C1 ADVANCED

Titolo nota 04/09/2014

"ALGORITMI"

① IMO SL 2005 C1

C'È UNA CASA CON DELLE STANZE.
IN OGNI STANZA ≥ 3 LAMPADE. TUTTE LE LAMPADE SONO DIVISE IN COPPIE. PER OGNI COPPIA C'È UN INTERRUTTORE CHE CAMBIA SIMULTANEAMENTE LO STATO DELLA COPPIA DI LAMPADE. LE COPPIE SONO DISGIUNTE.

TESI È POSSIBILE, PREMENDO OPPORTUNAMENTE GLI INTERRUTTORI, FARE IN MODO CHE IN OGNI STANZA CI SIANO SIA LAMPADE ACCESE CHE SPENTE, A PARTIRE DA QUALSIASI CONFIG.

② IMO SL 2005 C7

SIAMO IN $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, $n \geq 2$. ABBIAMO n NUMERI

$a_1, a_2, \ldots, a_n$ CON $a_1 + \ldots + a_n \equiv 0 \ (n)$.

ALLORA ESISTONO σ, τ PERMUTAZIONI SU $\{1, \ldots n\}$

T.C. $\sigma(i) + \tau(i) \equiv a_i \ (n)$

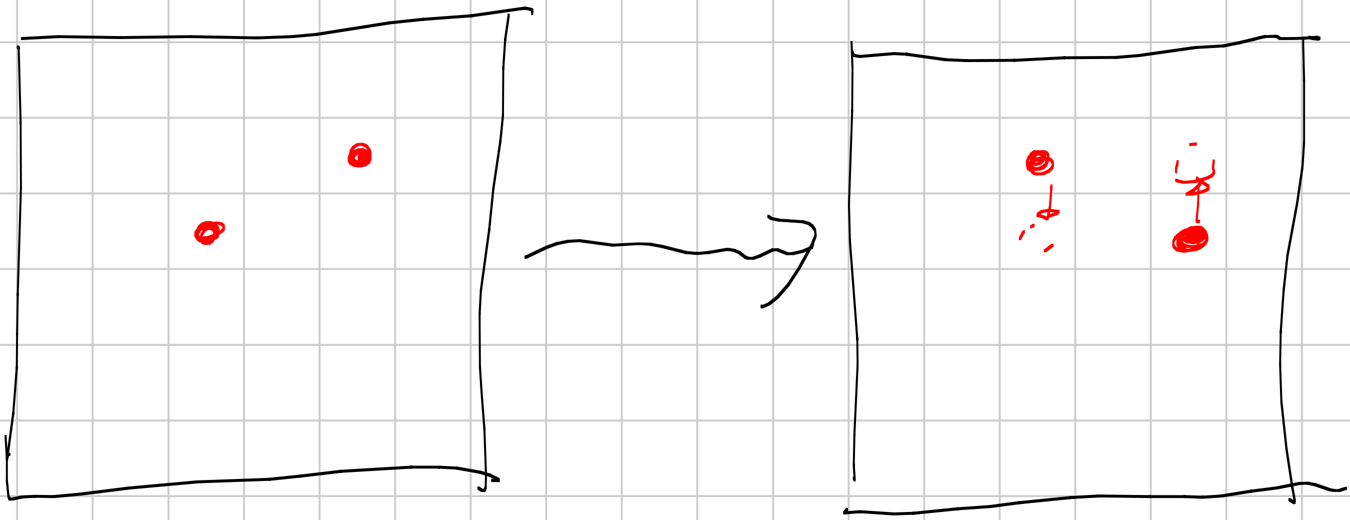
③ IMO SL 2006 C4

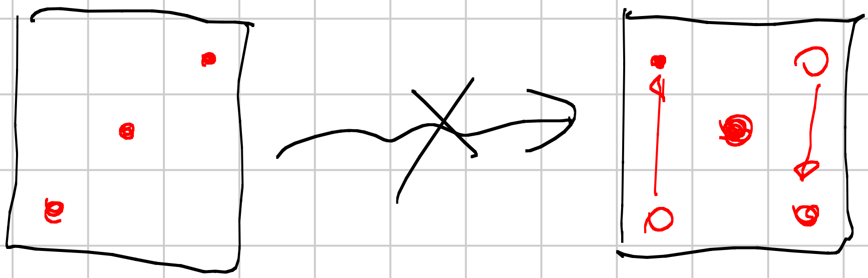
A e B sono due griglie $n \times n$ con righe e colonne numerate da 1 a n. Chiamo $R_A(x,y)$ il rettangolo in A formato dalle prime x righe e dalle prime y colonne $1 \leq x, y \leq n$

analogamente $R_B(x,y)$.

Sia su A che su B metto n fragole, una per ogni riga e una per ogni colonna.

Una mossa in una griglia consiste nello scegliere due fragole in posizioni (x,y) e (z,t) con $x < z$ e $t < y$, t.c. nel rettangolo $[x,z] \times [t,y]$ ci sono solo queste 2 fragole, e nello spostarle nelle posizioni (x,t) e (z,y)





SUPPONIAMO CHE $\forall\, x,y$ IN $R_A(x,y)$ CI SIANO PIÙ O TANTE FRAGOLE QUANTE IN $R_B(x,y)$. ALLORA CON UN PO' DI MOSSE SU B SI RENDE B UGUALE AD A.

(4) IMO 2007 3 C'È UN GRAFO IN CUI LA MASSIMA DIMENSIONE DI UNA CRICCA È PARI. ALLORA POSSO DIVIDERE I VERTICI IN DUE SOTTOINSIEMI PER CUI LE MASSIME DIMENSIONI

DELLE CRICCHE NEI DUE SOTTOINSIEMI SONO UGUALI

(5) IMO 2009 6. DATI $a_1, \dots, a_n$ INTERI POSITIVI TUTTI DISTINTI, SIA $S = a_1 + \dots + a_n$.
SIANO $0 < b_1, \dots, b_m < S$ INTERI POSITIVI DISTINTI CON $m < n$.
UNA CAVALLETTA PARTE DA 0 E DEVE ARRIVARE IN S SALTANDO SULLA RETTA REALE; DEVE FARE IN QUALCHE ORDINE SALTI DI LUNGHEZZE $a_1, \dots, a_n$.
IN $b_1, \dots, b_m$ CI SONO DELLE MINE CHE LA CAVALLETTA DEVE EVITARE. DIM CHE LA CAVALLETTA PUÒ ARRIVARE SANA E SALVA IN S.

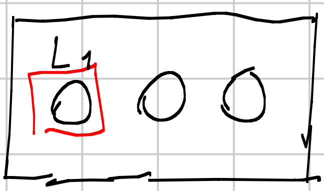
---

(1) CHIAMIAMO "NORMALE" UNA STANZA IN CUI IN UNA CERTA CONFIG., CI SONO SIA LAMPADE ACCESE CHE SPENTE.

CERCHIAMO UN ALGORITMO CHE, DATA UNA CONFIG., LA "MIGLIORA": IL NUMERO DI STANZE NORMALI DEVE AUMENTARE.

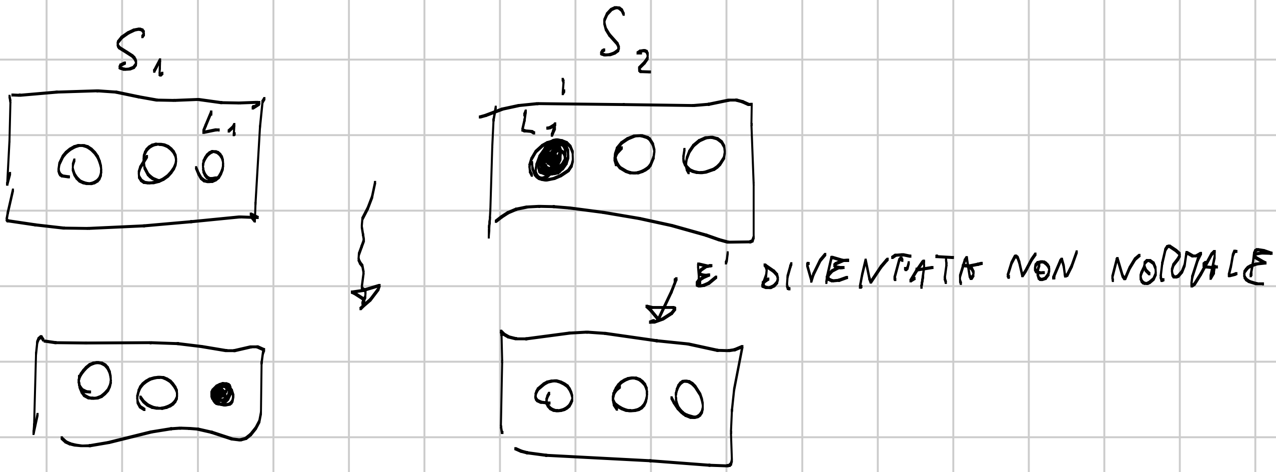
- SUPPONIAMO CHE CI SIA UNA STANZA NON NORMALE

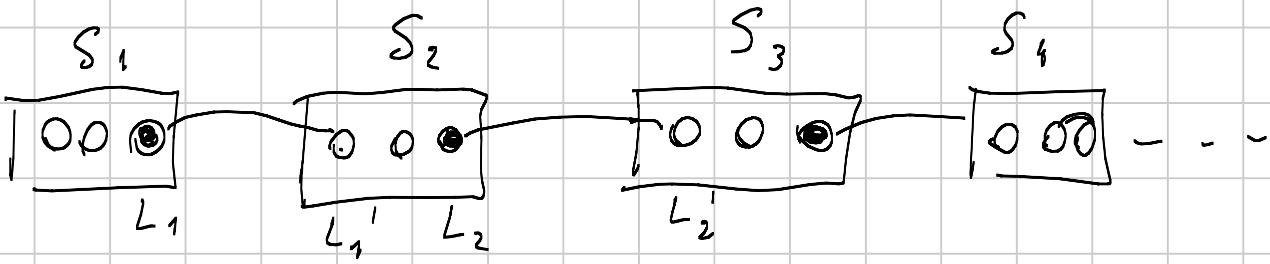
S_1 ○ = ACCESO ● = SPENTO



OSS SE PREMO UN INTERRUTTORE DI UNA LAMPADA DI UNA STANZA NON NORMALE, LA STANZA DIVENTA NORMALE

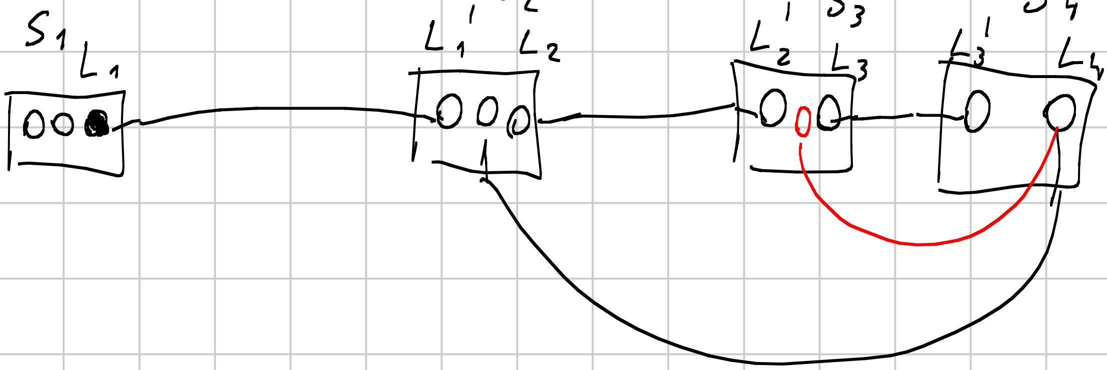
PREMO L'INTERRUTTORE DI L_1: S_1 DIVENTA NORMALE, MA LA STANZA S_2 IN CUI SI TROVA LA COMP. DI S_1 POTREBBE DA NORMALE DIVENTARE NON NORMALE; ALTRIMENTI IL N° TOT. DI ST. NORMALI AUMENTA E SIAMO FELICI.





CON QUESTO METODO S_1 DIVENTA NORMALE, S_2 RIDIVENTA NORMALE A SPESE DI S_3, ----

SE S_i CONTIENE 2 LAMPADE COLLEGATE, RENDO S_i NORMALE SENZA CAMBIARE ALTRE STANZE



SE IL PERCORSO È $S_1 S_2 --- S_n S_i$

CON $S_1 \ldots S_n$ TUTTE DIVERSE E $1 \leq i \leq n$

$\underline{i=1}$ $L'_n \neq L_1$ E C'È ALMENO UN'ALTRA LAMPADA CHE CON L_1 GIÀ GARANTISCE LA NORMALITÀ

$i > 1$ L_i e L'_{i-1} già garantiscono la normalità di S_i, e $L'_n \neq L'_{i-1}$ perché $L_n \neq L_{i-1}$ perché $n \neq i-1 \Rightarrow S_n \neq S_i \Rightarrow L'_n \neq L'_{i-1}$

$L'_n \neq L_i$ perché $L_n \neq L'_n$ per $i=n$

$L'_n \neq L_i$ con $1<i<n$ perché le loro "amiche" L_n e L'_i sono diverse (una è scelta tra le disponibili in S_n, l'altra è etichettata all'arrivo in una stanza).

---

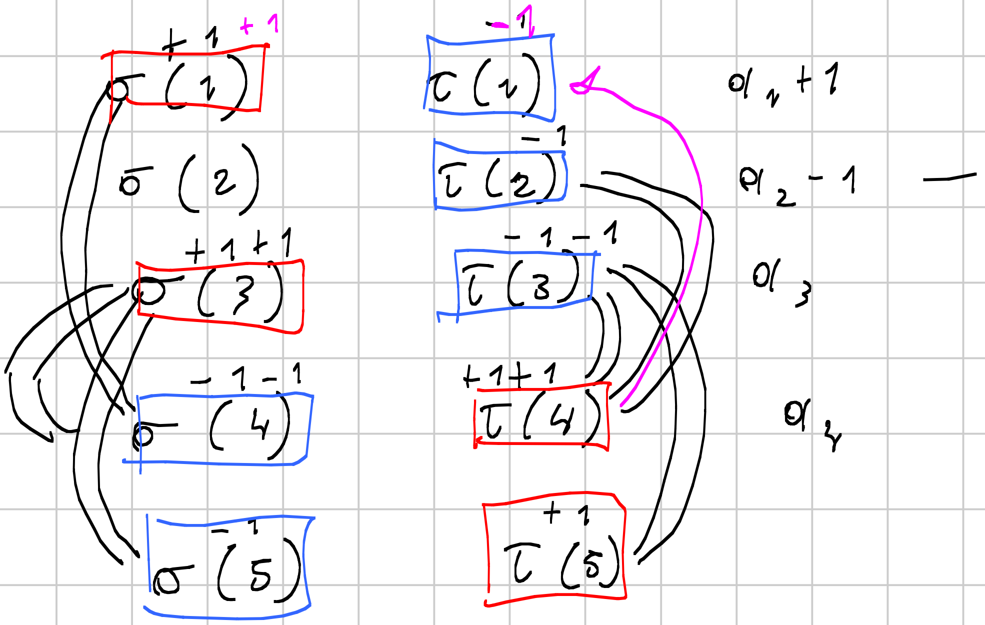
(2) SE RIESCO A RISOLVERE IL PROBLEMA PER $a_1, \ldots, a_n$ E MODIFICO DI POCO LA n-UPLA, RIESCO A MODIFICARE OPPORTUNAMENTE σ E τ?

$$\begin{array}{cccc}
\sigma(1) + & \tau(1) & a_1 & b_1 \\
\sigma(2) + & \tau(2) & a_2 & b_2 \\
 & \vdots & & \\
\sigma(n) + & \tau(n) & a_n & b_n
\end{array}$$

<u>OSS</u> Se ho σ e τ per $a_1, \ldots, a_n$, posso rimescolare $a_1, \ldots, a_n$ (cioè prendere una

permutazione ρ e considerare $(a_{\rho(1)}, \dots, a_{\rho(n)})$
e anche per la nuova n-upla ha una soluzione.

Cerco di sistemare la n-upla $a_1+1, a_2-1, a_3, \dots a_n$

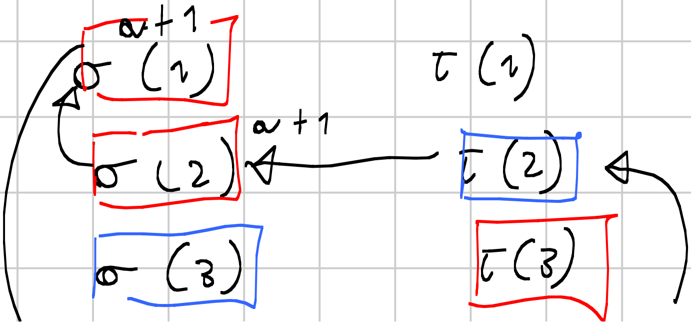


Se a un certo punto capito in una riga già visitata, vado avanti come se niente fosse.

IDEA COLORO DI ROSSO UN NUMERO NUOVO A CUI DEVO AGGIUNGERE 1 LA 1ª VOLTA CHE LO INCONTRO, DI BLU UN NUMERO A CUI TOLGO 1 LA PRIMA VOLTA

LEMMA VISITERÒ ALTERNATIVAMENTE CASELLE ROSSE E BLU

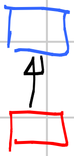
PER ASSURDO PRENDO IL PRIMO PASSAGGIO DA ROSSO A ROSSO ...



$\boxed{\sigma(4)} \longrightarrow \boxed{\tau(4)}$

OGNI VOLTA CHE VISITO UNA CASELLA, SE È ROSSA AGGIUNGO 1, SE È BLU TOLGO 1.

LA 1^a VOLTA CHE CADO IN UNA RIGA (AD ES. LA 2^a), È TRAMITE UNO SPOSTAMENTO

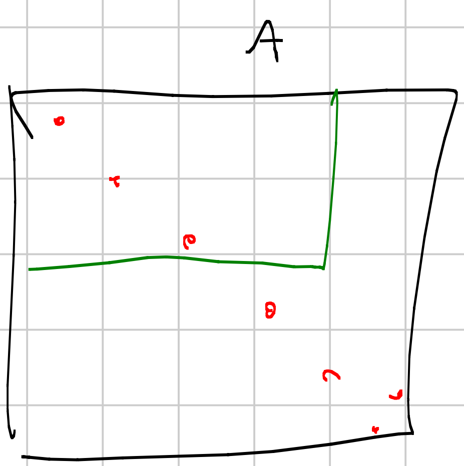


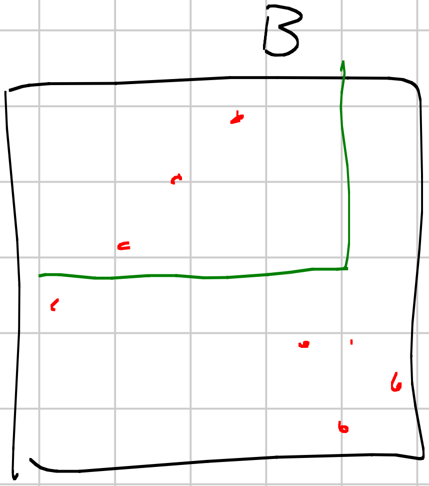
DA ROSSO A BLU IN VERTICALE

PERCHÉ PRIMA O POI CADO IN $\sigma(2)$ O $\tau(2)$?
A OGNI PASSAGGIO UNA CASELLA ROSSA (A SX O A DX) AUMENTA DI 1; PRIMA O POI C'È UNA CASELLA ROSSA CHE RAGGIUNGE UNO TRA $\sigma(2)$ E $\tau(2)$ ($\sigma(2)$ SE È A SX, $\tau(2)$ SE È A DX).

A QUEL PUNTO HO TROVATO 2 PERM. CHE VANNO BENE PER $a_1+1, a_2-1, a_3, \dots, a_n$ E TANTO MI BASTA.

3



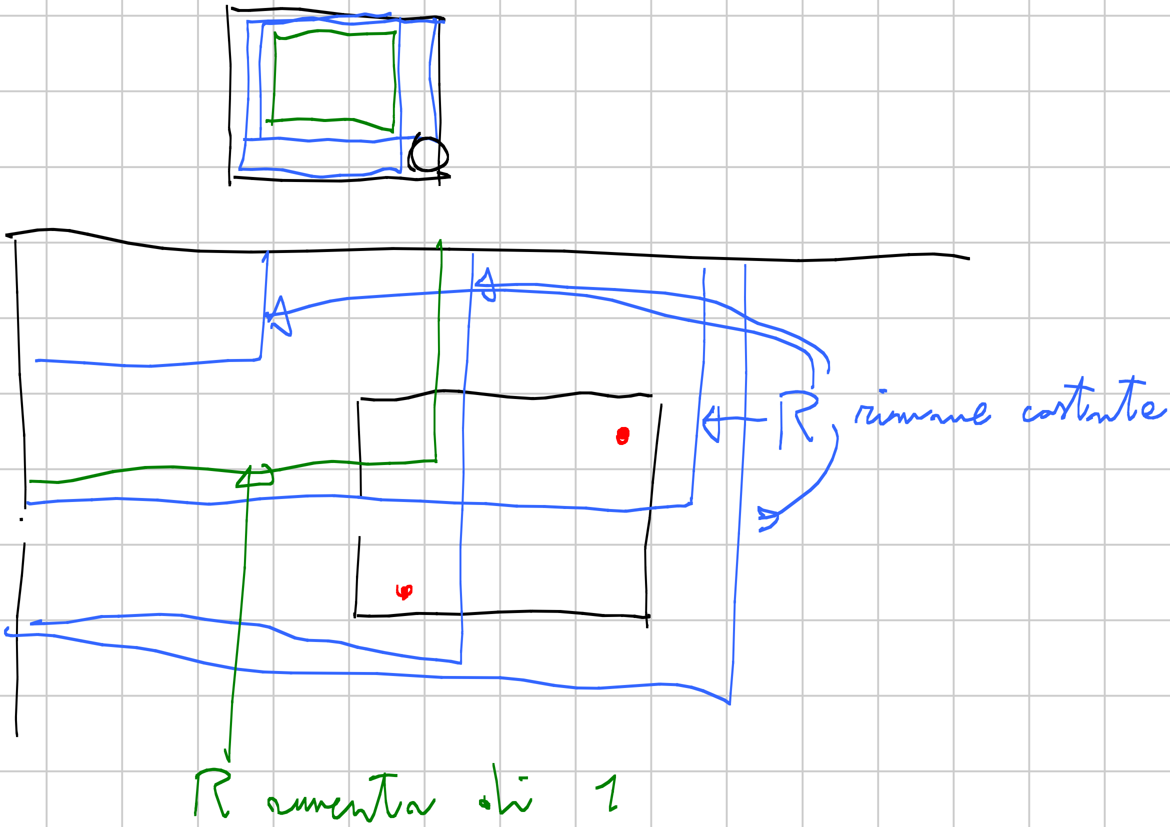


OSS 1 OGNI MOSSA SU B FA AUMENTARE (DEBOLMENTE) OGNUNO DEGLI $R_B(x,y)$

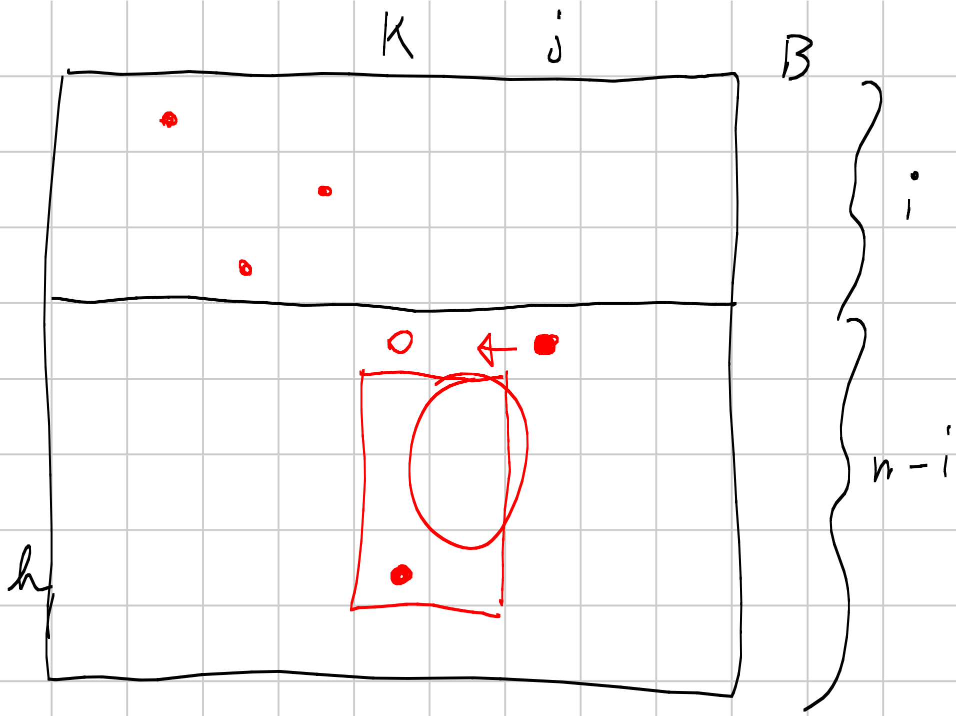
OSS 2 IN GENERALE NON SI POSSONO FARE INFINITE MOSSE

OSS 3 SE $R_A(x,y) = R_B(x,y) \ \forall x,y$ ALLORA $A = B$

OSS 4 $R(x,y) + R(x-1,y-1) - R(x,y-1) - R(x-1,y) = \begin{cases} 1 & \text{se c'è } \bullet \text{ in } (x,y) \\ 0 & \text{se non c'è} \end{cases}$



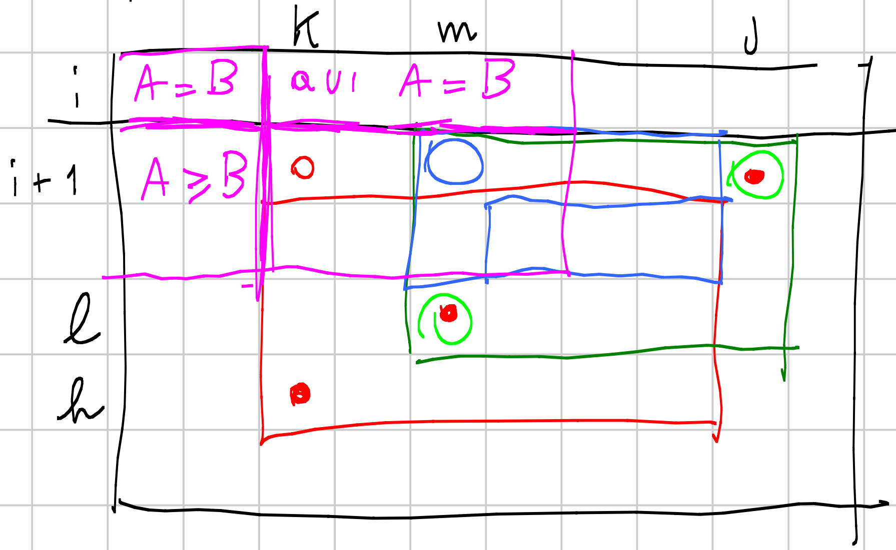
CI BASTA DIMOSTRARE CHE SE $R_A(x,y) > R_B(x,y)$ PER QUALCHE (x,y), ALLORA ESISTE UNA MOSSA CHE MANTIENE LE IPOTESI $(R_A \geq R_B \ \forall x,y)$



nelle prime i righe B coincide con A

nella riga $i+1$ B ha ● nella colonna j, A nella colonna k con $k<j$

Nel rettangolo rosso c'è almeno una fragola; prendiamo quella più in alto, nella riga l e nella colonna m



Gli $R_B(x,y)$ che aumentano di 1 sono quelli rel. a rettangoli che contengono la casella O ma non le O O

Per effettuare la mossa $(i+1, j), (l, m) \rightsquigarrow$

$\rightsquigarrow (i+1, m), (l, j)$

Il rettangolo viola ha vertice (x, y)

$m < x < j \quad i+1 < y < l \qquad R_B(x,y) < R_A(x,y)$

Nel rettangolo $[i+1, x] \times [k, y]$ A contiene almeno una ● e B nessuna; negli altri rettangoli $[\,]$

vale comunque il $\geq$ sul n° di •

PAUSA ALGEBRICA: COMBINATORIAL NULLSTELLENSATZ

$F(x_1, \ldots, x_n)$ è un polinomio $\neq 0$ in n variabili a coefficienti in $\mathbb{C}$. Riusciamo a dire qualcosa sulle n-uple $(a_1, \ldots a_n)$ in cui F non si annulla? Ce ne sono abbastanza? Intanto ce ne sta almeno una?

$$F(x_1, \ldots, x_n) = F_k(x_2, \ldots, x_n)\, x_1^k + \ldots + F_0(x_2, \ldots x_n)$$

$k = \deg_{x_1} F$ Se $k = 0$ allora x_1 non compare

F è un pol. in $n-1$ variabili, scelgo x_1 a piacere e gli altri per ip. induttiva.

Se $k \geq 1$ scelgo $x_2, \ldots, x_n$ t.c. $F_k(x_2 \ldots x_n) \neq 0$ e posso farlo per ip. ind. Mi ritrovo con un pol. in 1 variabile di grado k che ammette un "non-zero".

C. N. F ha grado totale k e contiene un monomio della forma $\lambda x_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{\alpha_n}$ $\lambda \neq 0$ $\alpha_1 + \ldots + \alpha_n = k$

Prendiamo $S_1, S_2, \ldots, S_n \subseteq \mathbb{C}$ $|S_i| = \alpha_i + 1$

Allora posso scegliere $a_1 \in S_1, \ldots, a_n \in S_n$ per cui $F(a_1, \ldots, a_n) \neq 0$

DIM Suppongo che $\alpha_1 \geq 1$ (se $K=0$ il teorema è banale) (uno degli α_i è quindi ≥ 1)

Prendo $s \in S_1$

$$g(x_1, \dots, x_n) := F(x_1, \dots, x_n) - F(s, x_2, \dots, x_n)$$

$g(s, x_2, \dots, x_n)$ come polinomio in $x_2, \dots, x_n$ è nullo

$$g = (x_1 - s) \cdot h(x_1, \dots, x_n)$$

$$\deg h + 1 = \deg g \leq \deg F$$

Se in F compare $\lambda x_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot x_n^{\alpha_n}$, in h compare $\lambda x_1^{\alpha_1 - 1} \cdot x_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot x_n^{\alpha_n}$

Quindi in realtà h ha grado tot. $K-1$ e quello trovato è un monomio di grado massimo

$$\exists\, a_1 \in \underbrace{S_1 \setminus \{s\}}_{\text{ha } \alpha_1 = (\alpha_1 - 1) + 1 \text{ elementi}}, a_2 \in S_2, \dots a_n \in S_n$$

$$h(a_1, \dots, a_n) \neq 0$$

$$(a_1 - s) \cdot h(a_1, \dots, a_n) = g(a_1, \dots a_n) \neq 0$$

$$F(a_1, a_2, \dots, a_n) - F(s, a_2, \dots, a_n) \neq 0$$

non possono essere tutti e due nulli

IMO 2007/6 $\{1, \dots, n+1\}^3 \setminus \{(1,1,1)\}$ non si può coprire con $3n-1$ piani che non passano per $(1,1,1)$

Siano $P_1, \dots, P_K$ piani che coprono i punti da coprire ma non $(1,1,1)$ (per assurdo $K \leq 3n-1$)

P_i ha equazione $f_i(x,y,z) = a_i x + b_i y + c_i z + d = 0$ di primo grado

$$F(x,y,z) = \prod_{i=1}^{K} F_i(x,y,z)$$

F ha grado totale K, ma come andare avanti?

GENERALIZZIAMO S_x, S_y, S_z finiti $\subseteq \mathbb{R}$

$\bar{x} \in S_x$ $\bar{y} \in S_y$ $\bar{z} \in S_z$. Vogliamo coprire

$S_x \times S_y \times S_z \setminus \{(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})\}$ senza coprire

$(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$; congettura: servono $|S_x| + |S_y| + |S_z| - 3$

OSS. Questa quantità basta

$P_1, \dots, P_K$ che coprono $F_1, \dots, F_K$ come prima

$K < |S_x| + \dots - 3 \Rightarrow \deg F < |S_x| + \dots - 3$

CURIOSITÀ

SPECIALIZZIAMO (TORNIAMO AL VERO PROBLEMA)

$g(x,y,z) = (x-2) \cdots (x-(n+1)) \cdot (y-2) \cdots (y-(n+1)) \cdot (z-2) \cdots (z-(n+1))$

È UN POLINOMIO DI GRADO $3n$ CON MONOMIO DI GRADO MASSIMO $x^n y^n z^n$.

$F(1,1,1) = \lambda \neq 0$

$\left(\lambda g - g(1,1,1) F\right)$ è un pol. di grado $3n$ con monomio di grado massimo $\lambda x^n y^n z^n$, ma si annulla su $\{1, \dots n+1\}^3$. PER IL NULLSTELLENSATZ COMBINATORICO TROVO UN ASSURDO.