-\beta x} = a \sum_{n \geq 0} \alpha^n x^n + b \sum_{n \geq 0} \beta^n x^n$$

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right]$$

Moltiplicare per n: $\qquad \{a_n\} \to \{n a_n\}$

Idea: Se $\underset{\sum a_n x^n}{f(x)} \leftrightarrow \{a_n\}$ allora $(xD) f(x) \leftrightarrow \{n a_n\}$

$xD f(x) = x \dfrac{d}{dx} f(x)$

Evidente, $(xD)\, a_n x^n = x\, n a_n x^{n-1} = n a_n x^n$.

Esempio 2 Voglio calcolare $\displaystyle\sum_{n \geq 0} \frac{n^2+3n+7}{n!} \leftrightarrow g(n)$

$a_n = \dfrac{1}{n!} \leftrightarrow \sum \dfrac{1}{n!} x^n = e^x$

$\dfrac{n}{n!} \leftrightarrow (xD) e^x = x e^x$

$\dfrac{n^2}{n!} \leftrightarrow (xD)^2 e^x = (xD)(xe^x) = x(e^x + xe^x) = xe^x + x^2 e^x$

$\sum g(n) x^n = xe^x + x^2 e^x + 3xe^x + 7e^x = e^x(x^2+4x+7)$

Pongo $x=1 \to$ Somma $= e \cdot 12$.

Esempio 3 (successioni ricorrenti).

$a_{n+1} = 2a_n + n \qquad a_0 = 1$.

I primi valori sono: $1, 2, 5, 12, 27, 58, 121, \ldots$

$A(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$.

$$\frac{A(x)-A(0)}{x} = 2A(x)+\frac{x}{(1-x)^2}$$

$A(0)=1$

sviluppo i calcoli

$$A(x) = \frac{1-2x+2x^2}{(1-x)^2(1-2x)}$$

$n \leftrightarrow \sum n x^n$
$= x \sum n x^{n-1} =$
$x \frac{d}{dx} \sum x^n = x \frac{d}{dx} \frac{1}{1-x}$
$= \frac{x}{(1-x)^2}$

$$= \frac{a}{(1-x)^2} + \frac{b}{1-x} + \frac{c}{1-2x} = -\frac{1}{(1-x)^2} + \frac{2}{1-2x}$$

- $\frac{1}{(1-x)^2} = \frac{d}{dx}\frac{1}{1-x} = \frac{d}{dx}\sum x^n = \sum n x^{n-1} = \sum (n+1) x^n$
- $\frac{2}{1-2x} = 2\cdot\sum (2x)^n = \sum 2^{n+1} x^n$

$a_n = 2^{n+1} - (n+1)$.

<u>Oss. 3</u> $f \leftrightarrow \{a_n\}$ $g \leftrightarrow \{b_n\} \Rightarrow fg \leftrightarrow \left\{\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right\}$

$$\left(\sum a_i x^i\right)\left(\sum b_j x^j\right) = \sum_n \left(\sum_{i+j=n} a_i b_j\right) x^n$$

<u>Caso particolare</u>: Se $\frac{1}{(1-x)^k} = \underbrace{(1+x+x^2+\dots)\dots(1+x+x^2+\dots)}_{k \text{ volte}}$

il coefficiente di x^n è uguale al numero di modi di scrivere x^n come $x^{i_1}\cdot x^{i_2}\dots x^{i_k}$ con $i_1+i_2+\dots+i_k=n$

= n° di modi di scrivere n come somma di interi ≥ 0.

$\alpha \in \mathbb{R}$ $\quad (1+x)^\alpha = \sum_{n\geq 0} \binom{\alpha}{n} x^n$

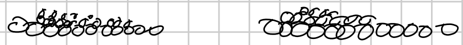
$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-(n-1))}{n!}$$

Applicando questa formula si ottiene che il coeff di x^n in è $\binom{n+k-1}{n}$.

Oss. 4 $\quad f \leftrightarrow \{a_n\} \iff \dfrac{f}{1-x} \leftrightarrow \left\{\sum_{j=0}^{n} a_j\right\}$

$$\frac{f(x)}{1-x} = f(x)(1+x+x^2+\dots) = \left(\sum a_k x^k\right)(1+x+x^2+\dots)$$

Esercizio (fontana di monete).



← Ogni riga deve consistere di un blocco di monete in posizioni consecutive

Problema: $1^\wedge$ riga con k monete. Quante "fontane" si possono fare con la prima riga di k monete?

$\boxed{\text{Incognita}: f(k)}$

Sol. Posta la prima riga, nella seconda ci possono essere j monete con $0 \le j \le k-1$.

Se $j=0$ ho 1 fontana

se $j>0$ ho $(k-j)f(j)$ fontane

Quindi $f(k) = \sum_{j=1}^{k} (k-j) f(j) + 1 \qquad (k \geq 1)$.

Passo alle funzioni generatrici.

A sinistra $\sum_{k\geq 0} f(k) x^k = F(x)$

A destra moltiplico $F(x) - \underset{0}{\underset{\shortparallel}{F(0)}}$ per $\sum n x^n = \dfrac{x}{(1-x)^2}$

Ottengo

$$F(x) = \frac{x}{(1-x)^2} F(x) + \frac{1}{1-x}$$

Risolvendo, si ottiene $F(x) = \dfrac{x(1-x)}{1-3x+x^2}$

I primi numeri sono: $0, 1, 1, 2, 5, 13, 34, 89, \dots$

"Fibonacci ogni 2"? Esercizio.

$\frac{1}{1-x-x^2}$ è legato alle radici α,β $\quad \alpha+\beta=1 \quad \alpha\beta=-1$

$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=1+2=3$

$\alpha^2\beta^2=1$

$\frac{1}{1-3x+x^2}$ è legato alle radici α^2,β^2.

Numeri di Catalan

(Parentesi)

1	x_1	1	modi
2	x_1x_2	1	
3	$(x_1x_2)x_3 \quad x_1(x_2x_3)$	2	
4	$((x_1x_2)x_3)x_4 \quad (x_1x_2)(x_3x_4)$		
	$(x_1(x_2x_3))x_4 \quad x_1((x_2x_3)x_4)$	5	modi
	$x_1(x_2(x_3x_4))$		

c_n = n° dei modi

$C(x)=\sum_{n\geq 1} c_n x^n \qquad c_0=0$

Idea: formula ricorsiva.

Caso n : L'ultimo passaggio sarà moltiplicare il risultato dei primi k per quello degli ultimi $n-k$

$(\underbrace{\qquad\qquad}_{k})(\underbrace{\qquad\qquad}_{n-k})$

$$c_n=\sum_{k=1}^{n-1} c_i c_{n-i} \qquad n\geq 2$$

$$C(x)=c_1x+\sum_{n\geq 2}\left(\sum_{k=1}^{n-1} c_k c_{n-k}\right)x^n = x+[C(x)]^2$$

Eq. di 2° grado.

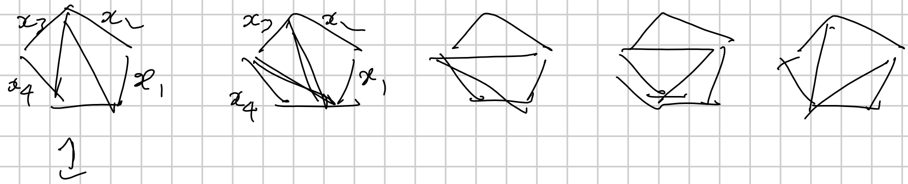
Sol
$$C(x)=\frac{1\pm\sqrt{1-4x}}{2} \qquad c_0=0$$

$$(1-4x)^{1/2} = \sum_{n\geq 0} \binom{1/2}{n} (-4)^n x^n$$

$$c_n = \frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1} \longrightarrow$$ OCCHIO: È UN NUMERO INTERO!!

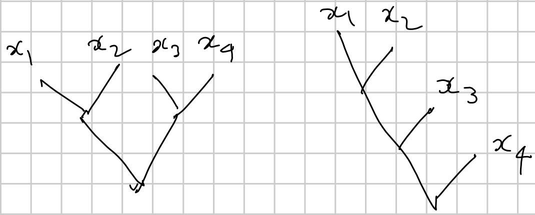
MODI EQUIVALENTI:

· TRIANGOLAZIONI DI UN POLIGONO



$(x_1x_2)(x_3x_4)$ $((x_1x_2)x_3)x_4$

· ALBERI CON RADICE



Posso costruire due dadi con 8 facce (ma vale anche per 6) numerate in modo diverso da 1,2,3,...,8 in modo tale che la probabilità di ottenere con due dadi un numero k sia la stessa che numerando le facce dei dadi con i numeri 1,2,...,8?

Dado → associo una funzione generatrice

Dado 1,2,...,8 → $x+x^2+\dots+x^8$

Dado 3,3,5,6,6,7,8,8 → $2x^3+x^5+2x^6+x^7+2x^8$

Regola: se il dado contiene a_k volte il valore k gli associo $\sum a_k x^k$.

Se tiro due dadi "standard" qual è la funzione generatrice dei possibili valori?

$$(x+x^2+\dots+x^8)^2 = \left[\frac{x\,(x^8-1)}{(x-1)}\right]^2$$

$$= \left[x(x+1)(x^2+1)(x^4+1)\right]^2 \quad (*)$$

Se ho due dadi non standard, con funzioni generatrici $A(x)$, $B(x)$, voglio che:

- $A(x)B(x) = (*)$
- $A(x)$ e $B(x)$ abbiano coefficienti interi ≥ 0.
- $A(0)=B(0)=0$ e $A(1)=B(1)=8$.

(8 facce ciascuno).

$A(x)$, $B(x)$ devono dividere $(*)$. $x \mid A(x)$ $x \mid B(x)$

Quanti fattori possono avere? 3 ciascuno (ogni fattore tra valutato in 1 è uguale a 2).

Ci sono altre 3 (+3) possibilità

2 fattori da una parte

1 fattore per ciascuno

2 fattori dall'altra parte

I dadi possibili, oltre a quelli standard, sono:

$\{A, B\} =$ (1,2,2,3,3,4,4,5) (1,3,5,5,7,7,9,11)

(1,2,3,3,4,4,5,6) (1,2,5,5,6,6,9,10)

(1,2,2,3,5,6,6,7) (1,3,3,5,5,7,7,9).

FUNZIONI GENERATRICI ESPONENZIALI

$$f(x) = \sum a_n \frac{x^n}{n!} \qquad \left(\text{invece che } f(x) = \sum a_n x^n\right)$$

Oss. 1 $\quad f'(x) \leftrightarrow \{a_{n+1}\}$

$$\frac{d}{dx} a_n \frac{x^n}{n!} = \frac{n a_n x^{n-1}}{n!} = \frac{a_n x^{n-1}}{(n-1)!} \rightsquigarrow a_{n+1} \frac{x^n}{n!}$$

$$D^k f(x) \leftrightarrow \{a_{n+k}\}$$

Oss. 2 $\quad (xD) f \leftrightarrow \{n a_n\}_{n \geq 0}$

$$(xD) \frac{a_n x^n}{n!} = x \frac{n a_n x^{n-1}}{n!} = \frac{n a_n x^n}{n!}$$

Oss. 3 $\quad f \leftrightarrow \{a_n\} \qquad g \leftrightarrow \{b_n\}$

$$fg \leftrightarrow \left\{ \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k b_{n-k} \right\}$$

Infatti $\quad \left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i \frac{x^i}{i!}\right)\left(\sum_{j=0}^{\infty} b_j \frac{x^j}{j!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{i+j=n} \frac{a_i b_j}{i!\,j!}\right) x^n$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \qquad i \to k \qquad j \to n-k$$

Esempio di applicazione : numeri di Bell

= partizioni di un insieme

$b(n) =$ n° di possibili partizioni di un insieme di n elementi

$|X| = 3 \qquad X = \{1,2,3\}$

$\{1,2,3\} \qquad \{1,2\} \cup \{3\} \qquad \{1,3\} \cup \{2\} \qquad \{2,3\} \cup \{1\} \qquad \{1\} \cup \{2\} \cup \{3\}$

Osservazione:

$$\boxed{b(n+1) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b(k)} \leftarrow$$

Spiegazione: Prendo l' $(n+1)$-elemento. Questo può stare con altri h elementi $0 \le h \le n$, quindi appartiene ad un sottoinsieme con $h+1$ elementi, $1 \le h+1 \le n+1$

$h+1 = n-k+1 \qquad h = n-k \qquad k = n-k$

$0 \le k \le n.$

Questi elementi possono essere scelti in $\binom{n}{k}$ modi.

e poi restano k elementi da ripartire

Se $B(x) = \sum \frac{b(n)x^n}{n!}$

$$B'(x) = e^x B(x)$$

$$\frac{d}{dx}\log B(x) = \frac{B'(x)}{B(x)} = e^x$$

$B(0)=1$

$\log B(x) = e^x + c \qquad 0 = \log B(0) = e^0 + c$

$1+c=0$

$c=-1$

$\rightsquigarrow \quad e^x - 1$

$$\boxed{B(x) = e^{e^x-1}}$$

Partizioni di un numero

$n = a_1 + a_2 + \dots + a_k \qquad a_i \ge 0$

$a_1 \ge a_2 \ge \dots \ge a_k$

$10 = 7+3 = 3+7$ sono la stessa partizione.

Funzione generatrice:

$$\frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{1-x^2} \cdot \frac{1}{1-x^3} \cdots = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^n}$$

$(1+x+x^2+\dots)(1+x^2+x^4+\dots)(1+x^3+x^6+\dots)$

Quando si ottiene x^n?

Esattamente quando prendo un termine x^{a_1} del primo fattore, x^{2a_2} del secondo fattore, ..., in modo che

$$a_1 + 2a_2 + \dots = n$$

$\to$ corrisponde a una partizione di n con a_1 addendi $= 1$, a_2 addendi $= 2$, ...

<u>Esercizio</u> Usando questa funzione generatrice, dimostrare che:
il n° di partizioni di n con addendi tutti dispari è uguale al n° di partizioni di n con addendi tutti distinti.

Hint: funzioni generatrici $\frac{1}{1-x}\frac{1}{1-x^3}\frac{1}{1-x^5}\dots$

e $(1+x)(1+x^2)(1+x^3)\dots$

FUNZIONI SIMMETRICHE

<u>ELEMENTARI</u>: $e_r = \sum_{i_1<i_2<\dots<i_r} x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_r}$

$e_0 = 1$

Funzione generatrice:

$$E(t) = \sum_{r\geq 0} e_r t^r = \prod_{i\geq 1} (1 + x_i t)$$

(Per funzioni simmetriche su n elementi, $i = 1, \dots, n$).

<u>COMPLETE</u> (somme di tutti i monomi di grado fissato)

Es. $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$

h_r = funzione completa di grado r $\quad (h_0 = 1, h_1 = e_1)$

Funzione generatrice:

$$H(t) = \sum_{r\geq 0} h_r t^r = \prod_{i\geq 1} (1-x_i t)^{-1}$$

$$\left((1-x_i t)^{-1} = 1 + x_i t + x_i^2 t^2 + \dots \right)$$

RELAZIONE $\quad H(t)E(-t) = 1$

cioè: $\quad \sum_{r=0}^{n} (-1)^r e_r h_{n-r} = 0 \quad$ per $n \geq 1$

POWER SUMS (Newton)

$$p_r = \sum x_i^r$$

Funzione generatrice: $\quad P(t) = \sum p_r t^{r-1} = \sum_{i\geq 1} \sum_{r\geq 1} x_i^r t^{r-1}$

$$= \sum_{i\geq 1} \frac{x_i}{1-x_i t} = \sum_{i\geq 1} \frac{d}{dt} \log \frac{1}{1-x_i t}$$

$$P(t) = \frac{d}{dt} \sum_{i\geq 1} \log \frac{1}{1-x_i t} = \frac{d}{dt} \log \prod_{i\geq 1} \frac{1}{1-x_i t} = \frac{d}{dt} \log H(t)$$

$$= H'(t)/H(t)$$

Analogamente otteniamo

$$P(-t) = \frac{E'(t)}{E(t)}$$

$$H(t)P(t) = H'(t) \qquad E(t)P(-t) = E'(t)$$

$$\Downarrow$$

coeff di t^{n-1}

$$\sum_{r=1}^{n} (-1)^{r-1} p_r e_{n-r} = n e_n$$

$$n e_n - p_1 e_{n-1} + p_2 e_{n-2} - \dots \pm p_n e_0 = 0.$$

$$\underbrace{n e_n}_{p_0 e_n}$$

(VEDERE TST 2014, N, 2)

DENSITÀ

$A \subseteq \mathbb{N}$ densità $(A) = \lim_{n \to \infty} \frac{|A \cap \{1, \dots, n\}|}{n}$

densità (pari) $= 1/2$

Dimostrare che esistono infiniti n che non si scrivono come $a^3 + b^5 + c^7 + d^9 + e^{11}$ $(*)$

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{11} < 1$$

$A = \{$insieme degli n rappresentabili$\}$

Claim: densità $(A) = 0$

Fissiamo $M > 0$ e studiamo $A \cap \{1, \dots, M\}$

Un intero qui dentro si scrive come in $(*)$ con $a^3 \leq M$, $b^5 \leq M$, $\dots$, $e^{11} \leq M$

L'intersezione contiene al massimo

$$\left(\lfloor M^{1/3} \rfloor + 1\right)\left(\lfloor M^{1/5} \rfloor + 1\right) \dots \left(\lfloor M^{1/11} \rfloor + 1\right)$$

elementi. Quindi al più $2^5 \cdot M^{1/3 + 1/5 + \dots + 1/11}$ elementi. Il rapporto è $\frac{2^5}{M^{1 - (1/3 + \dots + 1/11)}} \to 0$

Se scelgo $M >> 0$, allora il valore di questo rapporto è $\leq 1/2$, e quindi almeno metà degli interi fino a M NON si rappresenta

Problema + tosto

Dimostrare che per ∞ valori di n i numeri

$n+1$, $n+2$, $n+3$ sono tutti liberi da quadrati

Per assurdo: sono in numero finito.

Allora (con finite eccezioni) tra i numeri

$$4K, \quad 4K+1, \quad 4K+2, \quad 4K+3$$

almeno 2 $\boxed{\text{non}}$ sono liberi da quadrati.

(" densità (sqr free) $\leq 1/2$ ")

Ma in realtà densità ($\square$ - free) $> \frac{1}{2}$

$$\text{densità}(\square\text{-free}) = 6/\pi^2$$

$A_M = \{1, \dots, M\} \cap \{\square\text{-free}\}$. Nel caso fortunato

$$M = (p_1 p_2 \cdots p_k)^2$$

$$\# A_M = M \cdot \prod_i \left(\frac{p_i^2 - 1}{p_i^2} \right)$$

Moralmente, bisogna controllare i primi fino a $\sqrt{M}$

e quindi posso rimpiazzare M con

$$\lfloor \sqrt{M} \rfloor^2$$

al costo di un errore $\simeq 2\sqrt{M} + 1$

$$\lim_{M\to\infty} \frac{\# A_M}{M} = \lim_{M\to\infty} \prod_{p<\sqrt{M}} \left(1-\frac{1}{p^2}\right)$$

$$= \prod_{p \text{ primo}} \left(1 - 1/p^2\right)$$

$$\prod_p \left(1-\frac{1}{p^2}\right)^{-1} = \prod_p \left(1+\frac{1}{p^2}+\frac{1}{p^4}+\dots\right)$$

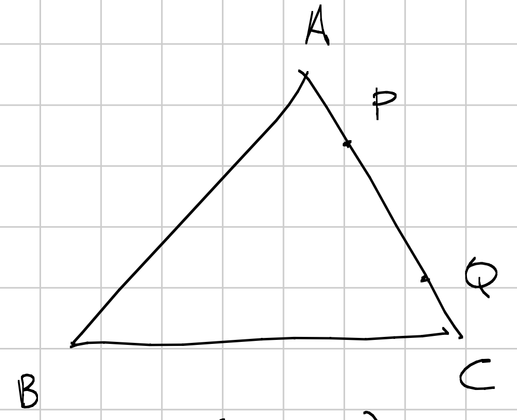
$$= \sum_n 1/n^2 < 2$$

su tutti gli interi

$$< 1+\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)} = 2$$

G1 - Advanced - Sam

Titolo nota 02/09/2014



$$AP + BC = AB + CQ$$

$$P = (p : 0 : 1-p)$$

$$Q = (q : 0 : 1-q)$$

$$0 \leq p, q \leq 1$$

$$A = (1 : 0 : 0)$$

$$A - P \left(= \overrightarrow{AP}\right) = (1-p, 0, p-1) = (x, y, z)$$

$$\operatorname{dist}(A,P)^2 = -a^2 yz - b^2 xz - c^2 xy$$

$$AP = \sqrt{-b^2(1-p)(p-1)} = b(1-p)$$

$$CQ = bq$$

$$\boxed{b(1-p) + a = c + bq}$$

$$R \text{ pt. med di } PQ = \left(\frac{p+q}{2} : 0 : \frac{2-p-q}{2}\right)$$

$$\boxed{\frac{p+q}{2-p-q} = \frac{a}{c}} \qquad q = \frac{b(1-p) + a - c}{b}$$

$$\frac{\cancel{bp}+b-\cancel{bp}+a-c}{2b-\cancel{bp}-b+\cancel{bp}-a+c}=\frac{a}{c}$$

$$bc+\cancel{ac}-c^2=ab-a^2+\cancel{ac}$$

$$a^2-c^2+b(c-a)=0$$

$$(a+c)(a-c)+b(c-a)=0$$

$$(a-c)(a+c-b)=0 \quad\Rightarrow\quad a=c.$$

<u>Distanza tra due punti</u>

$$P=(p_1:p_2:p_3) \qquad Q=(q_1:q_2:q_3)$$

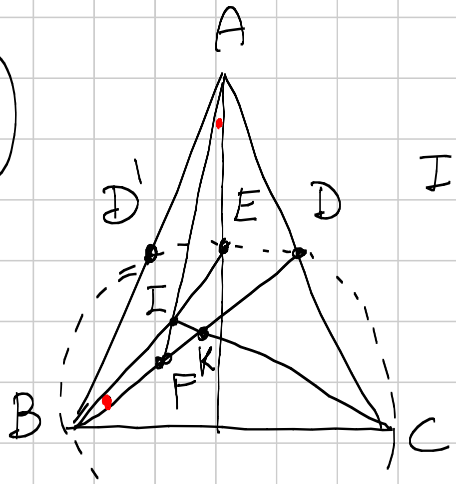
$$\rho=p_1+p_2+p_3 \qquad \sigma=q_1+q_2+q_3$$

$$PQ^2=-a^2\left(\frac{p_2}{\rho}-\frac{q_2}{\sigma}\right)\left(\frac{p_3}{\rho}-\frac{q_3}{\sigma}\right)-b^2(\ 1\ )(\ 3\ )$$

$$-c^2(\ 1\ )(\ 2\ )$$

$\rho=\sigma=1$ semplifica le cose.

2)



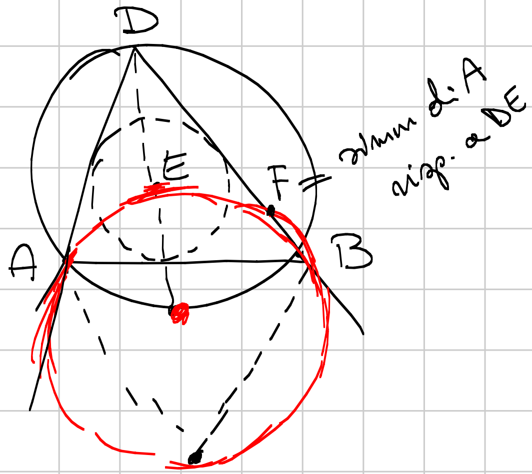
I incentro di $\overset{\triangle}{KAB}$

E pt. medio di $\overset{\frown}{DD'}$

$\Rightarrow BE$ bisett. di $A\hat{B}D$

$\Rightarrow E$ incentro di $\overset{\triangle}{ABD}$

Il centro della cf. per A, E, B sta su DE



nel triangolo ABD

$a = BD \qquad AD = b \qquad AB = c = 2b$

$$E = (a : b : c)$$

$$F = (0 : b : a-b)$$

$$I = \big(a(a-b) : bc : c(a-b)\big)$$

$$C = (-1 : 0 : 2) \qquad K = \left(0 : \frac{b^2}{a^2} : 1 - \frac{b^2}{a^2}\right)$$

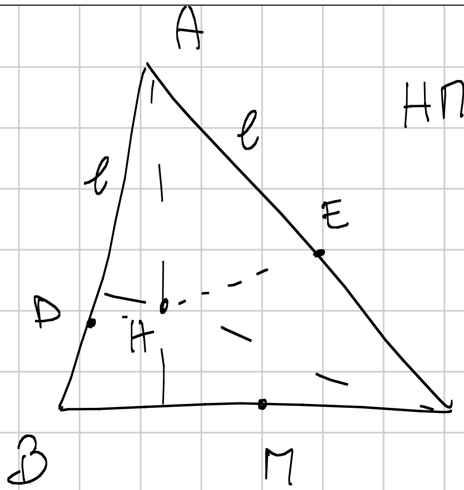
$$D = (0 : 0 : 1)$$

$$DK^2 = \frac{b^4}{a^2} \quad \longleftarrow \quad D - K = \left(0 : -\frac{b^2}{a^2} : \frac{b^2}{a^2}\right)$$

$$DK = \frac{b^2}{a} \qquad a \cdot DK = b^2$$

$$\boxed{DB \cdot DK = DA^2}$$

3)



$HM \perp$ asse rad delle cf. circo a $\hat{ABC}$ e $\hat{ADE}$

$$H = \left(\frac{1}{b^2+c^2-a^2} : \frac{1}{c^2+a^2-b^2} : \frac{1}{a^2+b^2-c^2} \right)$$

$$S_A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2}$$

$$H = \left(\frac{1}{S_A} : \frac{1}{S_B} : \frac{1}{S_C} \right) \qquad S_A S_B + S_B S_C + S_C S_A = S^2$$

$$D = (c-\ell : \ell : 0) \qquad E = (b-\ell : 0 : \ell)$$

$$\det \begin{vmatrix} c-\ell & \ell & 0 \\ b-\ell & 0 & \ell \\ \frac{1}{S_A} & \frac{1}{S_B} & \frac{1}{S_C} \end{vmatrix} = 0$$

$$\ell = \frac{S_A (c S_B + b S_C)}{S_A S_B + S_B S_C + S_C S_A} =$$

$$= \frac{S_A \left(c(a^2+c^2-b^2) + b(a^2+b^2-c^2) \right)}{2 S^2} =$$

$$= \frac{S_A}{2S^2} (c+b)(a-b+c)(a+b-c) =$$

$$= \frac{(b^2+c^2-a^2)(b+c)}{(a+b+c)(b+c-a)}$$

cf per $A, B, C = \{a^2yz + b^2xz + c^2xy = 0\}$

$$-a^2yz - b^2xz - c^2xy + (x+y+z)\cdot(ux + vy + wz) = 0$$

$A: u = 0$

$D: -c^2(c-\ell)\ell + c\cdot(v\ell) = 0$

$E: -b^2(b-\ell)\ell + b(\ell w) = 0$

$v = c(c-\ell)$

$w = b(b-\ell)$

Asse rad tra circoscritta e generica è $ux + vy + wz = 0$

$$c(c-\ell)y + b(b-\ell)z = 0$$

Strada 1: $X = (0 : b(b-\ell) : -c(c-\ell))$

$A = (1 : 0 : 0)$

$XA \perp HM$ conti con formula tipo prod. scalare

Strada 2: punti all'∞.

I pt. $(f:g:h)$ $(f':g':h')$ su $x+y+z=0$ rappresentano rette $\perp$ se e solo se

$$S_A ff' + S_B gg' + S_C hh' = 0$$

1) Troviamo il pt. all'∞ di

$$c(c-\ell)y + b(b-\ell)z = 0$$

in funzione di ℓ

2) troviamo il pt all'∞ di $H\Pi$

3) Imponiamo la perp.tà

4) Ricaviamo ℓ.

$$\begin{cases} px+qy+rz=0 \\ x+y+z=0 \end{cases} \quad \det\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 1 \\ p & q & r \end{vmatrix} =$$

$$= i(r-q) + j(p-r) + k(q-p)$$

$$\boxed{(r-q : p-r : q-p)}$$

<u>Notazione di Conway</u>

$S = 2$ area di ABC

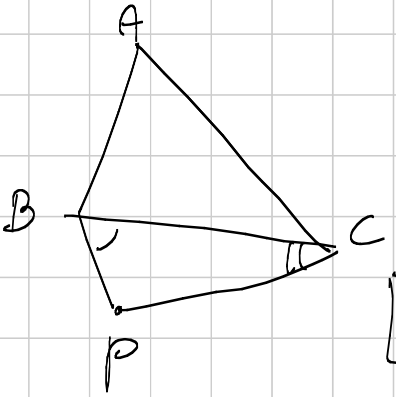
$$S_\varphi = S \cdot \cot\varphi \qquad S_A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2} \quad \text{etc.}$$

$$\begin{cases} S_B + S_C = a^2 \quad \text{e cicliche} \\ S_A S_B + S_B S_C + S_C S_A = S^2 \end{cases} \qquad S_\varphi \cdot S_\psi = S_{\varphi\psi}$$

$$O = (a^2 S_A : b^2 S_B : c^2 S_C) = (S_A(S_B+S_C) : \dots : \dots)$$

$$H = (S^2 + S_B S_C : \dots : \dots)$$

Formula di Conway



$C\hat{B}P = \varphi \qquad B\hat{C}P = \psi$

$$(-a^2 : S_C + S_\psi : S_B + S_\varphi)$$

$\boxed{\varphi > 0 \text{ se } C\hat{B}P \text{ e } C\hat{B}A \text{ hanno orientazione diversa}}$

Rette parallele

$(\cdot)$ $x+y+z=0$ è la retta all'∞. (ℓ_∞)

due rette sono parallele se hanno la stessa intersezione con ℓ_∞

Es: ABC AL bisettrice $\qquad L = (0 : b : c)$

la perp. a BC per L

$$H = \left(\frac{1}{S_A} : \frac{1}{S_B} : \frac{1}{S_C}\right) \qquad \{S_B y - S_C z = 0\} = AH$$

$$A = (1 : 0 : 0)$$

pt all'∞ (l'intersez. con ℓ_∞) di AH $\quad px+qy+rz=0$

$$(-S_C - S_B : S_C : S_B) = H_\infty \qquad (r-q : p-r : q-p)$$

$\Rightarrow$ la perp. a BC per L è la retta per L e H_∞

$$\det \begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & b & c \\ \underbrace{-S_C - S_B}_{-a^2} & S_C & S_B \end{vmatrix} =$$

$$= x(bS_B - cS_C) + y a^2 c - z a^2 b$$

<u>Intercette</u>

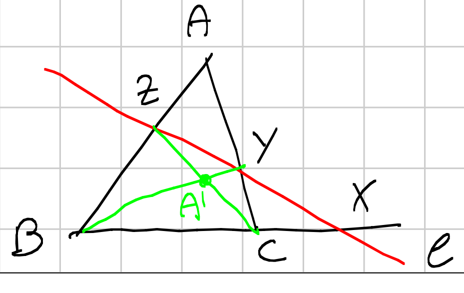
ℓ che interseca i lati in

$$(0 : v : -w), \quad (-u : 0 : w), \quad (u : -v : 0)$$

(devono avere questa forma per Menelao)

è della forma $\dfrac{x}{u} + \dfrac{y}{v} + \dfrac{z}{w} = 0$

$P = (u : v : w)$ TRIPOLO di ℓ rispetto ad ABC



$A' = BY \cap CZ$

$B' = AX \cap CZ$

$C' = AX \cap BY$

$P =$ dove concorrono AA', BB', CC'.

Triangolo pedale

$P = (u : v : w)$

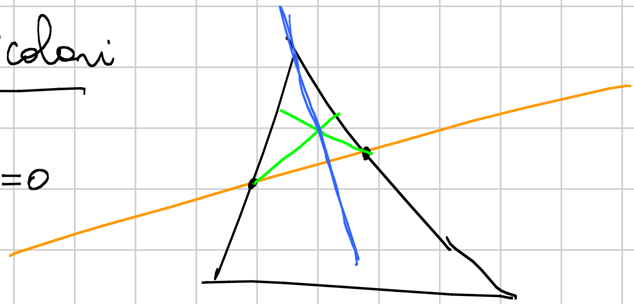
la perp da P a BC $\quad \det \begin{vmatrix} -a^2 & S_C & S_B \\ u & v & w \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0$

$$-(S_B v - S_C w)x + (S_B u + a^2 w) y - (S_C u + a^2 v) z = 0$$

$$P_a = (0 : S_C u + a^2 v : S_B u + a^2 w)$$

$\hookrightarrow$ somma delle coord $= a^2 (u+v+w)$

Rette perpendicolari



$\ell : px + qy + rz = 0$

$(f : g : h)$

$(r-q : p-r : q-p)$

$$(f' : g' : h') = (S_B g - S_C h : S_C h - S_A f : S_A f - S_B g)$$

punto all'∞ delle rette $\perp$ a ℓ.

$\Rightarrow (f : g : h)$ e $(f' : g' : h')$ su $x+y+z=0$ "sono $\perp$" se

$$S_A f f' + S_B g g' + S_C h h' = 0$$

Es: tg alla cf. circo in A è $\quad c^2 y + b^2 z = 0$

Tri tg. ha lati $\quad c^2 y + b^2 z = 0 \quad c^2 x + a^2 z = 0 \quad b^2 x + a^2 y = 0$

$\Rightarrow$ ho vertici

$C'(a^2 : b^2 : -c^2)$, $A'(-a^2 : b^2 : c^2)$, $B'(a^2 : -b^2 : c^2)$

$\Rightarrow$ CC', AA', BB' concorrono in $K = (a^2 : b^2 : c^2)$

Coniugato isogonale $(x : y : z) \to \left(\frac{a^2}{x} : \frac{b^2}{y} : \frac{c^2}{z}\right)$

Coniug. isog di ℓ_∞ : $a^2yz + b^2xz + c^2xy = 0$

Eq. generica di una cf : $-a^2yz - b^2xz - c^2xy +$

$+ (x+y+z)(ux+vy+cz) = 0$

Es: tg alla cf circo in A

$$a^2yz + b^2xz + c^2xy = 0$$

$$\cancel{a^2\frac{y_0z + z_0y}{2}} + b^2\frac{x_0z + \cancel{z_0x}}{2} + c^2\frac{x_0y + \cancel{xy_0}}{2} = 0$$

$$b^2z + c^2y = 0$$

Polare di I : $a^2bz + a^2cy + b^2az + b^2cx + c^2ay + c^2bx$

$= 0$

$$x(b^2c + c^2b) + y(a^2c + c^2a) + z(a^2b + b^2a) = 0$$

Ultime cose: P, Q, R, S con coord. normalizzate

$P - Q = (x_1, y_1, z_1) \qquad R - S = (x_2, y_2, z_2)$

1) $PQ \perp RS$

$$\Updownarrow$$

$$0 = a^2(z_1 y_2 + y_1 z_2) + b^2(x_1 z_2 + z_1 x_2) + c^2(y_1 x_2 + x_1 y_2)$$

2) $PQ^2 = -a^2 y_1 z_1 - b^2 x_1 z_1 - c^2 x_1 y_1$

3) $[PQR] = [ABC] \cdot \det\begin{pmatrix} P \\ Q \\ R \end{pmatrix}$

4*) Se $\overrightarrow{PQ} = \alpha_1 \overrightarrow{AO} + \beta_1 \overrightarrow{BO} + \gamma_1 \overrightarrow{CO}$

$\overrightarrow{RS} = \alpha_2 \overrightarrow{AO} + \beta_2 \overrightarrow{BO} + \gamma_2 \overrightarrow{CO}$

con $\alpha_i + \beta_i + \gamma_i = 0 \quad i = 1, 2$

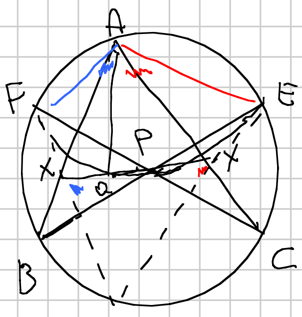
$$PQ \perp RS \iff a^2(\beta_1\gamma_2 + \beta_2\gamma_1) + b^2(\alpha_1\gamma_2 + \alpha_2\gamma_1) + c^2(\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1)$$

S14 G3_A Francesco Sala

Titolo nota 05/09/2014

PREREQUISITI

– PASCAL



$Q = \odot(EPF) \cap XX$

$\rightarrow$ $AFXQ$ ciclici
$AEYQ$

perché $\angle(FQ, QP) =$
$= \angle(EF, EP) =$
$= \angle(AF, AB)$.

$\angle(EY, FX) = \angle(AE, AF)$.

– BRIANCHON

Tangente comune est $(\omega, \omega_1) =$
" (ω, ω_2)
(ω, ω_3)

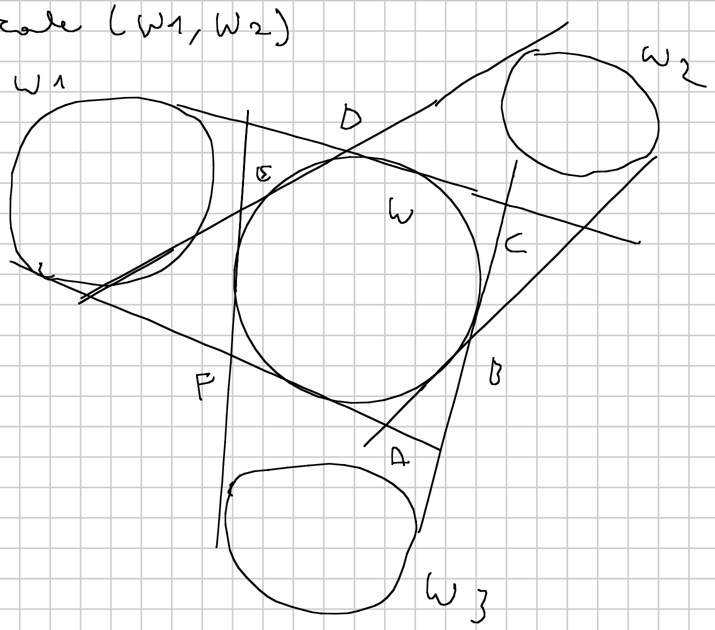
$AD =$ asse radicale (W_1, W_2)

$BE = \ldots$

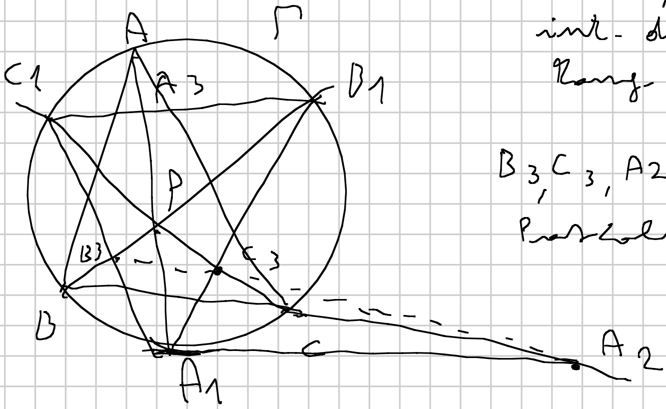
$CF = \ldots$

$\downarrow$

concorrono



STEINBART

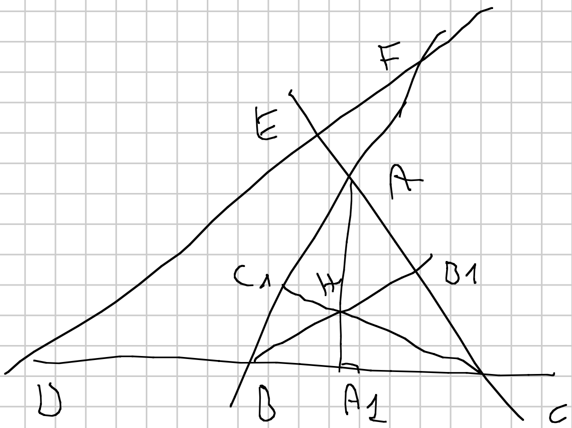


A_2 e cyc.
int. di BC con la tang. a Γ in A_1

B_3, C_3, A_2 all.
Pascal $A_1BC_1B_1A_1C$

$\to A_2, B_2, C_2$ all.

AUBERT



M_A = pt. medio di AD
M_B - -
M_C - -

H_A = ortocentro di AEF
e cyc.

ω_A $M_A(M_AA)$
e cyc.

H ha la stessa pot.
risp. a $\omega_A, \omega_B, \omega_C$

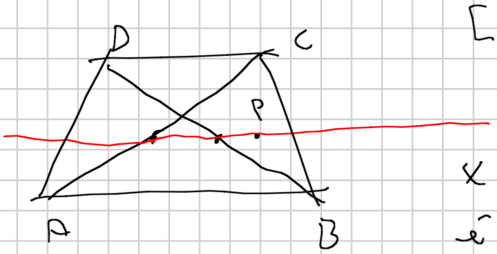
H_A . uguale
H_B
H_C - - -

$\to \omega_A, \omega_B, \omega_C$ coassiali e H, H_A, H_B, H_C
all. sull'asse radicale
AUBERT LINE

M_A e cyc all. : GAUSS LINE
Teorema 4.

P1) GAUSS LINE : luogo di P t.c.

[ABP] + [CDP] = [BCP] + [ADP]



$X \to [ABX]$ è lineare in X

i pt. medi delle diag. sodd.

P2) AUBERT LINE

luogo di P t.c. le

p_A : retta per A $\perp$ a DP e cyc.

p_A, p_B, p_C concorrono

$X(a_X, b_X)$ $\qquad$ DP : $x(b_p - b_d) = y(a_p - a_d) + \ldots$

p_A : $x(a_p - a_d) + y(b_p - b_d) + f_a(a_p, b_p)$

p_B : $x(a_p - a_E) + y(b_p - b_E) + f_B(a_p, b_p)$

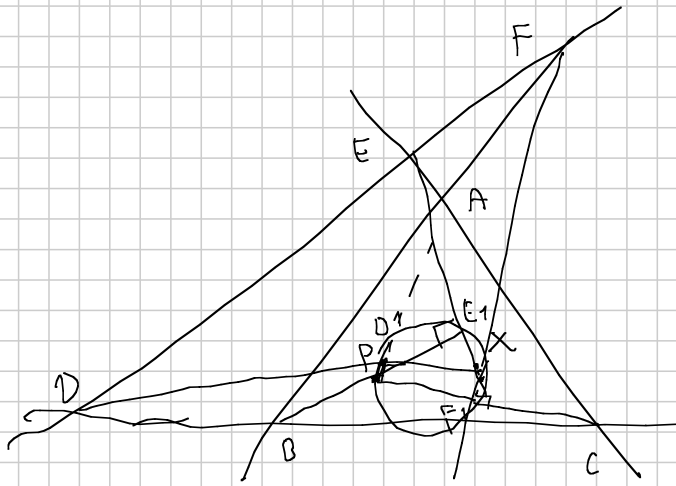
p_C : –

$p_A - p_B$: $x(a_E - a_d) + y(b_E - b_d) = g_1(a_p, b_p)$

$p_B - p_C$: $x(a_F - a_E) + y(b_F - b_E) = g_2(a_p, b_p)$

$g_1(a_p, b_p) = c \cdot g_2(a_p, b_p) \to$ retta.

la retta di AUBERT soddisfa



$X \in$ AUBERT LINE

$E_1 = EX \cap p_B$

$F_1 = FX \cap p_C$

$P = CF_1 \cap BE_1$

$D_1 =$ (cfr. di diametro PX) $\cap DX$

$$XE \cdot XE_1 = XF \cdot XF_1$$

EE_1FF_1 cicl. $\rightarrow X\widehat{D_1F_1} = X\widehat{E_1F_1} =$ (per la ciclicità)

$= F_1\widehat{F}D \rightarrow DFD_1F_1$ ciclico

$\rightarrow XD \cdot XD_1 = XE \cdot XE_1$

$\rightarrow D_1 \in \omega_A \rightarrow A\widehat{D_1}X = 90°$

SONDAT (i)

Lemma 1: se in ABC, P, X e $r_A =$ r. per X $\perp$ a AP e cyc.

se $D = r_A \cap BC$ e cyc $\in \ell$, $\rightarrow \ell \perp XP$.

D: per P_2, $X \in$ AUBERT line di $ABCDEF$

$$XE_1 \cdot XE = XD_1 \cdot XD = XF_1 \cdot XF = \lambda^2$$

se inverto in X con $r = \lambda$ e simm. in X

la cfr. $XPE_1D_1F_1 \longrightarrow DEF$

$\rightarrow \ell \perp XP$.

Lemma 2: se $AA_1 \cap BB_1 \cap CC_1 = P$

$AB \cap A_1B_1$ e cyc $\in t$

$D \in BC$, $E \in AC$, $F \in AB$ $\in \ell_1$ e $D_1 = DP \cap B_1C_1$, E_1 --, F_1

allora $D_1, E_1, F_1 \in l_2$ e $l_2 \cap l_1 \in t$.

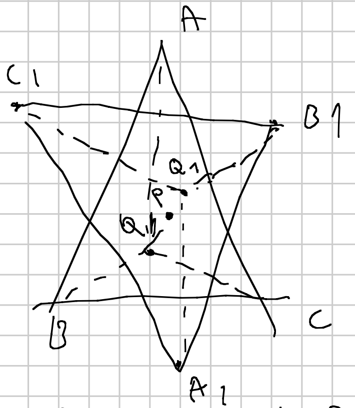
Dim: proietto t all'∞; $A_1B_1C_1$ e ABC diventano omotetici di centro P e per l'omotetia $D \to D_1$ e cyc $\Rightarrow l_1 \to l_2$ e $l_1 \cap l_2 \in r_\infty = t$.

NOTA: vale anche se l_2 è all'∞; in tal caso $l_1 // t$.

Dim. di SONDAT:

$P = AA_1 \cap BB_1 \cap CC_1$

$BC \cap B_1C_1 \in t$ e cyc



l_A = retta per $P \perp AQ$

$l_A // B_1C_1$

$l_A \cap BC = D$

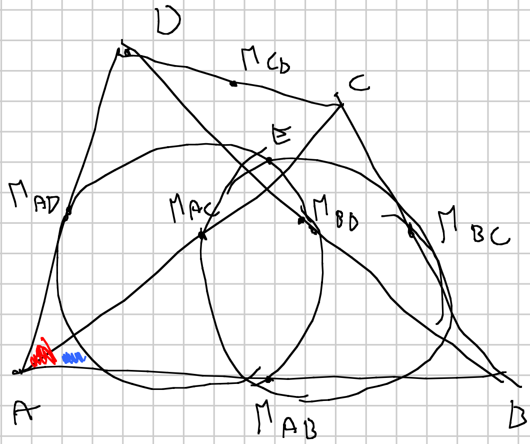
E, F analoghi

Lemma 2 $\to$ D, E, F allineati e $\overline{DEF} // t$

Lemma 1 $\to$ $\overline{DEF} \perp PQ \to t \perp PQ$

similmente $t \perp PQ_1$.

PONCELET



M_{XY} = pt. medio XY

cerchi di Eulero di ABC, ABD, BCD, ACD conc. in E

$E = \odot(M_{AB}M_{BD}M_{AD}) \cap \odot(M_{AB}M_{BC}M_{AC})$

Tesi: $E \in \odot(M_{AD}M_{AC}M_{CD})$

$M_{AD}\widehat{E M_{AC}} = M_{AD}\widehat{E M_{AB}} - M_{AC}\widehat{E M_{AB}} = M_{AB}\widehat{M_{BD}M_{AD}} - M_{AC}\widehat{M_{BC}M_{AD}}$

$= \angle - \angle = M_{AD}\widehat{M_{AC}M_{CD}} \rightarrow E \in (M_{AD}M_{AC}M_{CD})$

D_A = proiez. di D su BC
D_B = -- AC
D_C = -- AB

$\angle(D_AD_B, D_AE) = \angle(D_AD_B, D_AC) - \angle(D_AE, D_AC) =$

$= \angle(DD_B, DC) - \angle(EM_{BD}, M_{BC}M_{AD}) =$

$= 90° - \angle(CA, CD) - \angle(M_{BD}E, AD) = 90° - \angle(EM_{BD}, AC)$

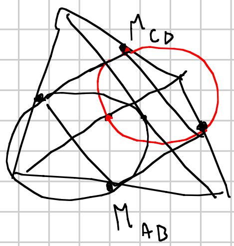
è "simmetrica in A, C"

quindi anche $\angle(D_CD_B, D_CE)$ ha lo stesso valore

$\rightarrow E \in \odot(D_AD_BD_C)$.

Ora $P = AC \cap BD$ $Q = AB \cap CD$ $R = AD \cap BC$.

Teorema: $E \in \odot(PQR)$.



G = pt. medio comune di $M_{AB}M_{CD}$, $M_{BC}M_{AD}$, $M_{AC}M_{BD}$.

simm. in G →

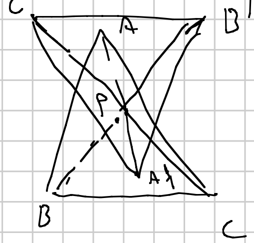
E va in un punto E_1

G (cerchi rossi)

inv. gen. $X \to X'$

<u>Idea</u> basta dim. che $E' \in (P'Q'R')$

<u>Lemmino</u>



simm. risp. a P

$\odot(AB'C')$ e cyc

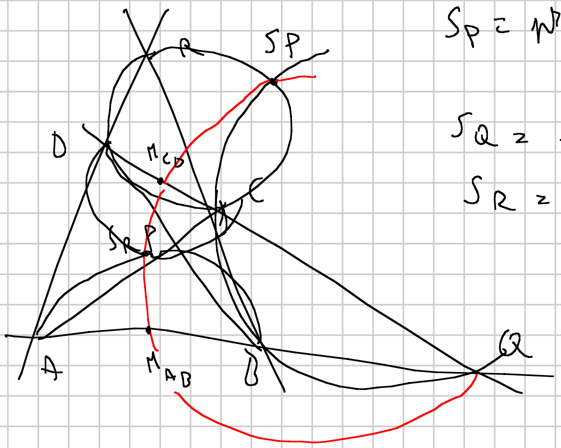
conc. in $\odot(ABC)$

D : sia $X = \odot(ABC) \cap \odot(AB'C')$

$$\angle(XB, XC') = \angle(XB, XA) + \angle(XA, XC') =$$
$$= \angle(CB, CA) + \angle(BA, B'C') = \angle(CB, CA) + \angle(BA', BC) =$$
$$= \angle(BA', AC) = \angle(A'B, A'C') \to X \in \odot(BA'C').$$

■

Ora basta dim. che $E' \in (P'QR)$ appl. il Lemminimo a $P'Q'R'$ e G.



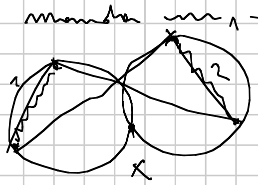
S_P = pt. di Miquel di $\{AB, BC, CD, DA\}$

S_Q = ... con $\{AC, BD, AD, BC\}$

S_R = ... con $\{AC, BD, AB, CD\}$

Oss.

X = centro rotomot. che manda $m_1 \to m_2$

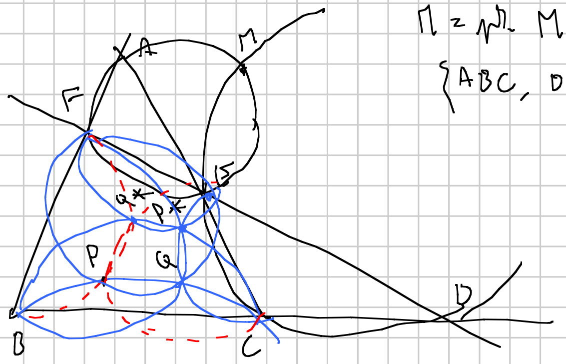


$\to$ S_P = centro della rotomot. per cui $DC \to AB$

e anche $M_{CD} \to M_{AB}$

$\to$ per quanto detto $M_{AB}, M_{CD} \in \odot(Q S_P S_R)$

Fatto inversivo



M = pt. Miquel. di $\{ABC, DEF\}$

$Q = \odot(BCP) \cap \odot(EFP)$

$P^* = \odot(CEQ) \cap \odot(BFQ)$

$Q^* = \odot(EP^*P) \cap \odot(BP^*C)$

Ora $\angle(FP, FQ^*) = \angle(FP, FE) - \angle(FQ^*, FE) =$

$= \angle(QP, QE) - \angle(P^*Q^*, P^*E) = \angle(QP, QC) +$

$\angle(QC, QE) - \angle(P^*Q^*, P^*C) - \angle(P^*C, P^*E) =$

$= \angle(BP, BC) - \angle(BQ^*, BC) = \angle(BP, BQ^*)$

$\to BPQ^*F$ ciclico

M centro similit. per cui $AB \to DE$ e simili

$\to \widehat{AMD}, \widehat{BME}, \widehat{CMF}$ hanno una bis. comune (b)

e (con i triangoli simili) $MA \cdot MD = MB \cdot ME = MC \cdot MF$

$\to \exists$ inv. in M + simm. in b per cui $A \to D$
$B \to E$
$C \to F$

Dimostriamo che $P \to P^*$; sia P_1 l'immagine di P.

allora $\angle(P_1F, P_1E) = \angle(P_1F, P_1M) + \angle(P_1M, P_1E) =$

$= \angle(CP, CM) + \angle(BM, BP) = \angle(CP, BC) + \angle(BC, CM) +$

$\angle(BM, BC) + \angle(BC, BP) = \angle(CP, BP) + \angle(BM, CM) =$

$= \angle(CP, BP) + \angle(AB, AC)$.

Inoltre $\angle(P^*F, P^*E) = \angle(P^*F, FE) + \angle(FE, P^*E) =$

$= \angle(P^*F, FB) + \angle(FB, FE) + \angle(FE, EC) + \angle(EC, P^*E)$

$= \angle(AB, AC) + \angle(QP^*, QB) + \angle(QC, QP^*) =$

$= \angle(AB, AC) + \angle(QC, QB) = \angle(AB, AC) + \angle(PC, PB)$

$\to P_1 \in \odot(P^*EFQ^*)$ analoghe rel.

$\to P^* \equiv P_1$

T_1: (PS_QS_R) e cyc. conc. in un punto F.

D: sia $F = (QS_PS_R) \cap (RS_PS_Q)$

allora $\angle(FS_R, FS_Q) = \angle(FS_R, FS_P) + \angle(FS_P, FS_Q)$

$= \angle(QS_R, QS_P) + \angle(RS_P, RS_Q)$

$= \angle(QS_R, QC) + \angle(QC, QS_P) + \angle(RS_P, RA) + \angle(RA, RS_Q)$

$= \angle(AS_R, AC) + \angle(BC, BS_P) + \angle(BS_P, BA) + \angle(CA, CS_Q)$

$= \angle(AS_R, AB) + \angle(CB, CS_Q) =$

$= \angle(PS_R, PB) + \angle(PB, PS_Q) = \angle(PS_R, PS_Q)$

$\rightarrow F \in (PS_R S_Q)$.

T-2 $\quad F = PS_P \cap QS_Q \cap RS_R$

D: nella notazione del Lemma inversivo (risp. a S_P) $Q = S_R$ e $P^* = F$

$\longrightarrow$ la rotomott. per cui $RP \rightarrow FQ$ ha centro S_P

allora $\angle(FS_R, FS_P) = \angle(QS_R, QS_P) \overset{\Downarrow}{=} \angle(S_Q R, S_Q S_P)$

$= \angle(FR, FS_P) \rightarrow F, S_R, R$ all.

T3 $\quad F = E'$ (definito prima)

basta che $F \in (M_{AB} M_{AC} M_{AD})$ e cyc

(dimm. dei cerchi di Eulero rispetto a C).

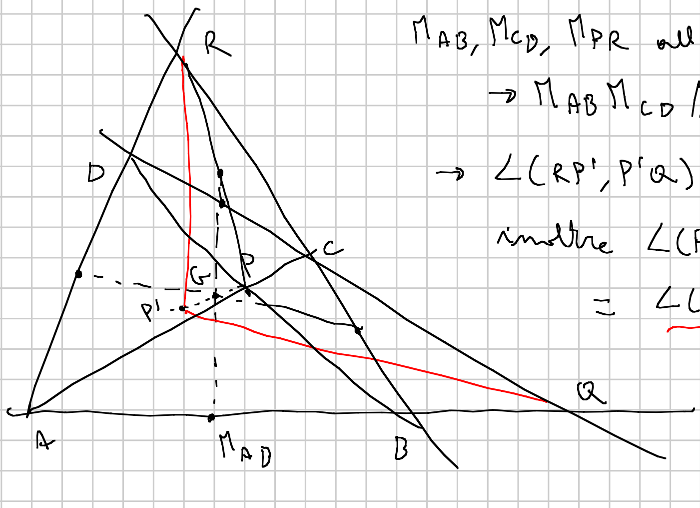
$\angle(M_{AC} M_{AD}, M_{AC} M_{AB}) = \angle(CD, CB) = \angle(CD, CS_P) + \angle(CS_P, CD)$

$= \angle(RD, RS_P) + \angle(QS_P, QB) = \angle(FM_{AD}, FS_P) +$

$\angle(FS_P, FM_{AB}) = \angle(FM_{AD}, FM_{AB})$

$\rightarrow F \equiv E'$

Ora basta dim. che $F \equiv E' \in (P'QR)$



M_{AB}, M_{CD}, M_{PR} all. per Gauss.

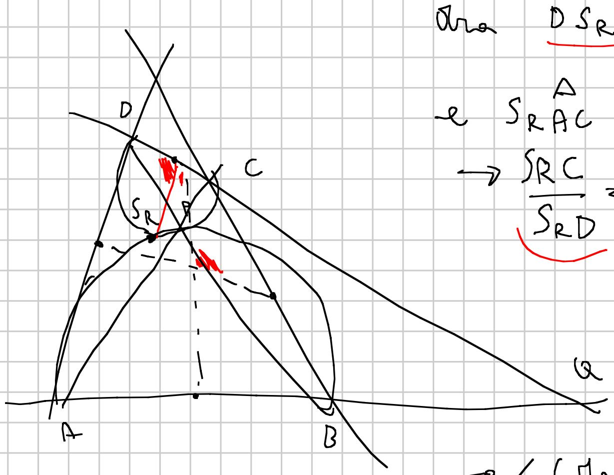
$\rightarrow M_{AB} M_{CD} \parallel P'R$

$\rightarrow \angle(RP', P'Q) = \angle(M_{AB} M_{CD}, M_{AD} M_{BC})$

inoltre $\angle(FR, FQ) = \angle(FS_R, FQ)$

$= \underline{\angle(M_{CD} S_R, M_{CD} Q)}$

(perché $Q M_{AB} F S_R S_P M_{CD}$ ciclico)



Ora $\widehat{DS_RC} = \widehat{APB} = \widehat{M_{AD}M_{AB}M_{BC}}$

e $\overset{\triangle}{S_RAC} \simeq S_RBD$ (rotomotetia)

$\rightarrow \dfrac{S_RC}{S_RD} = \dfrac{AC}{BD} = \dfrac{M_{AB}M_{BC}}{M_{AB}M_{AD}}$

$\rightarrow \overset{\triangle}{M_{AB}M_{AD}M_{BC}} \simeq \overset{\triangle}{S_RDC}$

$\rightarrow \angle$ uguali

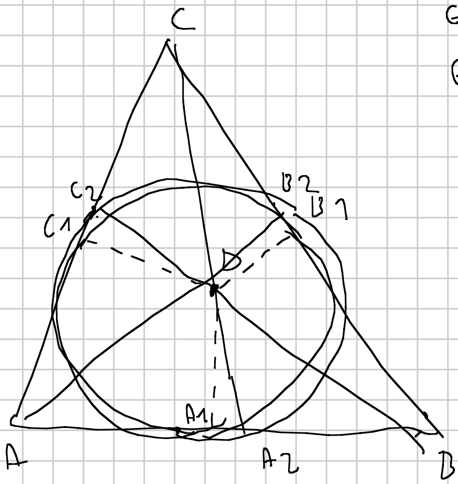
$\rightarrow \angle(M_{AD}M_{BC}, M_{AB}M_{CD}) =$

$= \angle(DC, M_{CD}S_R)$

$\rightarrow F \in (RP'Q)$ e cyc $\rightarrow F \in (P'Q'R')$

$\rightarrow E \in (PQR)$.

Riformulazione



$E \in$ cerchio di Eulero di ABC

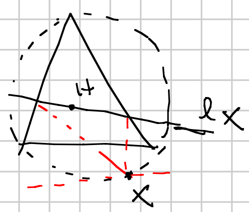
$\in (A_1B_1C_1)$

$\in (A_2B_2C_2)$

Concorrono,

FONTÉNE

RICORDO



ABC tr.
e P interno

X = anti-Steiner point di ℓ_X

(i) A_0 = pt. medio di BC e cyc.

A_1 = proiez. di P su BC e cyc.

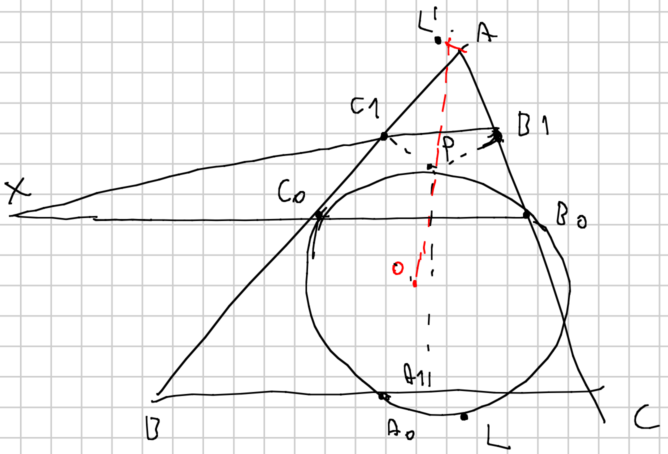
$X = B_1C_1 \cap B_0C_0$ e cyc allora A_1X e cyc concorrono in L.

D Ora L = anti-Steiner point di OP wrt $A_0B_0C_0$

O = centro di (ABC)

∀ punto T sia T' = simm di T rispetto a B_0C_0

Chiaramente $L' \in OP$



$L' \in (OC_0B_0A)$ per la simm.

$\rightarrow A\hat{L'}P = 90° \rightarrow L' \in (PB_1AC_1)$

Ora $L'C_1C_0X$ è ciclico perché

$\angle(L'C_0, L'C_1) = \angle(L'C_0, L'A) +$
$+ \angle(L'A, L'C_1) =$
$= \angle(B_0C_0, B_0A) + \angle(B_1A, B_1X) =$
$= \angle(XC_0, XC_1)$.

Ora A_1', L', X sono allineati

$$\angle(L'A_1', L'X) = \angle(L'A_1', L'C_1) + \angle(L'C_1, L'X) =$$
$$= \angle(PA_1', PC_1) + \angle(C_0C_1, C_0X) =$$
$$= \angle(BA_1, BC_1) + \angle(BA, BC) = 0$$

→ per simm. A_1, L, X sono all.
⇝ A_1X e $C_X C$ conc. in L.

(ii) $XA_1 \cdot XL = XA_1' \cdot XL' = XC_1 \cdot XB_1$
↓ pow. risp. a (APC_1B_1)

→ $L \in (A_1B_1C_1)$.

se l passante per O è fissa, L è fisso
e quando P varia, $(A_1B_1C_1)$ passa per L fisso.

Applicazioni

1) P tale che $P\hat{A}B + P\hat{B}C + P\hat{C}A = 90°$

A_1 e $C_X C$ come prima
$A_2 = AP \cap (ABC)$ e $C_X C$.

ora $\angle(B_1C_1, B_2C_2) = \angle(B_1C_1, PC) + \angle(C_2C, C_2B_2) =$
$= \angle(B_1C_1, PC_1) + \angle(PC_1, AP) + \angle(AP, PC) + \angle(BC, BP)$
$= \angle(AC, AP) + 90° + \angle(AB, AP) + \angle(AP, PC) + \angle(BC, BP) = 180°$

→ $A_1B_1C_1$ e $A_2B_2C_2$ omotetici; sia R il centro dell'omot. φ.

se $P' =$ coniug. isog. di P wrt ABC,

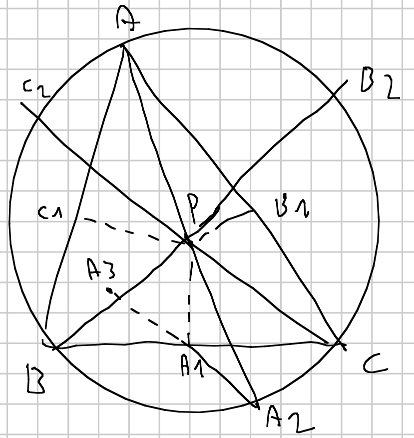
ABC e $A_1B_1C_1$ sono ortologici in P e P'.
ma allora ABC é ortologico a $A_2B_2C_2$ in P' e $\varphi(P)$

SONDAT → $P, P', \varphi(P)$ all. su l_1
OMOTETIA → $R, O, \varphi^{-1}(O)$ all.
↓ p.to medio di P e P'

→ $O \in l$ → O, P, P' all.
→ le inters. di $(A_1B_1C_1)$ con il cerchio di eulero di ABC sono le stesse

→ lo tange.

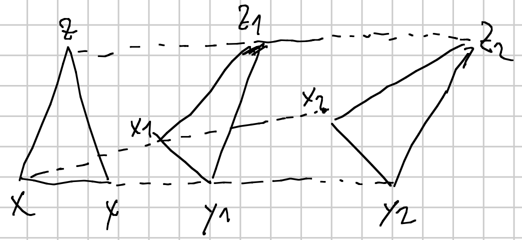
2)



A_3 = simm. di A_2 in A_1 e cyc

TS: H, A_3, B_3, C_3 ciclici

Fatto $A_1\hat{B_1}C_1 \simeq A_2B_2C_2$



se per rotomolt. di centro M $Z \to X$ e $Z_1 \to X_1$
allora $Z_2 \to X_2$

$$X_1\hat{Z_1}M \simeq X_2\hat{Z_2}M \simeq X\hat{Z}M$$

ciclando si ha che $X_1Y_1Z_1S \simeq X_2Y_2Z_2S \simeq XYZS$

$\to X_2Y_2Z_2 \simeq XYZ$.

Lemma: nella figura di FONTÉNÉ,

se $N = LA_1 \cap (A_0B_0C_0)$, allora $AP \perp A_0N$

D

$$\angle(A_0N, AP) = \angle(A_0N, LN) + \angle(LN, PA_1) + \angle(PA_1, AP)$$

$$= \angle(EA_0, EL) + \angle(PA_1', A_1'L') + \angle(PA_1, AP) =$$

$$= \angle(AD, EL) + \angle(AP, AL') + \angle(PA_1, AP) =$$

$$= \angle(AB, EL) + \angle(AP, AL') + \angle(PA_1, AP) =$$

$$= \angle(AB, B_0C_0) + \angle(B_0C_0, B_0L) + \angle(PA_1, AB) + \angle(AB, AL') = \angle(PA_1, B_0C_0) + \angle(B_0C_0, B_0L') + \angle(B_0C_0, B_0L) = 90^\circ.$$

Se T = pt. medio di AH

$TN \perp NA_0 \to TN // AP$

$\to$ l'omotetia di centro H e f. 2 per cui

$T \to A$ manda $(A_0B_0C_0)$ in (ABC)

e $NT \to AA_2$ per il parallelismo

da cui $N \to A_2$.

Allora $A_3H // NL = A_1L$

$\to \angle(A_3H, HB_3) = \angle(A_1L, LB_1)$

$= \angle(A_1C_1, C_1B_1) = \angle(A_3C_3, C_3B_3)$.

PROBLEMA

Sia ABC con incentro I e circocentro O.

Sia P t.c. se P' = coniug. isog. di P, allora $P' \in OI$.

$A_1 = AP \cap BC$ e cyc.

TS: (A_IA_1) e cyc coassiali

D: (i) I_A e cyc gli excentri.

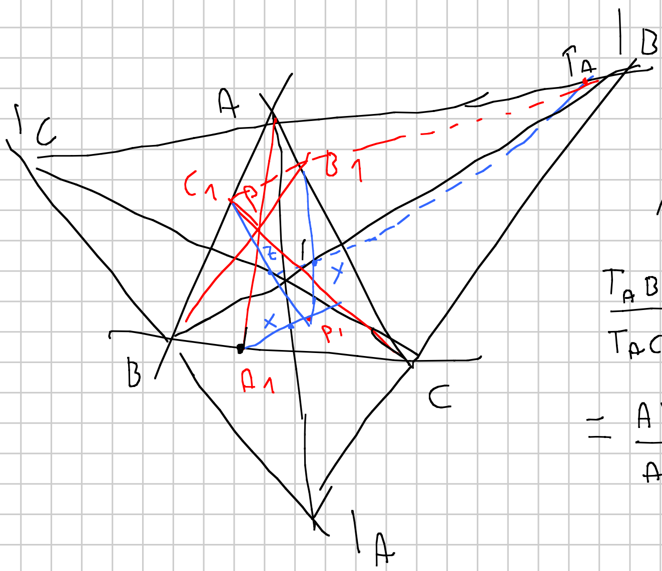
allora I_AA_1 e cyc concorrono su IP'.

D Sia $X = A_1P' \cap AI$.

allora

YZ, B_1C_1, I_BI_C

concorrono



$T_A = I_BI_C \cap B_1C_1$.

Menelao su $P'\overset{\triangle}{B_1C_1}$

$$\frac{T_AB_1}{T_AC_1} \cdot \frac{ZC_1}{ZP'} \cdot \frac{P'Y}{YB_1} =$$

$$= \frac{AB_1}{AC_1} \cdot \frac{CC_1}{CP'} \cdot \frac{BP'}{BB_1} =$$

$$= \frac{\sin \cancel{\hat{A}}}{\sin A\hat{C}C_1} \cdot \frac{\sin A\hat{B}B_1}{\sin \cancel{\hat{A}}} \cdot \frac{\sin P'\hat{C}B}{\sin P'\hat{B}C} = 1$$

Lemma se $A_1D_1 \cap A_2B_2 \cap A_3B_3 = D$ e cyc sono all.

$AA_1 \cap BB_1 \cap CC_1 = P_1$

$= P_2$ sono all.

$= P_3$

Dim proietto $\overline{DEF}$ all'∞; i tre Δ div. omotetici e i tre centri di omotetia sono all.

applicato a $I_AI_BI_C$, $A_1B_1C_1$, $XYZ \to$

la prosp. comune è $\overline{T_AT_BT_C}$ e i centri sono I, P', $R = I_AA_1 \cap I_BB_1 \cap I_CC_1$

$\to I, P', R$ allineati.

Ora $P' \in IO \to R \in IO$.

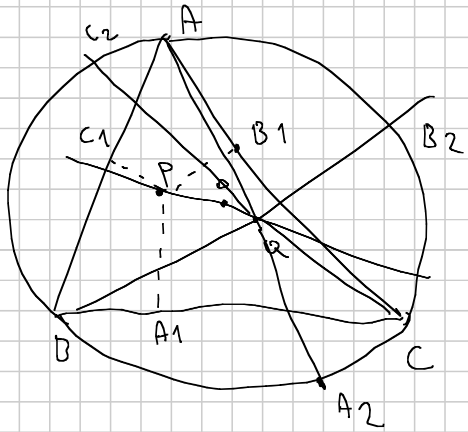
$A_2 = I_AA_1 \cap (I_AI_BI_C)$ e cyc.

$I_C\hat{A_2}A_1 = I_C\hat{I_B}I_A = I_A\hat{B}C \to I_CBA_1A_2$ ciclico

$\to I_AA_1 \cdot I_AA_2 = I_AB \cdot I_AI_C = I_AI \cdot I_AA$

$\to A_2 \in (AIA_1)$

Lemma 2



P, Q, O all. su l

$\to (PA_1A_2)$ e cyc. sono coassiali

D:

$A_3 = A_2P \cap (ABC)$ e cyc.

$A_4 = A_3O \cap (ABC)$ e cyc.

$A_5 = A_2A_4 \cap BC$ e cyc.

ovvio: $A_5 \in (PA_1A_2)$

a) AA_4 e cyc. concorrono

Pascal su $A_2A_4B_3A_3B_4B_2$

$\rightarrow$ $A_2A_3 \cap B_2B_3 = P$
$A_3A_4 \cap B_3B_4 = O$ allineati con Q
$A_2B_4 \cap B_2A_4 = T$

Pascal su $A_2A_4BAB_4B_2$

$\rightarrow$ $A_2B_4 \cap B_2A_4 = T$
$AA_2 \cap BB_2 = Q$ all. con O, P
$AA_4 \cap BB_4 = X$

$\rightarrow$ $AA_4 \cap BB_4 \in l$
$AA_4 \cap CC_4 \in l$ $\rightarrow$ AA_4 e cyc conc. su l. in X

b) A_5 e cyc. allineati

$A_6 = $ (retta tang. a (ABC) in A_2) $\cap BC$.

NOTA Steinbart $\rightarrow A_6, B_6, C_6$ sono allineati

$$\prod_{cyc} \frac{A_6B}{A_6C} \cdot \prod_{cyc} \frac{A_5C}{A_5B} = \prod_{cyc} (BCA_6A_5) \underset{\substack{\text{proietto} \\ \text{da } A_2}}{=} \prod_{cyc} \underline{(BCA_2A_4)}$$

AA_2 e cyc conc. in Q
AA_4 — — X $\rightarrow$ l'ultimo prodotto è 1

per Ceva (anche trigon.)

so che $\prod_{cyc} \frac{A_6B}{A_6C} = -1$

$\rightarrow \prod_{cyc} \frac{A_5C}{A_5B} = -1$

$\Rightarrow A_5, B_5, C_5$ all. su t.

se P_1 = proiez. di P su t,

(PA_1A_2) e cyc passano tutti per P_1

Basta appl. il Lemma 2 a $I_AI_BI_C$ con

$P = I$ e $Q = R$

perché il circocentro di $I_AI_BI_C \in OI$.

N ADVANCED

Titolo nota 03/09/2014

EQUAZIONI FUNZIONALI
DI TEORIA DEI NUMERI

① IMO 2010/3

TROVARE LE $g : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$

T.C. $\big(g(m)+n\big)\big(g(n)+m\big)$ è $\square$

$\forall\, m, n \in \mathbb{N}_0$

② IMO SL 2009 N3

$F : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ non costante, $\forall\, a, b \in \mathbb{N}_0$

$(a-b) \mid \big(F(a) - F(b)\big)$

(i) È vero che F è un polinomio?
È vero che se F è un pl. è a coeff. in $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}$?

(ii) Dim. che esistono infiniti primi p per cui $\exists\, c \in \mathbb{N}_0$ per cui $p \mid F(c)$

③ TROVARE LE $F : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ T.C.

(i) $F(n!) = F(n)!$ $\quad \forall\, n \in \mathbb{N}_0$

(ii) $(m-n) \mid F(m) - F(n)$ $\quad \forall\, m, n \in \mathbb{N}_0$

4) Romania TST 2013 1/3

TROVARE $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ INIETTIVE PER CUI VALE LA SEGUENTE PROPRIETÀ:

SE $S \subseteq \mathbb{N}_0$ È FINITO E $\sum_{s \in S} \frac{1}{s} \in \mathbb{N}_0$

ALLORA $\sum_{s \in S} \frac{1}{f(s)} \in \mathbb{N}_0$

5) Cina TST 2014 1/3

SIA $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ TALE CHE

(i) $MCD(f(m), f(n)) \leq (MCD(m,n))^{2014}$ $\forall m,n \in \mathbb{N}_0$

(ii) $n \leq f(n) \leq n + 2014$ $\forall n \in \mathbb{N}$

ALLORA $\exists N \in \mathbb{N}_0$ $\forall n \geq N$ $f(n) = n$

6) SIA $n \in \mathbb{Z}$ FISSATO. TROVARE

$f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ t.c. $f(x + y + f(y)) = f(x) + ny$

$\forall x, y \in \mathbb{Z}$

---

2) $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ $(a - b) \mid f(a) - f(b)$

(i) NON NECESSARIAMENTE f È UN POLINOMIO

ES DEFINISCO f INDUTTIVAMENTE

$F(1) = 1 \qquad F(2)=2 \quad F(3) = 7$

$F(1), \ldots, F(n)$

$F(n+1)$ deve essere soluzione di

$$\begin{cases} x \equiv F(1) & (n) \\ x \equiv F(2) & (n-1) \\ \vdots \end{cases}$$

ES. VERIFICARE CHE ESISTE SOLUZIONE

Pongo $F(n+1) =$ una soluzione $> 2^{n+1}$

$F(n) = n + n(n-1) + n(n-1)(n-2) + \ldots + n!$

F non è un polinomio

$a > b \qquad F(a) - F(b) =$

$\left[a(a-1) \cdot \ldots \cdot (a-(a-1)) + a(a-1) \cdot \ldots \cdot (a-(a-2)) \right.$

$\left. + \ldots + a\right] - \left[b(b-1) \cdot \ldots \cdot (b-(a-1)) + \right.$

$\left. + b(b-1) \cdot \ldots \cdot (b-(a-2)) + \ldots + b\right]$

è $p(a) - p(b)$ per un opportuno polinomio

$$p(x) = x + x(x-1) + \dots + x(x-1)\cdot\ldots\cdot(x-(a-1))$$

$$a-b \mid F(a)-F(b)$$

$$F(n) = n!\left(1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\dots\right) \sim e\cdot n!$$

ii) Se F è un polinomio, ha coefficienti in $\mathbb{Q}$ (manda infiniti interi in interi)

F non è sempre a coeff. interi

ES $\quad \dfrac{x(x+1)}{2}$ è intero per ogni x intero

$$\frac{a(a+1)}{2} - \frac{b(b+1)}{2} = \frac{a^2-b^2+a-b}{2} =$$

$$= (a-b)\cdot \boxed{\frac{a+b+1}{2}} \longrightarrow \text{è intero? Non sempre}$$

$$F(x) = \frac{x^4-x^2}{2} \qquad \frac{a^4-b^4+a^2-b^2}{2} =$$

$$= (a-b)\boxed{\frac{(a^3+a^2b+ab^2+b^3+a+b)}{2}} \text{ è intero}$$

(1) $n+k$ è sicuramente una soluzione per $k \geq 0$.

Le soluzioni trovate sono quelle per cui

$$F(a) - F(b) = a - b \quad \forall a, b \in \mathbb{N}_0$$

Se $p \mid (F(a) - F(b))$

$$(g(a)+n)(g(n)+a) \text{ è } \square$$
$$(g(b)+n)(g(n)+b)$$

cerco n t.c. $g(a)+n$ contiene p con esp. dispari, e anche $g(b)+n$ contiene p con esponente dispari.

Se $p^2 \mid g(a) - g(b)$ pongo $n = p^{g(a)+10} - g(a) + p$

$$p^{g(a)+10} + p$$

$$g(b) + n = \underbrace{(g(b) - g(a))}_{\text{contiene } p^2} + \underbrace{(g(a) + n)}_{\text{contiene un solo } p}$$

Se $p \parallel g(a) - g(b)$ $\quad n = p^{\text{dispari grande}} - g(a)$

$$n + g(a) = p^{\text{dispari grande}}$$

$$n + g(b) = p^{\text{dispari grande}} + \underbrace{(g(a) - g(b))}_{\text{c'è un solo } p}$$

$p \mid g(n)+a \qquad p \mid g(n)+b \qquad p \mid (a-b)$

– $g(a)=g(b)$ qualsiasi primo divide $g(a)-g(b)$
dunque ogni primo divide $a-b \Rightarrow a=b$

g è iniettiva

– $a-b=1 \Rightarrow g(a)-g(b)=\pm 1$

– $a-b=2 \Rightarrow g(a)-g(b)=\left(g(a)-g\left(\frac{a+b}{2}\right)\right)$

$+ \dots = 0,\ 2,\ -2$

0 non va bene per l'iniettività

$g(a)-g(b)=\pm 2$

Il segno è sempre lo stesso ...

---

(4) RICORDO: 1 $\quad 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\dots=+\infty$

2 Ogni razionale positivo è della forma

$$\sum_{s\in S}\frac{1}{s} \text{ per un certo } S\subseteq \mathbb{N}_0 \text{ finito}$$

3 Se $\sum_{s\in S}\frac{1}{s}<r$ con r razionale

esiste $T\subseteq(\mathbb{N}_0\setminus S)$ con $\sum_{s\in S\cup T}\frac{1}{s}=r$

Cosa posso dire di

$\sum_{s\in S} \frac{1}{F(s)}$ quando $\sum_{s\in S} \frac{1}{s}$ non è intera?

$\sum_{s\in S} \frac{1}{s} = r$ arrivo a $\lceil r \rceil$ con T disgiunto da S

$\sum_{s\in S} \frac{1}{s} + \sum_{s\in T} \frac{1}{s}$ è intero

Se $\sum_{s\in S'} \frac{1}{s} = \sum_{s\in S} \frac{1}{s}$ allora

$\sum_{s\in S'} \frac{1}{s} + \sum_{s\in T} \frac{1}{s}$ è intero

Prendo T disgiunto sia da S che da S'

$\sum_{S} \frac{1}{F(s)} + \sum_{T} \frac{1}{F(s)}$, $\sum_{S'} \frac{1}{F(s)} + \sum_{T} \frac{1}{F(s)} \in \mathbb{N}_0$

Faccio la differenza e ho $\sum_{s\in S} \frac{1}{F(s)} - \sum_{s\in S'} \frac{1}{F(s)} \in \mathbb{Z}$

$$\frac{1}{a} \pm \frac{1}{b} \pm \frac{1}{c} \pm \frac{1}{d} \dots \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{1}{F(a)} \pm \dots \pm \quad \in \mathbb{Z}$$

$F(1) = 1$ perché $\frac{1}{1}$ è intero $\Rightarrow \frac{1}{F(1)} \in \mathbb{N}_0$

$F(2) \geq 2$

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n(n+1)}$$

$$1 \geq \frac{1}{F(n)} > \frac{1}{F(n)} - \frac{1}{F(n+1)} - \frac{1}{F(n(n+1))} \in \mathbb{Z}$$

$$\rotatebox{90}{$\leq$}$$

$$-\frac{1}{F(n+1)} - \frac{1}{F(n(n+1))} \geq -\frac{1}{2} - \frac{1}{3}$$

$$\vee$$

$$-1$$

$$\frac{1}{F(n)} = \frac{1}{F(n+1)} + \frac{1}{F(\sim)}$$

$$\frac{1}{F(n)} > \frac{1}{F(n+1)}$$

F è stratt. crescente

$F(n) \geq n$ $\qquad F(2) = 2$

$F(2) \geq 3$ $\qquad F(3) \geq 4$ $\qquad F(6) \geq 7$

$$\frac{1}{F(2)} + \frac{1}{F(3)} + \frac{1}{F(6)} \geq 1$$

$F(2) = 2$

Se $F(n) = n$

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{F(n+1)} + \frac{1}{F(n(n+1))}$$

$$\leq \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n}$$

(5) <u>OSS 1</u> Se $(m, n) = 1$ $\quad (F(m), F(n)) = 1$

sono coprimi

Cerchiamo una successione di numeri a_i

t.c. $(a_i, a_j) = 1$ $\quad (a_{i+1} = a_i! + 1)$

$i > j \Rightarrow a_i > a_j$. $\quad a_1 = 2018! + 1$

$F(a_i) = a_i + k_i \qquad 0 \leq k_i \leq 2014$

$(a_j + k_j, a_i + k_i)$

Prendiamo a_j e a_i t.c. $F(a_j) - a_j = F(a_i) - a_i$
$= h$

$(h+1) \mid (n! + h + 1) \qquad h = 0, \dots, 2014$

$(h+1) \mid F(a_i) = a_i + h = a_{i-1}! + (h+1)$

$(h+1) \mid F(a_j) = a_j + h = a_{j-1}! + (h+1)$

assurdo a meno che h non sia 0

$(a_i, a_j) = 1$

$F(a_i) = a_i + h$ al massimo per un i

per $1 \leq h \leq 2014$

$F(a_i) = a_i$ per infiniti a_i

$\underbrace{p \mid F(n) \Rightarrow p \mid n}$ | Prendo n t.c.

$p \mid F(n)$ ma $p \nmid n$

Se trovo r con $p \mid r$ $(r, n) = 1$

e $p \mid F(r)$ ho un assurdo ...

Prendo $p_1, \ldots, p_{2015^2}$ primi "enormi"

$r \equiv 0 \quad (p_1 \cdot \ldots \cdot p_{2015})$

$r \equiv -1 \quad (p_{2016} \cdot \ldots \cdot p_{4030})$

$r \equiv -2 \quad (p_{4031} \cdot \ldots)$

$n \equiv -1 \quad (p_1 \cdot p_{2016} \cdot p_{4031} \cdot \ldots)$

$n \equiv -2 \quad (p_2 \cdot p_{2017} \cdot p_{4032} \cdot \ldots)$

$r \equiv 1 \quad (n)$ (n è coprimo con i p_i

prima trovo n e poi r)

$F(n) = n + k$ ma allora $p_k, p_{2015+k} \ldots \mid F(n)$

$F(r)$ è divisibile per uno di questi, assurdo dunque $F(n) = n$ per infiniti n

$r \equiv -1 \quad (a_i)$

$r \equiv -2 \quad (a_{i+1})$

$\vdots$

$r \equiv -2014 \quad (a_{2014})$

$r \equiv 0 \quad (p)$

$r \equiv 1 \quad (n)$

$F(r) = r+k$

$F(a_{i+k}) = a_{i+k}$

$\bigl(F(r), F(a_{i+k})\bigr) = a_{i+k}$

$\bigl(r, a_{i+k}\bigr) = 1 \qquad a_{i+k} \mid (r+k)$ assurdo se $F(r) \neq r$

$F(r) = r \qquad p \mid r \qquad p \mid F(r)$

$\bigl(n, r\bigr) = 1$ ma $p \mid \bigl(\underset{r}{F(r)}, F(n)\bigr)$

- TROVARE n t.c. $n+1, \dots, n+2014+\dots+n+4028$ contengono ognuno un primo non contenuto negli altri

F ha 2014 punti fissi consecutivi

– da lì in poi F è l'identità

---

⑥ IDEA $n=0$ a parte (F viene periodica con $\cancel{x}+F(\cancel{x})\equiv 0$ (mod il periodo))

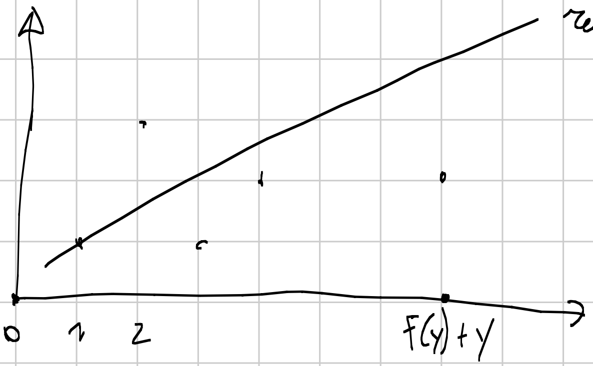
Anche $F(x)=-x$ va bene per $n=0$

$F(0)=0$ a forza di sostituzioni

$n\neq 0$ si fa

$$F(x+\underbrace{y+F(y)}_{\neq 0 \text{ se } y\neq 0}) = F(x) + ny$$

$$F(x + m(y+F(y))) = F(x) + m\,ny$$



retta di pendenza $\left[\frac{ny}{y+F(y)}\right]$

che passa per i pti del grafico con $x\equiv 1\ (y+F(y))$

In particolare $\forall x\in\mathbb{Z}$

$$\frac{ny}{y+F(y)}\,x - C_y \le F(x) \le \frac{ny}{y+F(y)}\,x + D_y$$

$\forall y, z \neq 0$ $$\frac{n y}{y + F(y)} = \frac{n z}{z + F(z)} = \lambda \in \mathbb{Q}$$

$$F(z) = \frac{n - \lambda}{\lambda} z$$

non resta che trovare i valori buoni di λ

Advanced – TdN 2

Titolo nota 04/09/2014

Richiami sugli interi di Gauss.

$\mathbb{Z}[i] = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ $\quad i^2 = -1$

Negli interi di Gauss c'è una proprietà di fattorizzazione unica:
ogni elemento si scrive in "modo unico" come prodotto di fattori primi.
"unico": in realtà si possono cambiare:
- l'ordine dei fattori
- il fatto che ogni fattore può essere moltiplicato (o diviso) per un elemento invertibile

Elementi invertibili: In $\mathbb{Z}$: ± 1
In $\mathbb{Z}[i]$: $\pm 1, \pm i$.

Per determinare quali sono gli elementi primi in $\mathbb{Z}[i]$, basta fattorizzare in $\mathbb{Z}[i]$ gli usuali numeri primi.

Esempio: $70 = 2 \cdot 5 \cdot 7$ in $\mathbb{Z}$.
$70 = (1+i)(1-i)(2+i)(2-i)\,7$ in $\mathbb{Z}[i]$.

Idea: bisogna vedere se i numeri primi di $\mathbb{Z}$ rimangono primi (cioè non si fattorizzano ulteriormente in $\mathbb{Z}[i]$) oppure si fattorizzano ulteriormente.

Sia p un numero primo di $\mathbb{Z}$
Come si può eventualmente fattorizzare in $\mathbb{Z}[i]$?
$p = (a+bi)(c+di)$
Ci si riconduce (fondamentale!) ad un'uguaglianza fra interi.

$$p^2 = (a^2+b^2)(c^2+d^2)$$

Nota:
$$p^2 = \begin{cases} 1 \cdot p^2 \\ p \cdot p \\ p^2 \cdot 1 \end{cases}$$

Se $a^2+b^2=1$ oppure $c^2+d^2=1$, si ha
$a+bi$ oppure $c+id = \pm 1, \pm i$ (elemento invertibile)
$\rightarrow$ non c'è "vera" fattorizzazione.

L'unico caso serio è vedere se si può fare
$a^2+b^2=c^2+d^2=p$.
$p=2$, $2=p=1^2+1^2$
$p \equiv 3 \pmod 4$ impossibile
$p \equiv 1 \pmod 4$ non solo è possibile, ma si può sempre fare
(Hint: $p \equiv 1 \pmod 4$ implica che -1 è un residuo quadratico modulo p. Quindi si può risolvere $x^2+1 \equiv 0 \pmod p$ $\quad x^2+1 = kp$ con $k<p$ ($k<p$!). $\quad (p^2/4+1<p^2)$.
Da questo si deduce che è possibile risolvere $x^2+y^2=kp$ e a sua volta $x^2+y^2=p$).
(2° hint: Se $p \equiv 1 \pmod 4$ rimanesse primo in $\mathbb{Z}[i]$, questo vorrebbe dire che, ragionando modulo p, in $\mathbb{Z}[i]$ (modulo p) non ci sarebbero divisori di zero e quindi ogni polinomio di grado d avrebbe $\leq d$ radici.

Ora x^2+1 ha radici $\pm i$ e $\pm a$ dove $a^2 \equiv -1 \pmod p$) $\to$ 4 radici per un polinomio di grado 2 $\to$ assurdo).

Altri primi $\equiv 1 \mod 4$
$13 = 3^2+2^2$, $17 = 4^2+1^2$, $29 = 5^2+2^2$, ...

Conclusione: se prendo $n \in \mathbb{N}$ e lo fattorizzo in maniera usuale (in $\mathbb{Z}$):

$$n = 2^a p_1^{b_1} \cdots p_r^{b_r} q_1^{c_1} \cdots q_s^{c_s}$$

dove $p_i \equiv 1 \pmod 4$ e $q_j \equiv 3 \pmod 4$

qual è la fattorizzazione di n in $\mathbb{Z}[i]$?

E':
$$n = (1+i)^a (1-i)^a (x_1+iy_1)^{b_1}(x_1-iy_1)^{b_1} \cdots$$
$$\cdots (x_r+iy_r)^{b_r}(x_r-iy_r)^{b_r} q_1^{c_1} \cdots q_s^{c_s}.$$

Osservazione $\quad 1-i = -i(1+i)$

quindi $\quad (1-i)^a = (-i)^a (1+i)^a$

$$2^a = (-i)^a (1+i)^{2a}.$$

Osservazione 2 $\quad$ Come mai x_k+iy_k sono primi?
Perché $|x_k+iy_k|^2 = p$ e, se si potessero scrivere come prodotto di due cose, uno dovrebbe avere "norma" (= quadrato del valore assoluto) $= 1$ e l'altro norma p.
Quello di norma 1 è invertibile $\to$ fattorizzazione "fasulla".

Osservazione 3 In $\mathbb{Z}[i]$ "si sa" che c'è fattorizzazione unica. Non è ovvio: per esempio in $\mathbb{Z}[i\sqrt{5}] = \{a + bi\sqrt{5} \mid a + bi\sqrt{5}\}$

$$(1+i\sqrt{5})(1-i\sqrt{5}) = 1+5=6 = 2\cdot 3$$

e queste sono due fattorizzazioni diverse dello stesso numero.

Esempio facile sull'importanza della fattorizzazione in $\mathbb{Z}[i]$: terne pitagoriche.

Terne "primitive" $a^2+b^2=c^2$ con $(a,b,c)=1$.

$$a^2+b^2=c^2 \iff (a+bi)(a-bi) = c^2.$$

M.C.D. fra $a+bi$ e $a-bi$?

$\to$ divide $2a$, divide $2b$ $\Rightarrow$ divide 2

c dispari $\Rightarrow$ MCD $=1$.

Ne segue che

$a+bi = (u+iv)^2 = u^2-v^2+2iuv$ $\qquad a=u^2-v^2$

$a-bi = (u-iv)^2 = u^2-v^2-2iuv$ $\qquad b=2uv$.

Problema proposto a IMO 2004 (N7).

Enunciato: p primo dispari, n intero positivo. Otto punti distinti a coordinate intere stanno su una circonferenza di diametro p^n. Dimostrare che tre di questi punti formano un triangolo tale che i quadrati delle lunghezze dei suoi lati sono interi divisibili per p^{n+1}.

Soluzione. Sia O il centro della circonferenza
$O = \left(\frac{a}{c}, \frac{b}{c}\right)$ (numeri razionali)
e posso supporre $(a, b, c) = 1$

Es. $\left(\frac{3}{5}, \frac{7}{4}\right) \to \left(\frac{12}{20}, \frac{35}{20}\right)$

Stabiliamo quale potenza di p divide (eventualmente) c:
$c = p^{\gamma} c_1$ con $p \nmid c_1$. ←

Sia P un punto a coordinate intere sulla circonferenza. Avremo $\vec{OP} = \left(\frac{x}{c}, \frac{y}{c}\right)$ con

$$a + x \equiv b + y \equiv 0 \pmod{c}$$

e

$$\frac{x^2 + y^2}{c^2} = \frac{p^{2n}}{4} \qquad (1)$$

Riscrivendo, otteniamo

$$4(x^2 + y^2) = p^{2n} c^2 = p^{2n+2\gamma} c_1^2. \qquad (\otimes)$$

1° caso $p \equiv 3 \pmod 4$. Sia x che y sono divisibili per $p^{n+\gamma}$. Ne segue che il quadrato della distanza fra due qualsiasi di questi punti è divisibile per $p^{2n} \geq p^{n+1}$. FINE.

2° caso $p \equiv 1 \pmod 4$. Allora
$p = (r + si)(r - si)$ in $\mathbb{Z}[i]$.
In $(\otimes)$ a destra c'è $p^{2n+2\gamma} = (r+si)^{2n+2\gamma}(r-si)^{2n+2\gamma}$
a sinistra c'è $(x+iy)(x-iy)$

Ottengo: $x + iy = (r+si)^k (r-si)^{2n+2\gamma-k}$ · altre cose
↓
primi con p

2a) $\gamma > 0$ (cioè $p | c$).

Osserviamo che $(x, y, c) = 1$.

Ci sono solo 2 possibilità: $k = 0$, $k = 2n + 2\gamma$.

Se prendo 5 di questi punti, 3 hanno lo stesso k. Quindi, WLOG, 3 sono divisibili per $(r+si)^{2n+2\gamma}$ → quindi le loro differenze → quindi il quadrato del valore assoluto delle loro differenze è divisibile per $p^{2n+2\gamma} \geq p^{n+1}$.

2b) $\gamma = 0$ (cioè $p \nmid c$).

$$x + iy = (r+si)^k (r-si)^{2n-k} \cdot \text{altre cose}$$

Consideriamo dapprima i punti in cui si può avere $k = n$. Questo vuol dire

$$x + iy = p^n \cdot \text{altre cose}$$

$$p^n | x \quad p^n | y, \quad x = p^n x_1, \; y = p^n y_1.$$

L'equazione $(*)$ diventa

$$4 p^{2n} (x_1^2 + y_1^2) = p^{2n} c_1^2$$

$$4 (x_1^2 + y_1^2) = c_1^2$$

Questo dice che necessariamente

$$-\frac{c_1}{2} \leq x_1, y_1 \leq \frac{c_1}{2}.$$

Però la classe resto di x_1, y_1 modulo c_1 è fissata. Quindi c'è al più una soluzione, a meno che una delle classi sia $\frac{c_1}{2}$ $\left(\equiv -\frac{c_1}{2}\right)$ e l'altra sia zero.

→ il n° di punti con $k = n$ è ≤ 2.

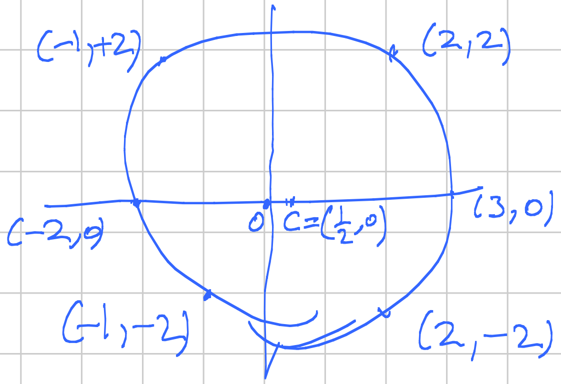
Quindi, se prendo 7 punti, ce ne sono almeno 5 con $k \neq n$ e quindi almeno 3 con $k > n$

(per simmetria), cioè $k \geq n+1$, cioè $x+iy$ divisibile per $(r+si)^{n+1}$

Le differenze fra questi punti sono divisibili per $(r+si)^{n+1}$ → i quadrati dei loro valori assoluti sono divisibili per p^{n+1}.

Esempio (Meno di 7 punti non basta).

Circonferenza di centro $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ e diametro 5 (raggio $5/2$).



CONTROLLARE CHE NON VA.

Esempio (IMO 6 – 1988)

Siano a, b interi positivi tali che
$$ab+1 \mid a^2+b^2$$

Allora $\dfrac{a^2+b^2}{ab+1} = \square$.

Sol. $\boxed{a^2+b^2 = k(ab+1)}$ $k \in \mathbb{Z}$ $k > 0$.

L'equazione $x^2 - kbx + b^2 - k = 0$ ha come sol. $x = a$

Questa ha anche un'altra sol intera, $x = a'$, tale che

$a + a' = kb$ $\quad aa' = b^2 - k$

Si può passare (tenendo fisso k) da una

coppia di soluzioni (a, b) a una coppia
$(a', b) = (kb - a, b)$.
Può essere $a = b$? Avremmo $2a^2 = k(a^2+1)$
$\to k=1 \quad a=1 \quad 1 = \square$.
Per simmetria, supponiamo $a > b$.
Notiamo che anche a' deve essere ≥ 0.
$aa' = b^2 - k \Rightarrow a' < b$
Passo da (a, b) ad (a', b)
$a > b \qquad a' < b$
Posso scambiare i ruoli fra a e b
$(a, b) \to (a', b) \to (a', b') \to (a'', b') \to (a'', b'')$
$a > b \qquad a' < b \qquad a' > b'$
IMPORTANTE: TUTTI QUESTI PASSAGGI LASCIANO FISSO k
SCENDO FINO alla soluzione 0. $\to k = \square$.

(Dal fondo: ho una soluzione $x = 0$
$(a, 0) \qquad a^2 + b^2 = k(ab+1)$
$\downarrow \qquad a^2 + 0 = k \qquad k = a^2$
$(a, b) \qquad b$ è sol. dell'equazione:
$(x^2 - kbx + b^2 - k = 0$ diventa):
$$x^2 - a^2 \cdot a \cdot x + a^2 - a^2 = 0$$
$$x = 0, \ x = a^3$$
$$(a, 0) \to (a, a^3) \to (y, a^3)$$
$$x^2 - a^2 \cdot a^3 x + a^6 - a^2 = 0$$
$$x = \frac{a^5 \pm \sqrt{a^{10} - 4a^6 + 4a^2}}{2} = \frac{a^5 \pm a(a^4 - 2)}{2} =$$
$$a^5 - a, \ a$$

Sono passato alla coppia $(a^5 - a, a^3)$

Esempio 2 IMO 2007. Problema 5.

a, b interi positivi tali che

$$4ab-1 \mid (4a^2-1)^2.$$

Allora $a = b$.

Sol. Supponiamo che esista una sol. con $a \neq b$ (p. es. $a < b$). Poniamo

$$k = \frac{(4a^2-1)^2}{4ab-1}$$

Si vede che $k \equiv -1 \pmod{4a}$, cioè

k è del tipo $4ab'-1$

$$4ab'-1 \mid (4a^2-1)^2$$

(a,b) sol. $\Rightarrow$ (a,b') sol.

Naturalmente $a < b \Rightarrow a > b'$ e viceversa

Altra osservazione: considero una congruenza modulo $4ab-1$. $\quad (-1 \equiv -4ab;\ 1 \equiv 16a^2b^2)$

$$(4b^2-1)^2 \equiv (4b^2 - 16a^2b^2)^2 = 16b^4(4a^2-1)^2$$

Quindi $4ab-1 \mid (4a^2-1)^2 \mid (4b^2-1)^2$

C'è una simmetria, e le coppie (a,b) sono tali che $4ab-1$ divide sia $(4a^2-1)^2$ che $(4b^2-1)^2$.

LA SIMMETRIA mi consente di fare come prima una discesa concatenata fino ad arrivare ad una sol minimale $(a=1)$

$$4ab-1 = 4b-1 \mid 4a^2-1 = 3 \qquad \text{cioè } b = 1$$

e quindi $a = b$ assurdo.

Esempio 3 PREIMO 8 (2007).

Equazione diofantea
$$a^m b^n = (a+b)^2 + 1$$
dove a, b, m, n sono interi positivi.

Sol. 1 (tradizionale) Si ha facilmente
$$a \mid b^2+1 \qquad b \mid a^2+1 \qquad (*).$$

Se $a = b$, allora $a = b = 1$.

Supponiamo $a < b$.

- caso $a = 1$ $\quad b \mid 2 \Rightarrow b = 2$ NON VA BENE. $(2^n = 3^2+1 = 10)$.
- caso $a \geq 2$ $\quad a^m b^n = (a+b)^2 + 1 < 4b^2 \leq a^2 b^2 < ab^3 \leq a^m b^3 \qquad (\#)$

$\rightarrow n < 3$.

$(*)$ sottocaso $n = 2$ $\quad a^m b^2 < 4b^2 \quad a^m < 4$

$m = 1 \quad a = 2 \quad \rightarrow b = 5$

$m = 1 \quad a = 3 \quad \rightarrow 3b^2 = (3+b)^2 + 1$ No sol

$(*)$ sottocaso $n = 1$ Sostituendo in $\#$ ho $a^m b < 4b^2 \quad a^m < 4b$

e poi uso $b \mid a^2+1$.

(i) $b = a^2 + 1$

da $a \mid b^2 + 1$ si ha $a \mid a^4 + 4a^2 + 2 \quad a = 2$

$b = 5$ MA NON FUNZIONA.

(ii) $b \leq \dfrac{a^2+1}{2} \qquad a^m < 2(a^2+1)$

Si verifica facilmente che $\begin{cases} a = 2 \quad m \leq 3 \\ \text{oppure} \\ m \leq 2 \end{cases}$

Esaminando i casi si ottiene

- $a=2 \to b \leq 5/2$ NON FUNZIONA
- $m=1$ $ab=(a+b)^2+1$ NON FUNZIONA
- $m=2$ da $a^2<4b$ e $b \mid a^2+1$

si ricava che $a^2+1=b, 2b, 3b, 4b$

$a^2+1=b$ già fatto

$a^2+1 \not\equiv 0 \ (3)$ $a^2+1 \not\equiv 0 \pmod 4$

resta il caso $a^2+1=2b$

$a \mid b^2+1 \Rightarrow 4a \mid 4b^2+4 = a^4+2a^2+5$

$a=5 \to b=13$ è OK

Sol. 2

LEMMA $x^2+y^2+1=kxy$ ha soluzioni in interi positivi se e solo se $k=3$.

DIM. LEMMA Se $k\neq 3$ non ci possono essere soluzioni con $x=y$. Infatti questo darebbe

$$1=(k-2)x^2.$$

Supponiamo che esista una soluzione (a,b) con $a>b$. Quindi a è soluzione dell'equazione

$$x^2-kbx+b^2+1=0.$$

L'altra soluzione, a', soddisfa $a'<b$

(se fosse $a'\geq b$ avrei $aa' \geq (b+1)b=b^2+b>b^2+1$ a meno che $b=1$).

In ogni caso posso concatenare le coppie di soluzioni ed arrivare a una (minimale) con $b=1$, che corrisponde all'equazione

$$x^2-kx+2=0.$$

che può avere solo (come soluzioni intere pos.) $x=1, x=2$

$x=1 \to k=3 \qquad x=2 \to k=3.$

— o —

Applichiamo il lemma al nostro problema

Trasformiamo l'equazione originale in

$$a^m b^n = a^2+b^2+2ab+1$$

$$ab\underbrace{(a^{m-1}b^{n-1}-2)}_{k} = a^2+b^2+1$$

Basta considerare solo il caso $k=3$

$$a^{m-1}b^{n-1}=5$$

$a^{m-1}=5 \quad b^{n-1}=1 \qquad a=5 \quad m=2 \qquad b=2,13 \quad n=1$

$a^{m-1}=1 \quad b^{n-1}=5 \qquad b=5 \quad n=2 \qquad a=2,13 \quad m=1$

Applicazione di Chevalley-Warning.
(IMO Shortlist N8, 2003)

Sia p un primo e A un insieme di interi positivi tale che:

(i) L'insieme dei divisori primi degli elementi di A contiene esattamente $p-1$ elementi

(ii) Per ogni $B \subseteq A$, $B \neq \emptyset$ il prodotto $\prod_{b\in B} b$ non è una potenza p-esima.

Quanti elementi al massimo può avere A?

Se considero $B_i = \{p_i, p_i^{p+1}, p_i^{2p+1}, \dots, p_i^{(p-2)p+1}\}$

$|B_i| = p-1 \qquad A = \cup B_i$ ha $(p-1)^2$ elementi

e questo funziona $\qquad \boxed{r=p-1}$

Congettura: la risposta è $r^2=(p-1)^2$.

Supponiamo che $|A| \geq r^2+1$

$$A = \{t_1, t_2, \dots, t_{r^2+1}\}.$$

$$t_i = p_1^{a_{i1}} \dots p_r^{a_{ir}}$$

Scegliere B in modo che il prodotto dei suoi elementi venga una potenza p-esima è come scegliere $y_i \in \{0,1\}$ in modo tale che

$$\begin{cases} \sum a_{i1} y_i \equiv 0 \pmod p \\ \vdots \\ \sum a_{ir} y_i \equiv 0 \pmod p \end{cases}$$

Trucco: $y_i = x_i^{p-1} = x_i^r$, il sistema diventa

$$\begin{cases} F_1 = \sum a_{i1} x_i^r \equiv 0 \pmod p \\ \vdots \\ F_r = \sum a_{ir} x_i^r \equiv 0 \pmod p \end{cases}$$

Cerco una sol. non banale del sistema.
In realtà, basta cercare una soluzione non banale della singola equazione

$$F = F_1^r + F_2^r + \dots + F_r^r \equiv 0 \pmod p$$

L'equazione ha grado r^2 e r^2+1 variabili.
Chevalley-Warning $\to$ ha sol. non banale