Senior 2014 – Combinatoria Advanced

Titolo nota 06/09/2014

Funzioni generatrici

Serie "formale" $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

che raccoglie in un'unica informazione tutti i dati a_n.

Per esempio: quanti sono i sottoinsiemi di 2 elementi di un insieme di n elementi: $\binom{n}{2}$.

$$\to \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n}{2} x^n .$$

Corrispondenza $\{a_n\}_{n\geq 0} \leftrightarrow$ serie $\sum a_n x^n = f(x)$

$\{a_n\}_{n\geq 0} \leftrightarrow f(x)$

Oss. 1

$$\{a_{n+1}\} \leftrightarrow \frac{f(x)-f(0)}{x}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{\sum a_n x^n - a_0}{x} = \sum_{n\geq 1} a_n x^{n-1} = \sum_{n\geq 0} a_{n+1} x^n .$$

Induttivamente, $\{a_{n+h}\} \longleftrightarrow \dfrac{f(x)-a_0-a_1x-\dots-a_{h-1}x^{h-1}}{x^h}$

Applicazione 1: Numeri di Fibonacci

F_n : $\boxed{F_0=0 \quad F_1=1}$ $\quad F_{n+2}=F_{n+1}+F_n, \quad n\geq 0.$

$$F(x) = \sum_{n\geq 0} F_n x^n$$

$$\sum_{n\geq 0} F_{n+2} x^n = \sum_{n\geq 0} F_{n+1} x^n + \sum_{n\geq 0} F_n x^n$$

$$\frac{F(x)-F_0-F_1x}{x^2} = \frac{F(x)-F_0}{x} + F(x)$$

Fatti i calcoli, $F(x) = \dfrac{x}{1-x-x^2}$.

$$1-x-x^2 = (1-\alpha x)(1-\beta x) \qquad \alpha, \beta = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

$$\frac{x}{1-x-x^2} = \frac{a}{1-\alpha x} + \frac{b}{1-\beta x} = a \sum_{n\geq 0} \alpha^n x^n + b \sum_{n \geq 0} \beta^n x^n$$

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right]$$

Moltiplicare per n: $\qquad \{a_n\} \to \{n a_n\}$

<u>Idea</u>: Se $\quad f(x) \leftrightarrow \{a_n\}$ allora $(xD) f(x) \leftrightarrow \{n a_n\}$

$\qquad \sum a_n x^n \qquad\qquad xD f(x) = x \frac{d}{dx} f(x)$

<u>Evidente</u>, $\quad (xD)\, a_n x^n = x\, n a_n x^{n-1} = n a_n x^n.$

<u>Esempio 2</u> $\quad$ Voglio calcolare $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{n^2+3n+7}{n!} \leftrightarrow g(n)$

$$a_n = \frac{1}{n!} \leftrightarrow \sum \frac{1}{n!} x^n = e^x$$

$$\frac{n}{n!} \leftrightarrow (xD)\, e^x = x e^x$$

$$\frac{n^2}{n!} \leftrightarrow (xD)^2 e^x = (xD)(xe^x) = x(e^x + xe^x) = xe^x + x^2 e^x$$

$$\sum g(n) x^n = xe^x + x^2 e^x + 3xe^x + 7e^x = e^x (x^2 + 4x + 7)$$

Pongo $x=1 \to$ Somma $= e \cdot 12$.

<u>Esempio 3</u> $\quad$ (successioni ricorrenti).

$$a_{n+1} = 2a_n + n \qquad a_0 = 1.$$

I primi valori sono: $1, 2, 5, 12, 27, 58, 121, \ldots$

$$A(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n.$$

$$\frac{A(x)-A(0)}{x} = 2A(x)+\frac{x}{(1-x)^2}$$

$n \longleftrightarrow \sum n x^n$

$= x \sum n x^{n-1} =$

$x \frac{d}{dx} \sum x^n = x \frac{d}{dx} \frac{1}{1-x}$

$= \frac{x}{(1-x)^2}$

$A(0)=1$

sviluppo i calcoli

$$A(x) = \frac{1-2x+2x^2}{(1-x)^2(1-2x)}$$

$$= \frac{a}{(1-x)^2} + \frac{b}{1-x} + \frac{c}{1-2x} = -\frac{1}{(1-x)^2} + \frac{2}{1-2x}$$

- $\frac{1}{(1-x)^2} = \frac{d}{dx}\frac{1}{1-x} = \frac{d}{dx}\sum x^n = \sum n x^{n-1} = \sum (n+1) x^n$
- $\frac{2}{1-2x} = 2 \cdot \sum (2x)^n = \sum 2^{n+1} x^n$

$a_n = 2^{n+1} - (n+1)$.

Oss. 3 $\quad f \longleftrightarrow \{a_n\} \quad g \longleftrightarrow \{b_n\} \Rightarrow fg \longleftrightarrow \left\{\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right\}$

$$\left(\sum a_i x^i\right)\left(\sum b_j x^j\right) = \sum_n \left(\sum_{i+j=n} a_i b_j\right) x^n$$

Caso particolare: Se $\frac{1}{(1-x)^k} = \underbrace{(1+x+x^2+\dots)\dots(1+x+x^2+\dots)}_{k \text{ volte}}$

il coefficiente di x^n è uguale al numero di modi di scrivere x^n come $x^{i_1}\cdot x^{i_2}\cdots x^{i_k}$ con $i_1+i_2+\dots+i_k=n$

$=$ n° di modi di scrivere n come somma di interi ≥ 0.

$\alpha \in \mathbb{R} \qquad (1+x)^\alpha = \sum_{n\geq 0} \binom{\alpha}{n} x^n$

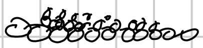
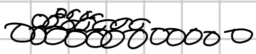
$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-(n-1))}{n!}$$

Applicando questa formula si ottiene che il coeff di x^n in è $\binom{n+k-1}{n}$.

Oss. 4 $\quad f \leftrightarrow \{a_n\} \iff \dfrac{f}{1-x} \leftrightarrow \left\{\sum_{j=0}^{n} a_j\right\}$

$$\frac{f(x)}{1-x} = f(x)(1+x+x^2+\dots) = \left(\sum a_k x^k\right)(1+x+x^2+\dots)$$

Esercizio (fontana di monete).

← Ogni riga deve consistere di un blocco di monete in posizioni consecutive

Problema 1ª riga con k monete.

Quante "fontane" si possono fare con la prima riga di k monete?

$\boxed{\text{Incognita}: f(k)}$

Sol. Posta la prima riga, nella seconda ci possono essere j monete con $0 \le j \le k-1$.

Se $j=0$ ho 1 fontana

se $j>0$ ho $(k-j)f(j)$ fontane

Quindi $\displaystyle f(k) = \sum_{j=1}^{k} (k-j)f(j) + 1 \qquad (k \ge 1).$

Passo alle funzioni generatrici.

A sinistra $\displaystyle \sum_{k\ge 0} f(k)x^k = F(x)$

A destra moltiplico $F(x) - \underset{0}{\underset{\shortparallel}{F(0)}}$ per $\displaystyle \sum n x^n = \frac{x}{(1-x)^2}$

Ottengo

$$F(x) = \frac{x}{(1-x)^2}F(x) + \frac{1}{1-x}$$

Risolvendo, si ottiene $\displaystyle F(x) = \frac{x(1-x)}{1-3x+x^2}$

I primi numeri sono: $0, 1, 1, 2, 5, 13, 34, 89, \dots$

"Fibonacci ogni 2"? Esercizio.

$\frac{1}{1-x-x^2}$ è legato alle radici α, β $\quad \alpha+\beta=1 \quad \alpha\beta=-1$

$\alpha^2+\beta^2 = (\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta = 1+2=3$

$\alpha^2\beta^2 = 1$

$\frac{1}{1-3x+x^2}$ è legato alle radici α^2, β^2.

Numeri di Catalan

(Parentesi)

1	x_1		1	modi
2	x_1x_2		1	
3	$(x_1x_2)x_3$	$x_1(x_2x_3)$	2	
4	$((x_1x_2)x_3)x_4$	$(x_1x_2)(x_3x_4)$		
	$(x_1(x_2x_3))x_4$	$x_1((x_2x_3)x_4)$	5	modi
	$x_1(x_2(x_3x_4))$			

$c_n = n^\circ$ dei modi

$$C(x) = \sum_{n\geq 1} c_n x^n \qquad c_0=0$$

Idea: formula ricorsiva.

Caso n : L'ultimo passaggio sarà moltiplicare il risultato dei primi k per quello degli ultimi $n-k$

$$(\underbrace{\quad\quad}_{k})(\underbrace{\quad\quad}_{n-k})$$

$$c_n = \sum_{k=1}^{n-1} c_i c_{n-i} \qquad n\geq 2$$

$$C(x) = c_1 x + \sum_{n\geq 2}\left(\sum_{k=1}^{n-1} c_k c_{n-k}\right)x^n = x + [C(x)]^2$$

Eq. di 2° grado.

Sol

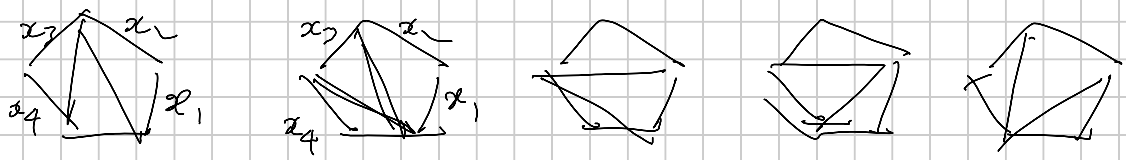
$$C(x) = \frac{1 \cancel{\pm} \sqrt{1-4x}}{2} \qquad c_0=0$$

$$(1-4x)^{1/2} = \sum_{n\ge 0} \binom{1/2}{n} (-4)^n x^n$$

$$c_n = \frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}$$ → OCCHIO: E' UN NUMERO INTERO!!

MODI EQUIVALENTI:

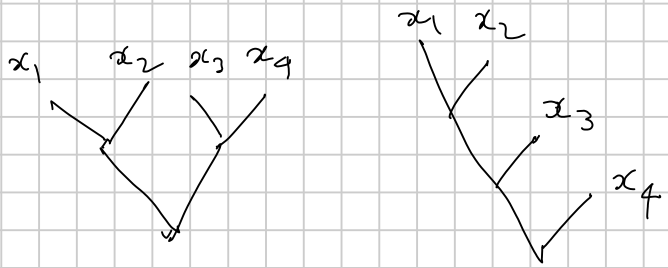
· TRIANGOLAZIONI DI UN POLIGONO



$\updownarrow$

$(x_1x_2)(x_3x_4)$ $\qquad$ $((x_1x_2)x_3)x_4$

· ALBERI CON RADICE



Posso costruire due dadi con 8 facce (ma vale anche per 6) numerate in modo diverso da 1,2,3,...,8 in modo tale che le probabilità di ottenere con due dadi un numero k sia la stessa che numerando le facce dei dadi con i numeri 1,2,...,8?

Dado → associo una funzione generatrice

Dado 1,2,...,8 → $x+x^2+\dots+x^8$

Dado 3,3,5,6,6,7,8,8 → $2x^3+x^5+2x^6+x^7+2x^8$

Regola: se il dado contiene a_k volte il valore k gli associo $\sum a_k x^k$.

Se tiro due dadi "standard" qual è la funzione generatrice dei possibili valori?

$$(x+x^2+\dots+x^8)^2 = \left[x\,\frac{(x^8-1)}{(x-1)}\right]^2$$

$$= \left[x(x+1)(x^2+1)(x^4+1)\right]^2 \qquad (*)$$

Se ho due dadi non standard, con funzioni generatrici $A(x)$, $B(x)$, voglio che:

- $A(x)B(x) = (*)$
- $A(x)$ e $B(x)$ abbiano coefficienti interi ≥ 0.
- $A(0)=B(0)=0$ e $A(1)=B(1)=8$. (8 facce ciascuno).

$A(x)$, $B(x)$ devono dividere $(*)$. $\quad x \mid A(x) \quad x \mid B(x)$

Quanti fattori possono avere? 3 ciascuno (ogni fattore $\neq x$ valutato in 1 è uguale a 2).

Ci sono altre 3 (+3) possibilità

2 fattori da una parte

1 fattore per ciascuno

2 fattori dall'altra parte

I dadi possibili, oltre a quelli standard, sono:

$\{A,B\} =$

(1,2,2,3,3,4,4,5)	(1,3,5,5,7,7,9,11)
(1,2,3,3,4,4,5,6)	(1,2,5,5,6,6,9,10)
(1,2,2,3,5,6,6,7)	(1,3,3,5,5,7,7,9).

FUNZIONI GENERATRICI ESPONENZIALI

$$f(x) = \sum a_n \frac{x^n}{n!} \qquad \left(\text{invece che } f(x) = \sum a_n x^n\right)$$

Oss. 1 $\quad f'(x) \leftrightarrow \{a_{n+1}\}$

$$\frac{d}{dx} a_n \frac{x^n}{n!} = \frac{n a_n x^{n-1}}{n!} = \frac{a_n x^{n-1}}{(n-1)!} \rightsquigarrow a_{n+1} \frac{x^n}{n!}$$

$$D^h f(x) \leftrightarrow \{a_{n+h}\}$$

Oss. 2 $\quad (xD) f \leftrightarrow \{n a_n\}_{n \geq 0}$

$$(xD) \frac{a_n x^n}{n!} = x \frac{n a_n x^{n-1}}{n!} = \frac{n a_n x^n}{n!}$$

Oss. 3 $\quad f \leftrightarrow \{a_n\} \qquad g \leftrightarrow \{b_n\}$

$$fg \leftrightarrow \left\{ \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k b_{n-k} \right\}$$

Infatti
$$\left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i \frac{x^i}{i!}\right)\left(\sum_{j=0}^{\infty} b_j \frac{x^j}{j!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{i+j=n} \frac{a_i b_j}{i!\,j!}\right) x^n$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \qquad i \to k \qquad j \to n-k$$

Esempio di applicazione: numeri di Bell

= partizioni di un insieme

$b(n) =$ n° di possibili partizioni di un insieme di n elementi

$|X| = 3 \qquad X = \{1,2,3\}$

$\{1,2,3\} \qquad \{1,2\} \cup \{3\} \qquad \{1,3\} \cup \{2\} \qquad \{2,3\} \cup \{1\} \qquad \{1\} \cup \{2\} \cup \{3\}$

Osservazione:

$$\boxed{b(n+1) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b(k)} \leftarrow$$

Spiegazione: Prendo l'$(n+1)$-elemento. Questo può stare con altri h elementi $0 \leq h \leq n$, quindi appartiene ad un sottoinsieme con $h+1$ elementi, $1 \leq h+1 \leq n+1$

$$h+1 = n-k+1 \qquad h = n-k \qquad k = n-k$$

$$0 \leq k \leq n.$$

Questi elementi possono essere scelti in $\binom{n}{k}$ modi.

e poi restano k elementi da ripartire

Se $\quad B(x) = \sum \frac{b(n)\,x^n}{n!}$

$$B'(x) = e^x B(x)$$

$$\frac{d}{dx}\log B(x) = \frac{B'(x)}{B(x)} = e^x$$

$$\log B(x) = e^x + c$$

$$B(0) = 1$$

$$0 = \log B(0) = e^0 + c$$

$$1 + c = 0$$

$$c = -1$$

$$\leadsto \quad e^x - 1$$

$$\boxed{B(x) = e^{e^x - 1}}$$

Partizioni di un numero

$$n = a_1 + a_2 + \dots + a_k \qquad a_i \geq 0$$

$$a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_k$$

$10 = 7+3 = 3+7$ sono la stessa partizione.

Funzione generatrice:

$$\frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{1-x^2} \cdot \frac{1}{1-x^3} \cdots = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^n}$$

$$(1+x+x^2+\dots)(1+x^2+x^4+\dots)(1+x^3+x^6+\dots)$$

Quando si ottiene x^n?

Esattamente quando prendo un termine x^{a_1} del primo fattore, x^{2a_2} del secondo fattore, ... , in modo che

$$a_1 + 2a_2 + \cdots = n$$

$\rightarrow$ corrisponde a una partizione di n con a_1 addendi $=1$, a_2 addendi $=2$, ...

<u>Esercizio</u> Usando questa funzione generatrice, dimostrare che:
il n° di partizioni di n con addendi tutti dispari è uguale al n° di partizioni di n con addendi tutti distinti.

Hint: funzioni generatrici $\frac{1}{1-x}\frac{1}{1-x^3}\frac{1}{1-x^5}\cdots$

e $(1+x)(1+x^2)(1+x^3)\cdots$

FUNZIONI SIMMETRICHE

<u>ELEMENTARI</u>: $e_r = \sum_{i_1<i_2<\cdots<i_r} x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_r}$

$e_0 = 1$

Funzione generatrice:

$$E(t) = \sum_{r\geq 0} e_r t^r = \prod_{i\geq 1} (1+x_i t)$$

(Per funzioni simmetriche su n elementi, $i=1,\dots,n$).

<u>COMPLETE</u> (somme di tutti i monomi di grado fissato)

Es. $x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3$

h_r = funzione completa di grado r $\quad (h_0=1, h_1=e_1)$

Funzione generatrice:

$$H(t) = \sum_{r\geq 0} h_r t^r = \prod_{i\geq 1} (1-x_i t)^{-1}$$

$$\left((1-x_i t)^{-1} = 1 + x_i t + x_i^2 t^2 + \dots \right)$$

RELAZIONE $\quad H(t)E(-t) = 1$

cioè: $\quad \sum_{r=0}^{n} (-1)^r e_r h_{n-r} = 0 \quad$ per $n \geq 1$

POWER SUMS (Newton)

$$p_r = \sum x_i^r$$

Funzione generatrice: $\quad P(t) = \sum p_r t^{r-1} = \sum_{i\geq 1}\sum_{r\geq 1} x_i^r t^{r-1}$

$$= \sum_{i\geq 1} \frac{x_i}{1-x_i t} = \sum_{i\geq 1} \frac{d}{dt} \log \frac{1}{1-x_i t}$$

$$P(t) = \frac{d}{dt} \sum_{i\geq 1} \log \frac{1}{1-x_i t} = \frac{d}{dt} \log \prod_{i\geq 1} \frac{1}{1-x_i t} = \frac{d}{dt} \log H(t)$$

$$= H'(t)/H(t)$$

Analogamente ottenete

$$P(-t) = \frac{E'(t)}{E(t)}$$

$$H(t)P(t) = H'(t) \qquad E(t)P(-t) = E'(t)$$

coeff di t^{n-1}

$$\sum_{r=1}^{n} (-1)^{r-1} p_r e_{n-r} = n e_n$$

$$n e_n - p_1 e_{n-1} + p_2 e_{n-2} - \dots \pm p_n e_0 = 0.$$

$p_0 e_n$

(VEDERE JST 2014, N, 2)

DENSITÀ

$A \subseteq \mathbb{N}$ densità $(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{A \cap \{1, \dots, n\}}{n}$

densità (pari) $= 1/2$

Dimostrare che esistono infiniti n che non si scrivono come $a^3 + b^5 + c^7 + d^9 + e^{11}$ $(*)$

$\frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{11} < 1$

$A = \{$insieme degli n rappresentabili$\}$

Claim: densità $(A) = 0$

Fissiamo $M > 0$ e studiamo $A \cap \{1, \dots, M\}$

Un intero qui dentro si scrive come in $(*)$ con $a^3 \leq M$, $b^5 \leq M$, $\dots$, $e^{11} \leq M$

L'intersezione contiene al massimo

$$(\lfloor M^{1/3} \rfloor + 1)(\lfloor M^{1/5} \rfloor + 1) \cdots (\lfloor M^{1/11} \rfloor + 1)$$

elementi. Quindi al più $2^5 \cdot M^{1/3 + 1/5 + \dots + 1/11}$ elementi. Il rapporto è $\frac{2^5}{M^{1-(1/3+\dots+1/11)}} \to 0$

Se scelgo $M \gg 0$, allora il valore di questo rapporto è $\leq 1/2$, e quindi almeno metà degli interi fino a M NON si rappresenta

Problema + tosto

Dimostrare che per ∞ valori di n i numeri

$n+1, \quad n+2, \quad n+3$ sono tutti liberi da quadrati

Per assurdo: sono in numero finito.

Allora (con finite eccezioni) tra i numeri

$$4K, \quad 4K+1, \quad 4K+2, \quad 4K+3$$

almeno 2 $\boxed{\text{non}}$ sono liberi da quadrati.

(" densità (sqr free) $\leq 1/2$ ")

Ma in realtà densità ($\square$-free) $> \frac{1}{2}$

$$\text{densità}(\square\text{-free}) = 6/\pi^2$$

$A_M = \{1, \ldots, M\} \cap \{\square\text{-free}\}$. Nel caso fortunato

$$M = (p_1 p_2 \cdots p_k)^2$$

$$\# A_M = M \cdot \prod_i \left(\frac{p_i^2 - 1}{p_i^2} \right)$$

Moralmente, bisogna controllare i primi fino a $\sqrt{M}$

e quindi posso rimpiazzare M con

$$\lfloor \sqrt{M} \rfloor^2$$

al costo di un errore $\simeq 2\sqrt{M} + 1$

$$\lim_{M\to\infty} \frac{\# A_M}{M} = \lim_{M\to\infty} \prod_{p<\sqrt{M}} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right)$$

$$= \prod_{p \text{ primo}} \left(1 - 1/p^2\right)$$

$$\prod_{p} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right)^{-1} = \prod_{p} \left(1 + \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p^4} + \cdots\right)$$

$$= \sum_{n} 1/n^2 < 2$$

su tutti gli interi

$$< 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)} = 2$$