C2A ADVANCED [Troleito Br00tal]

- Double Counting
- Invarianti
- Esercizi

Dimostrare che:

$$n\sum_{i=2}^{n}\frac{1}{i} \leq \sum_{i=1}^{n}\tau(i) \leq n\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}$$

$\forall n \geq 2$, dove $\tau(k)$ denota il numero di divisori di k.

Hint 1: $\tau(k)$ può essere visto come il numero di coppie ordinate (a,b) tali che: $ab=k$

Double counting sul numero di coppie (a,b) ordinate tali che $ab \leq n$.

Notando che il numero di coppie tali che $ab=k$ è $\tau(k)$, il numero totale di coppie sarà...

$$\ldots \text{C.H.S.} \sum_{i=1}^{n}\tau(i)$$

Contiamole fissando a:
il numero di b tali che $ab \leq n$ in funzione di a ed n è...

$$\dots \left\lfloor \frac{n}{a} \right\rfloor$$

Quindi il numero totale di coppie è...

$$\dots \sum_{i=1}^{n} \left\lfloor \frac{n}{i} \right\rfloor$$

Vale quindi

$$\sum_{i=1}^{n} \left\lfloor \frac{n}{i} \right\rfloor = \sum_{i=1}^{n} \tau(i)$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{n}{i} - 1 \leq \left\lfloor \frac{n}{i} \right\rfloor \leq \frac{n}{i}$$

$$\Downarrow$$

$$\sum \left(\frac{n}{i} - 1\right) \leq \sum \left\lfloor \frac{n}{i} \right\rfloor \leq \sum \frac{n}{i}$$

$$\Downarrow$$

TESI.

Dimostrare che $\forall n \geq 1$ vale:

$$\sum_{i=1}^{n} \phi(i) \left\lfloor \frac{n}{i} \right\rfloor = \binom{n+1}{2}.$$

Cosa ci fa più schifo?:
- ϕ
- $\lfloor \, \rfloor$
- $(\,)$

Cerchiamo di trovare un modo sensato per scrivere la ϕ.

In funzione di coppie a e b!

L' LHS ricorda molto la presenza di coppie.

$\phi(k) =$ "Numero di interi a tali che $1 \leq a \leq k$, (a, k)."

$\left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor =$ "Numero di multipli di $k \leq n$".

Contiamo tutte le coppie (a,b) ordinate di interi positivi tali che:

$1 \le a \le n$, $1 \le b \le n$, $b \ge a$.

Sono $\binom{n+1}{2}$.

È come dire: conto le frazioni del tipo $\frac{a}{b}$ con $n \ge b \ge a \ge 1$.

- Se a e b sono coprimi e fisso b avrò esattamente $\phi(b)$ valori.

Noi le contiamo dalle frazioni irriducibili.

$\frac{p}{q}$ $(p,q)=1$ $p \le q$ $\xrightarrow{\text{Assegno}}$ $\frac{p}{q}, \frac{2p}{2q}, \frac{3p}{3q}, \dots, \frac{\lfloor \frac{n}{q} \rfloor p}{\lfloor \frac{n}{q} \rfloor q}$

$\lfloor \frac{n}{q} \rfloor p \to \le n$

$\lfloor \frac{n}{q} \rfloor q \to \le n$

Fissando q e contandole tutte troviamo:

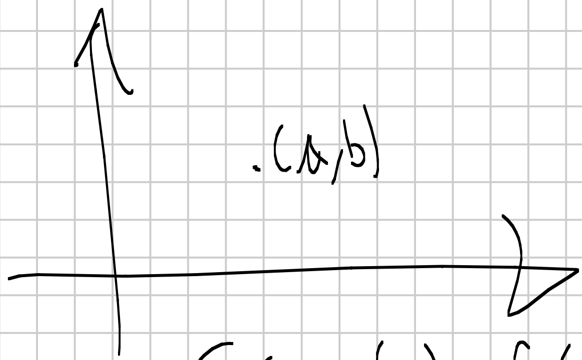
$$\underbrace{\phi(q)}_{\text{IL NUMERO DI FRAZIONI } \frac{p}{q},\ p \le q} \cdot \left\lfloor \frac{n}{q} \right\rfloor$$

$\to$ Sono $\binom{n+1}{2}$ PER D.C.

ESERCIZIO DA 7-8 MINUTI (FORSE):

$\forall n \geq 2$, dimostrare che:

$$\sum_{i=2}^{n} \lfloor \underbrace{\sqrt[i]{n}}_{\sqrt[i]{n}} \rfloor = \sum_{i=2}^{n} \lfloor \underbrace{\log_i n}_{\log_i n} \rfloor$$



Es.2 (by Davide)

$\forall (a,b) \mid a \geq 1, b \geq 1$ $a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}$,

Ho $f: \mathbb{Z}^2_+ \to \mathbb{Z}^+_1$ tale che

$$f(a_1, b_1) = f(\underbrace{a_2, b_2}) = \dots = f(a_{2015}, b_{2015})$$

$(a_i, b_i) = (a_j, b_j)$ PER QUALCHE $1 \leq i < j \leq 2015$.

DIMOSTRARE CHE $f(m,n) > mn$ PER QUALCHE (m,n).

Es.1

$$\sum_{i=2}^{n} \lfloor \sqrt[i]{n} \rfloor = \sum_{i=2}^{n} \lfloor \log_i n \rfloor$$

DOUBLE COUNTING SUL NUMERO DI COPPIE ORDINATE (a,b) TALI CHE $2 \leq a, b \leq n$ E...

$a^b \leq n.$

VOGLIAMO CONDIZIONI SIMMETRICHE SU a E b

(I.E. $a \geq 1$, $b \geq 2$ È UN CONTO PIÙ BRUTTO).

MENO DIRETTO.

FISSIAMO a: b ASSUME $\lfloor \log_a n \rfloor - 1$

$b \geq 2$!

FISSIAMO b: a ASSUME $\lfloor \sqrt[b]{n} \rfloor - 1$

SOMMANDO SU a E SU b OTTENGO TUTTE LE COPPIE.

DUNQUE: $\sum_{i=2} \left(\lfloor \log_i n \rfloor - 1 \right) = \sum_{i=2} \left(\lfloor \sqrt[i]{n} \rfloor - 1 \right)$

ES. 2

UN DOUBLE COUNTING

SUI VALORI DA 1 A K CONTENUTI NELL'IMMAGINE.

LAVORIAMO PER ASSURDO: $P(m, n) \leq mn$.

E CONTIAMO: LE COPPIE (m, n) CON $mn \leq K$ POSSONO ASSUMERE SOLO VALORI TRA 1 E K

QUINDI. #COPPIE $\leq$ VALORI CHE SI POSSONO ASSUMERE PER NUMERO DI VOLTE CHE LI POSSO ASSUMERE

$$\sum_{i=1}^{k} \tau(i) \leq 2014\, k$$

$\sim k \log k$ → PRENDO k GRANDE E VIENE

DIMOSTRARE CHE IL NUMERO DI MODI DI SCRIVERE n COME SOMMA DI INTERI POSITIVI IL CUI MASSIMO È k È UGUALE AL NUMERO DI SCRIVERE n COME SOMMA DI k INTERI POSITIVI.

(NON CONTA L'ORDINE).

ALL RUSSIAN OLYMPIAD 2014 GRADE 11 7.

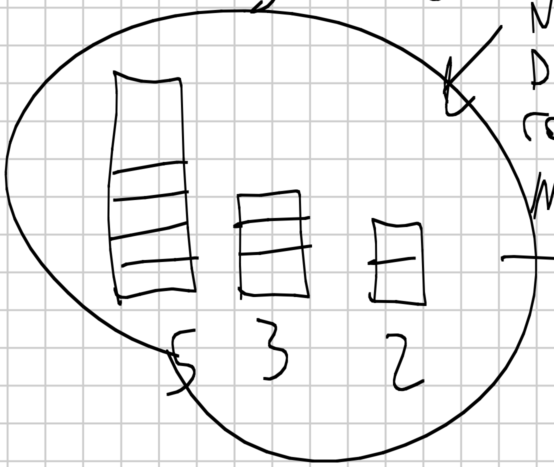
SU UNA LAVAGNA, SE CI SONO SCRITTI I POLINOMI $f(x)$ E $g(x)$ POSSIAMO SCRIVERE ANCHE $f(x)+g(x)$, $f(x)-g(x)$, $f(x)\,g(x)$, $3f(x)$, $f(g(x))$.

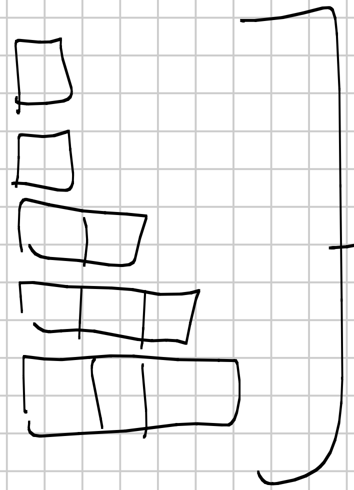
PARTENDO DA x^3-3x^2+5 E x^2-4x È POSSIBILE OTTENERE x^n-1?

ESERCIZIO DI SOPRA

$n = 10 = 5+3+2$

K=3
NUMERO DI MODI CON K INTERI POSITIVI





K=3
NUMERO DI MODI CON MASSIMO K.

QUESTA È UNA BIEZIONE

OK

INVARIANTI

$x^3 - 3x^2 + 5$

$x^2 - 4x$

ELEMENTI DELL'INSIEME

$f(x) \pm g(x)$

$3f(x)$

$f(x)g(x)$

$f(g(x))$

OPERAZIONI

$x^n - 1$

VOGLIAMO DIMOSTRARE CHE È FUORI

$f(x) \pm g(x)$

$f(x)\, g(x)$ → CONSERVA GLI ZERI IN COMUNE DELLE DERIVATE.

$3 g(x)$

$f(g(x))$

$f'(\alpha) = g'(\alpha) = 0$ ↓ IN α

SOMMA: OK

PRODOTTO: $f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ OK

$3f(x)$: OK

$f(g(x)) \rightarrow$ LA DERIVATA È

$g'(x) \cdot f'(g(x)) \rightarrow$ OK

DERIVIAMO I NOSTRI POLINOMI.

$x^3 - 3x^2 + 5 \rightarrow 3x^2 - 6x \rightarrow x = 0 \vee x = 2$

$x^2 - 4x \rightarrow 2x - 4 \rightarrow x = 2$

2 È RADICE DELLA DERIVATA DI ENTRAMBI I POLINOMI.

E NON È RADICE DELLA DERIVATA DI $x^n - 1$

SU UNA CALCOLATRICE FUNZIONANO SOLO I TASTI: $+$, $-$, x^{-1}. LA CALCOLATRICE RIESCE A RICORDARSI I NUMERI CHE HA TROVATO PRIMA.

SE DIAMO ALLA CALCOLATRICE I NUMERI $\underbrace{a \text{ E } b}_{\in \mathbb{R}}$ È SEMPRE POSSIBILE SCRIVERE ab?

ABBIAMO SU UNA LAVAGNA LA COPPIA $(29, 13)$.
PER OGNI COPPIA (a, b) SULLA LAVAGNA POSSIAMO CANCELLARLA E METTERE AL SUO POSTO UNA TRA:

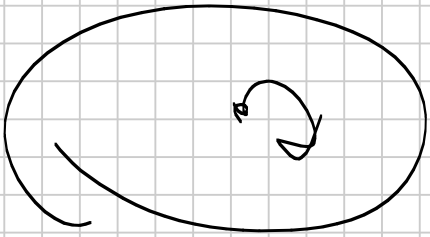
- (a^3, b)
- (a, b^3)
- $\forall n \geq 2: (\phi(na), \phi(nb))$
- $\forall n \geq 2: (n\phi(a), n\phi(b))$.

È POSSIBILE OTTENERE DUE NUMERI UGUALI?

II PARTE.

ES. 1

OPERAZIONI



$+, \ -, \ {}^{-1}$ → SONO SEMPRE DENTRO AD UN CAMPANELLO (FORSE)

$a=\sqrt{2} \qquad b=\sqrt{3}$

$S = q_1\sqrt{2} + q_2\sqrt{3}$, CON $q_1, q_2 \in \mathbb{Q}$.

$+$ INTERNO

$-$ INTERNO

$$(\sqrt{2}\,a+\sqrt{3}\,b)^{-1} = \frac{\sqrt{2}\,a-\sqrt{3}\,b}{2a^2-3b^2} \in S.$$

SI VERIFICA CHE $a\sqrt{2}+b\sqrt{3}=\sqrt{6}$ NON HA SOLUZIONE

PROBLEMA DISAGIO

$f: \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{N}$

$f(1) = 0$

$f(n) = 1 + f(\phi(n)) \to$ DEFINITA INDUTTIVAMENTE

$f(a;b) = f(a) - f(b)$

$f(21;13) = f(21) - f(13) = f(28) - f(12) =$

$= f(12) - f(4) = f(4) - f(2) = f(2) - f(1) = 1$

$f(x;x) = 0$

MA f COME SI COMPORTA?

$f(a^3;b)$

$f(a;b^3)$

$f(\phi(na);\phi(nb)) = f(an;bn)$

$f(n\phi(a);n\phi(b))$

PROPRIETÀ FIGA

$a \geq 2, b \geq 2.$

$$f(ab) = f(a) + f(b) - g((a,b))$$

IN SENSO DI MCD.

DOVE $g((a,b)) = 0$ SE $2 \mid (a,b)$

$= 1$ SE $2 \nmid (a,b)$

C'HO IL 2.

$$f(2^n) = n$$

$$f(3^n) = n+1$$

3^n

$2 \cdot 3^{n-1}$

$2 \cdot 3^{n-2}$

QUESTA NON È DIMOSTRATA

$f(p^n)$ CRESCE DI $f(p)-1$

$\forall p$ DISPARI

E ORA LO DIMOSTRIAMO.

INDUZIONE

$$f(ab) \stackrel{?}{=} f(a) + f(b) - g((a,b))$$

$$f(\phi(ab)) + \cancel{1} \stackrel{?}{=} f(\phi(a)) + \cancel{1} + f(\phi(b)) + 1 - g((a,b))$$

$a = 2^m \cdot \prod p_i^{\alpha} \prod r_i^{\gamma}$

$b = 2^n \prod q_i^{\beta} \prod r_i^{\delta}$

DOVE r_i SONO I PRIMI DISPARI IN COMUNE E PER GLI ALTRI

$$\phi(a) = 2^{m-1/m} \prod (p_i - 1) \cdot p_i^{\alpha - 1} \cdot \prod (r_i - 1) \cdot r_i^{\gamma - 1}$$

$$\phi(b) = 2^{n-1/n} \prod (q_i - 1) \cdot q_i^{\beta - 1} \prod (r_i - 1) \cdot r_i^{\delta - 1}$$

$$\phi(ab) = 2^{m+n-1/m+n} \cdot \prod (p_i - 1) \cdot p_i^{\alpha-1} \prod (q_i - 1) \cdot q_i^{\beta - 1} \cdot \prod (r_i - 1) \cdot r_i^{\gamma\delta - 1}$$

$$f(\phi(a)) = (m-1)/m + \sum f(p_i - 1) + \sum f(r_i - 1) + \sum f(p_i) \cdot (\alpha - 1) + \sum f(r_i) \cdot (\gamma - 1) - (\# p, \# r)$$

$$f(\phi(b)) = (n-1)/n + \ldots$$

$$f(\phi(ab)) = (m+n-1)/(m+n) + \sum f(p_i - 1) + \sum f(r_i - 1) + \sum f(q_i - 1) + \sum f(p_i) \cdot (\alpha - 1) + \sum f(q_i)(\beta - 1) + \sum f(r_i)(\gamma + \delta - 1) - (\# p, \# q, \# r)$$

MA NON TUTO

$$\sum f(r_i - 1) + \cancel{\# p, \# q, \# r} = \sum f(r_i) + \cancel{\# p, \# r} + \cancel{\# q, \# r}$$

$$\phi(r_i) = r_i - 1$$

$$f(r_i) = 1 + f(r_i - 1)$$

I CONTI VENGONO.

Ans 13, 29

A UN CERTO PUNTO DIVENTANO PARI.

USO LA PROPRIETÀ f (LA

$$f(n\phi(a), n\phi(b)) = f(n\phi(a)) - f(n\phi(b)) =$$

$$= f(n) + f(\phi(a)) - f(n) - f(\phi(b)) = f(a,b).$$

$$f(\phi(ma), \phi(mb)) = f(\phi(ma)) - f(\phi(mb)) =$$

$$= f(ma) - f(mb) = f(a) + f(m) - f(m) - f(b) = f(a,b)$$

$f(a^3) = 3f(a)$ SE a È PARI

$f(a^3) = 3f(a) - 2$ SE a È DISPARI.

QUINDI $f(a,b)$ CONSERVA LA SUA PARITÀ

COMPOSIZIONI DI ϕ $\boxed{\checkmark}$

FINE.

ESERCIZI

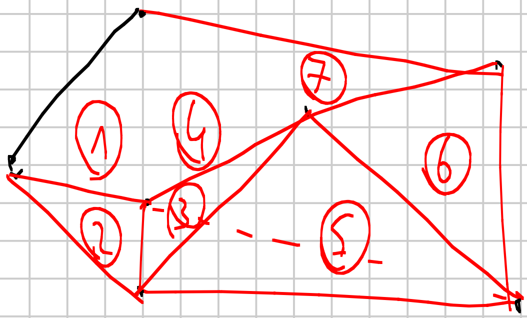
1) $(a,b) = 1$ $a \geq 2$, $b \geq 2$.

$$\sum_{i=1}^{b-1} \left\lfloor i \frac{a}{b} \right\rfloor = \sum_{i=1}^{a-1} \left\lfloor i \frac{b}{a} \right\rfloor$$

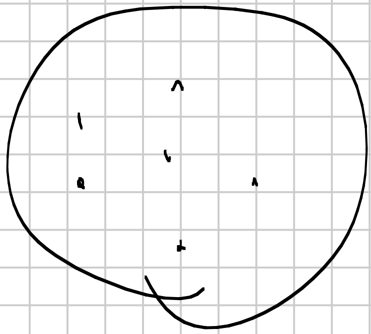
---

2) HO DUE NUMERI (a,b) SCRITTI SU UNA LAVAGNA, E LI POSSO SOSTITUIRE CON $(\tau(a), 2^{b-1})$ O $(2^{a-1}, \tau(b))$.
PARTENDO DA $(99, 100)$ È POSSIBILE OTTENERE 2 NUMERI UGUALI?

3) Dato G, formato da $n \in \mathbb{N}^+$ punti e segmenti che li collegano nel piano a tre a tre non allineati, una triangolazione di questi punti è un insieme di segmenti $\in G$ tali che non si intersecano ogni segmento non tracciato interseca un segmento $\in G$. Alla fine ogni poligono rimasto sarà un triangolo. Sia N il numero di triangoli in G. Dimostrare che N dipende solo dai punti di G e non dai suoi segmenti.



$N=7$.



4) Data una scacchiera 2014 x 2014 coloriamo di rosso i centri di 2014 delle sue caselle. Esiste una retta che passa per 3 punti rossi?

(Sala's version): Dato il prodotto cartesiano $G=\{0,\dots,2013\}^2$ esistono 2014 punti di G a tre a tre non allineati?

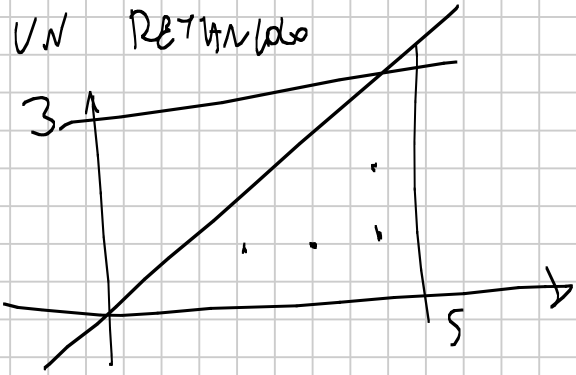
1) $$\sum_{i=1}^{b-1} \left\lfloor \frac{i\,a}{b} \right\rfloor = \frac{(a-1)(b-1)}{2}$$

• SCAMBREI : ACCOPPIO $\left\lfloor i \frac{a}{b} \right\rfloor$ CON $\left\lfloor (b-i) \frac{a}{b} \right\rfloor$

• CONTIAMO IL NUMERO DI INTERI POSITIVI K PER L'EQUAZIONE $K = ax+by$ NON HA SOLUZIONE IN $\mathbb{Z}^+$.

$K \equiv 1 \ (b)$ (LAVORO DA FARE A CASA)

• FAI UN RETTANGOLO



$a = 5 \quad b = 3$

L'ESPRESSIONE È UGUALE AI PUNTI A COORDINATE INTERE $\frac{(a-1)(b-1)}{2}$

---

2) $f : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{N}$ $\quad f(x_1) \neq f(x_n)$ STRONZATE

$f(100)$ SI $- f(99) = 1$

QUINDI PARI ↑

$$f(a,b) = f(a) - f(b)$$

$$f(a,b) - f(2^{a-1}, \tau(b)) = 2.$$

$$(100;\ 99) \to (2^{99};\ 6) \to (2^{2^{99}-1};\ 4)$$

$$(2^{2^{2^{99}-1}-1};\ 3) \to (2^{2^{2^{2^{99}-1}-1}-1};\ 2)$$

$$\left(2^{2^{2^{11}-1}-1}-1 \,;\, 2^{2-1}\right) \to \left(2^{2^{11}-1}-1 \,;\, 2^{2^{2-1}}-1\right)$$

$\downarrow$ 2 $\downarrow$ 2^{2-1} FA 2!

$2^{2-1}=2.$

τ DECRESCE

$$\cancel{f(n) = f(\tau(n))+1}$$

$n \leftarrow 2$ $\quad \cancel{f(2) = f(2)+1}$

AVEVAMO

$\emptyset$ $\quad$ 1 $\quad$ | PRIMA

PUNTO CRITICO $\quad$ VERO $\quad$ NOI NON CI POTEVAMO MAI ENTRARE

τ $\quad$ 1 $\quad$ 2 $\quad$ PERÒ CI ARRIVIAMO

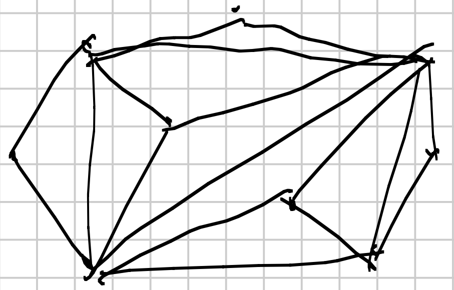
IDEA: PORTO UNO DEI 2 A 2 FACENDO MOLTE τ.

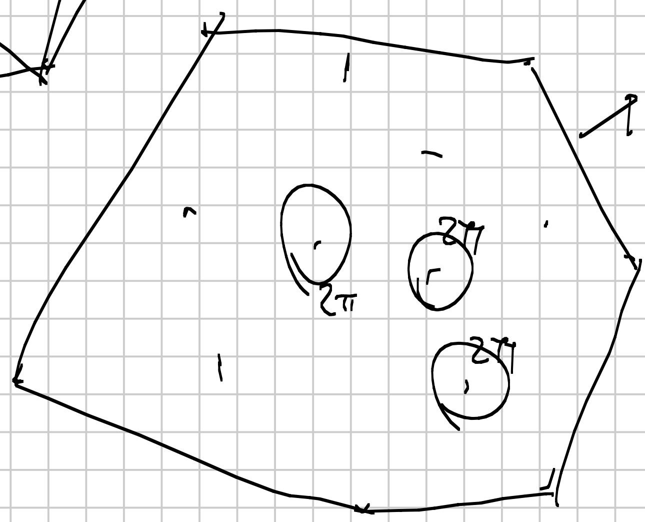
IDEA: 2^{2-1} FA 2.

QUINDI MI BASTA FARE MOLTE τ ALL'ALTRO.

MORALE: CONTROLLATE BENE LE IPOTESI DELLE FUNZIONI

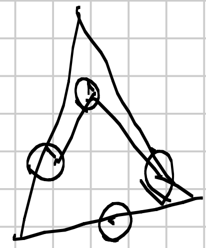
3)





CONVEX HULL:

IL PIÙ PICCOLO POLIGONO CONVESSO CHE CONTIENE I MIEI PUNTI.



↓

DEVE AVERE COME VERTICI I MIEI PUNTI

DENOTIAMO CON: N IL NUMERO DI TRIANGOLI FINALI;

m PUNTI SULL'INVILUPPO;

K PUNTI DENTRO ALL'INVILUPPO.

ORA: DOUBLE COUNTING SULLA SOMMA DEGLI ANGOLI INTERNI DEI TRIANGOLI:

$$N \cdot \pi = K \cdot 2\pi + (m-2)\cdot \pi$$

QUINDI $N = 2K + m - 2$.

4) IL PIÙ ATTESO
IL PIÙ DESIDERATO
IL PIÙ \$WAG

- INDUZIONE NON FUNZIONA
- ALGEBRA NON FUNZIONA TTK $x_A y_B$ BC
- DOUBLE COUNTING

MA SI PUÒ FARE?

PRENDO UN PRIMO p.
E CONSIDERO $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \setminus 0$.

$S_p = \{1, \dots, p-1\}$ E CONSIDERO LA PERMUTAZIONE

$$\sigma : S_p \to S_p.$$

UNA PERMUTAZIONE È BELLA SE: $\sigma(1) = 1$

$\sigma(p-1) = p-1$ E $\dfrac{\sigma(a) - \sigma(b)}{a-b} \equiv \dfrac{\sigma(a) - \sigma(c)}{a-c} \ (p)$

IMPLICA $b = c$.

SUPPONIAMO ESISTA.

$$\sigma(x) = x^{-1}$$

$$\frac{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}}{a-b} \equiv \frac{\frac{1}{a} - \frac{1}{c}}{a-c} \ (p) \to \frac{1}{-ab} \equiv \frac{1}{-ac} \to b = c$$

$X = \{2, \dots, p-2\}$

ABBIAMO UNA PERMUTAZIONE DA $X \to X$

TALE CHE $\dfrac{\sigma(a)-\sigma(b)}{a-b} \not\equiv \dfrac{\sigma(a)-\sigma(c)}{a-c} \ (p)$

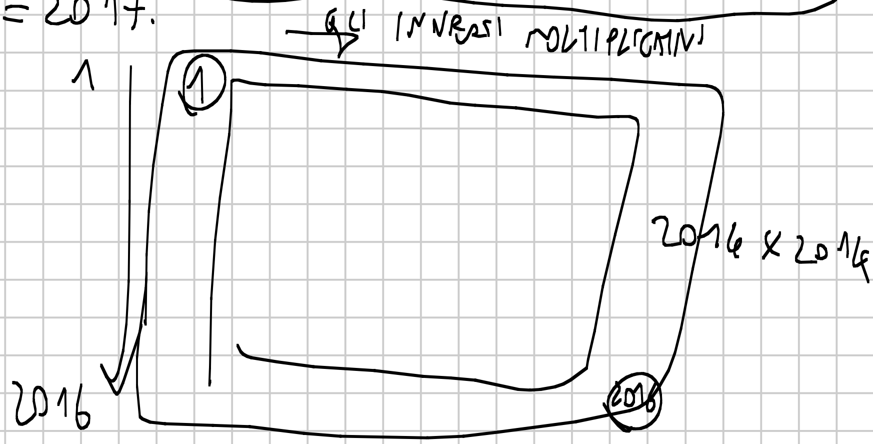
ESISTE UNA PERMUTAZIONE SU $p-3$ ELEMENTI TALE CHE

SE $a \neq b$, $a \neq c$, $b \neq c$ ALLORA

$$\boxed{\frac{\sigma(a)-\sigma(b)}{a-b} \not\equiv \frac{\sigma(a)-\sigma(c)}{a-c}}$$

PERCHÉ DIVERSI MODULO p.

$p = 2017.$



$\square$