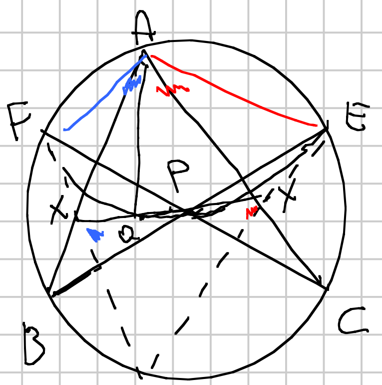
PREREQUISITI

– PASCAL



$Q = \mathcal{O}(EPF) \cap XY$

$\to$ $AFXQ$, $AEYQ$ ciclici

perché $\angle(FQ, QP) =$
$= \angle(EF, EP) =$
$= \angle(AF, AB)$.

$$\angle(EX, FX) = \angle(AE, AF).$$

– BRIANCHON

Tangente comune est $(\omega, \omega_1) =$
" (ω, ω_2)
(ω, ω_3)

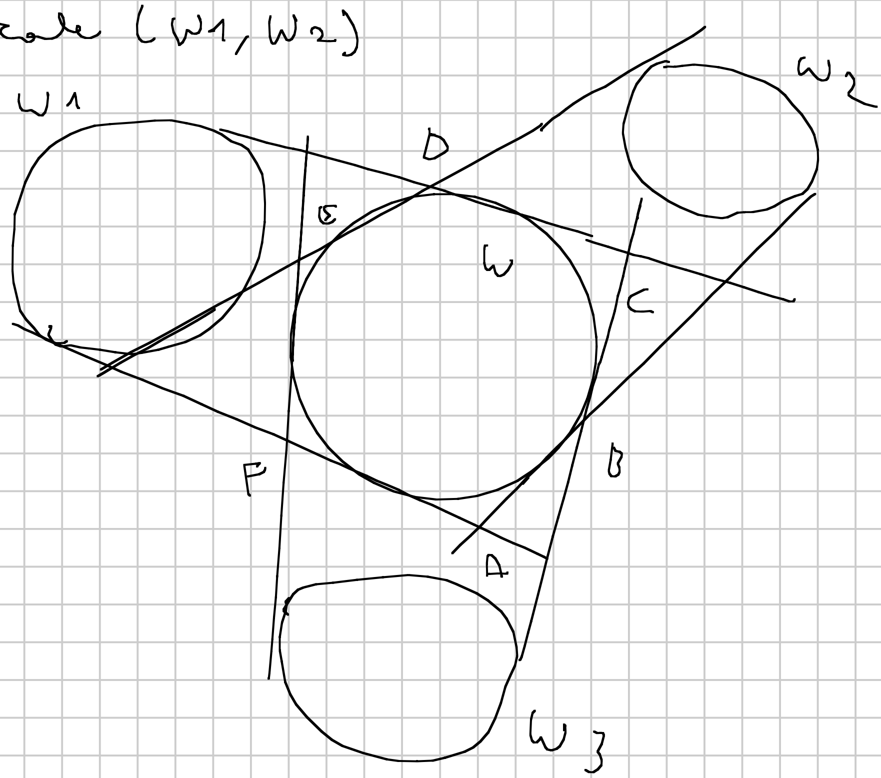
AD = asse radicale (ω_1, ω_2)

BE = – –

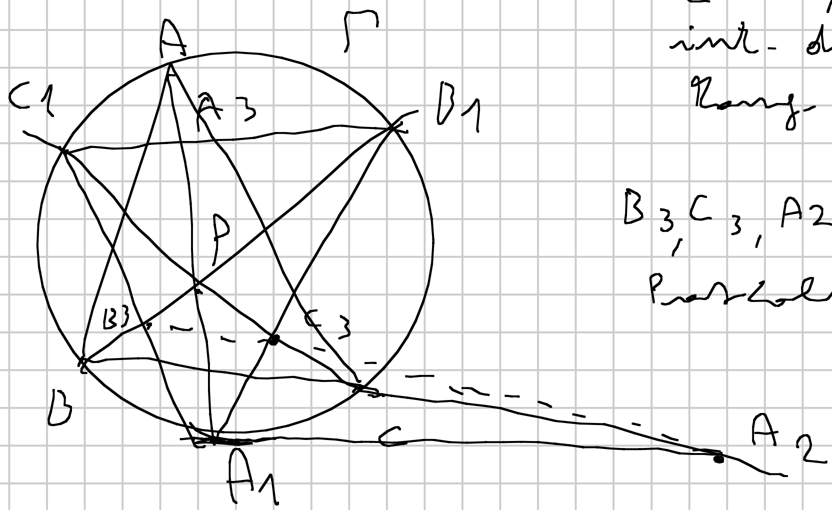
CF = – –

$\Downarrow$

concorrono



STEINBART

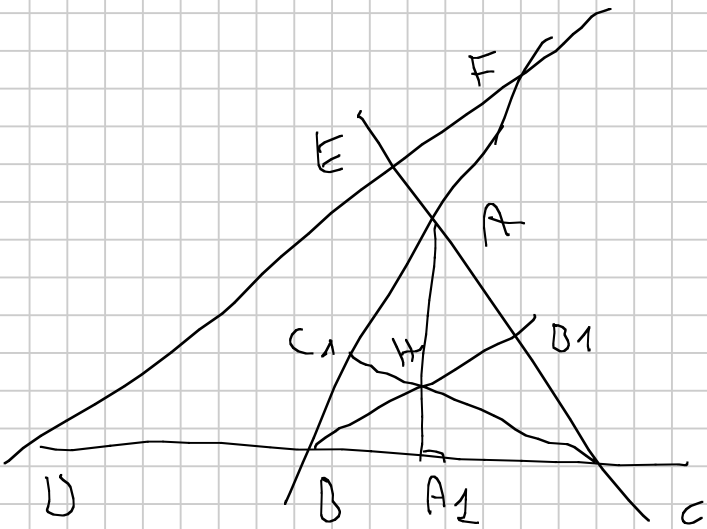


A_2 e cyc.
int. di BC con la tang. a Γ in A_1

B_3, C_3, A_2 all.
Pascal $A_1BC_1B_1A_1C$

→ A_2, B_2, C_2 all.

AUBERT



M_A = pt. medio di AD
M_B --
M_C --

H_A = ortocentro di AEF e cyc.

ω_A $M_A(M_A A)$ e cyc.

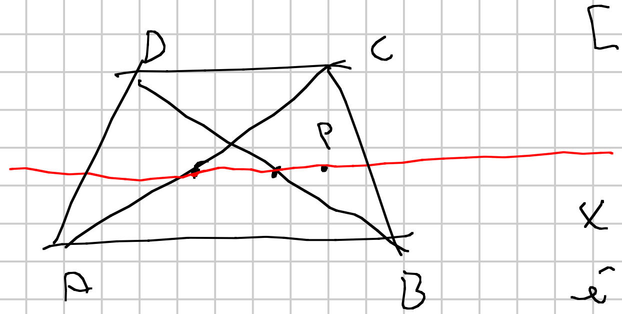
H ha la stessa pot. risp. a $\omega_A, \omega_B, \omega_C$

H_A . analogo
H_B
H_C ---

→ $\omega_A, \omega_B, \omega_C$ coassiali e H, H_A, H_B, H_C all. sull'asse radicale
AUBERT LINE

M_A e cyc all. : GAUSS LINE
Newton +.

P_1) GAUSS LINE : luogo di P t.c.



$$[ABP] + [CDP] = [BCP] + [ADP]$$

$X \rightsquigarrow [ABX]$ è lineare in X

i pt. medi delle diag. sod.

P_2) AUBERT LINE

luogo di P t.c. le

p_A : retta per $A \perp$ a DP e cyc.

p_A, p_B, p_C concorrono

$X(a_x, b_x)$

$$DP: \quad X(b_p - b_d) = Y(a_p - a_d) + \dots$$

$$p_A: \quad X(a_p - a_d) + Y(b_p - b_d) + f_a(a_p, b_p)$$

$$p_B: \quad X(a_p - a_E) + Y(b_p - b_e) + f_B(a_p, b_p)$$

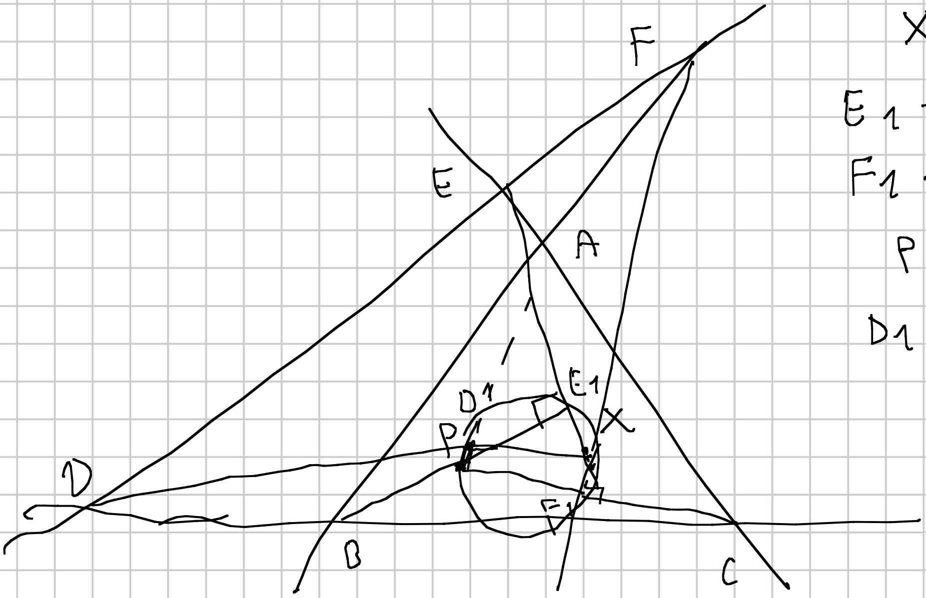
$$p_C \quad \dots$$

$$p_A - p_B: \quad X(a_E - a_d) + Y(b_e - b_d) = g_1(a_p, b_p)$$

$$p_B - p_C: \quad X(a_F - a_E) + Y(b_F - b_e) = g_2(a_p, b_p)$$

$$g_1(a_p, b_p) = c \cdot g_2(a_p, b_p) \rightsquigarrow \text{retta.}$$

la retta di AUBERT soddisfa



$X \in$ AUBERT LINE

$E_1 = EX \cap P_B$

$F_1 = FX \cap P_C$

$P = CF_1 \cap BE_1$

$D_1 = $ (cfr. di diametro PX) $\cap DX$

$XE \cdot XE_1 = XF \cdot XF_1$

EE_1FF_1 cicl. $\to$ $X\hat{D_1}F_1 = X\hat{E_1}F_1 =$ (per la cicl.) $= F_1\hat{F}D$ $\to$ DFD_1F_1 ciclico

$\to XD \cdot XD_1 = XE \cdot XE_1$

$\to D_1 \in \omega_A \to A\hat{D_1X} = 90°$

SONDAT (i)

Lemma 1: se in ABC, P, X e $r_A = $ r. per X $\perp$ a AP e cyc.

se $D = r_A \cap BC$ e cyc $\in \ell$, $\to \ell \perp XP$.

D: per. P2, $X \in$ AUBERT line di $ABCDEF$

$XE_1 \cdot XE = XD_1 \cdot XD = XF_1 \cdot XF = k^2$

se invertì in X con $r = k$ e simm. in X

la cfr. $XPE_1D_1F_1 \to DEF$

$\to \ell \perp XP$.

Lemma 2: se $AA_1 \cap BB_1 \cap CC_1 = P$

$AB \cap A_1B_1$ e cyc $\in t$

$D \in BC$
$E \in AC$ $\in \ell_1$ e
$F \in AB$

$D_1 = DP \cap B_1C_1$
E_1 ...
F_1

allora $D_1, E_1, F_1 \in l_2$ e $l_2 \cap l_1 \in t$.

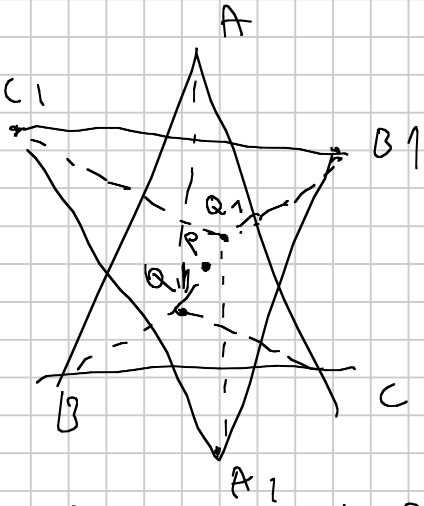
Dim: proietto t all'∞; $A_1B_1C_1$ e ABC diventano omotetici di centro P e per l'omotetia $D \to D_1$ e cyc $\Rightarrow l_1 \to l_2$ e $l_1 \cap l_2 \in r_\infty = t$.

NOTA: vale anche se l_2 è all'∞ in tal caso $l_1 // t$.

Dim. di SONDAT:

$P = AA_1 \cap BB_1 \cap CC_1$

$BC \cap B_1C_1 \in t$ e cyc



l_A = retta per $P \perp AQ$

$l_A // B_1C_1$

$l_A \cap BC = D$

E, F analoghi

Lemma 2 $\to$ D, E, F allineati e $\overline{DEF} // t$

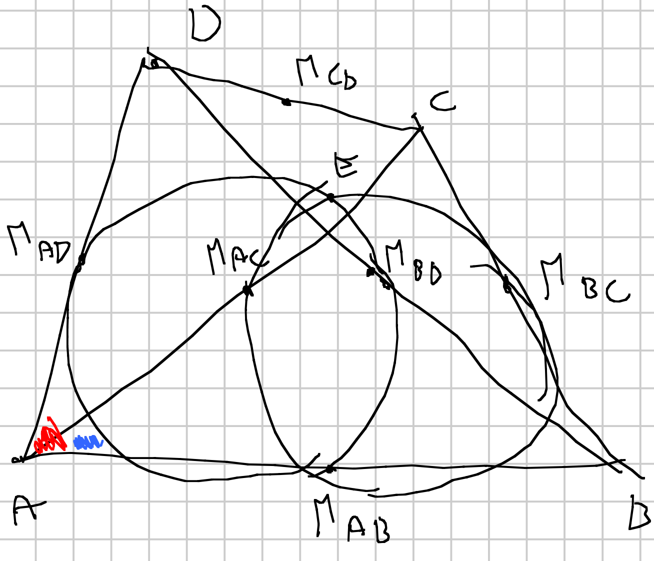
Lemma 1 $\to$ $\overline{DEF} \perp PQ \to t \perp PQ$

similmente $t \perp PQ_1$.

PONCELET

M_{XY} = pto medio XY

cerchi di Eulero di ABC, ABD, BCD, ACD conc. in E



$E = \odot(M_{AB} M_{BD} M_{AD}) \cap \odot(M_{AB} M_{BC} M_{AC})$

Tesi: $E \in \odot(M_{AD} M_{AC} M_{CD})$

$\widehat{M_{AD} E M_{AC}} = \widehat{M_{AD} E M_{AB}} - M_{AC} E M_{AB} = \widehat{M_{AB} M_{BD} M_{AD}} - \widehat{M_{AC} M_{BC} M_{AD}}$

$= \angle - \angle = \widehat{M_{AD} M_{AC} M_{CD}} \to E \in \odot(M_{AD} M_{AC} M_{CD})$

D_A = proiez. di D su BC

D_B = -- AC

D_C = -- AB

$\angle(D_AD_B, D_AE) = \angle(D_AD_B, D_AC) - \angle(D_AE, D_AC) =$

$= \angle(DD_B, DC) - \angle(EM_{BD}, M_{BC}M_{AD}) =$

$= 90° - \angle(CA, CD) - \angle(M_{BD}E, AD) = 90° - \angle(EM_{BD}, AC)$

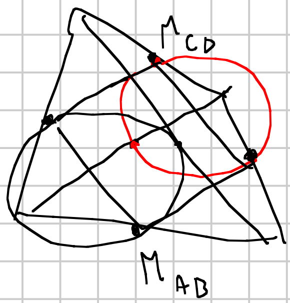
è "simmetrica in A, C"

Quindi anche $\angle(D_CD_B, D_CE)$ ha lo stesso valore

$\to E \in \odot(D_AD_BD_C)$.

Ora $P = AC \cap BD$ $\quad Q = AB \cap CD$ $\quad R = AD \cap BC$.

Teorema: $E \in \odot(PQR)$.



G = pt. medio comune di $M_{AB}M_{CD}$, $M_{BC}M_{AD}$, $M_{AC}M_{BD}$.

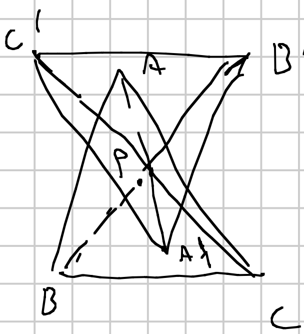
simm. in G $\to$

E va in un punto E' $\in$ (cerchi rossi)

invo gen. $X \to X'$

Idea: basta dim. che $E' \in (P'Q'R')$

Lemmino



simm. risp. a P

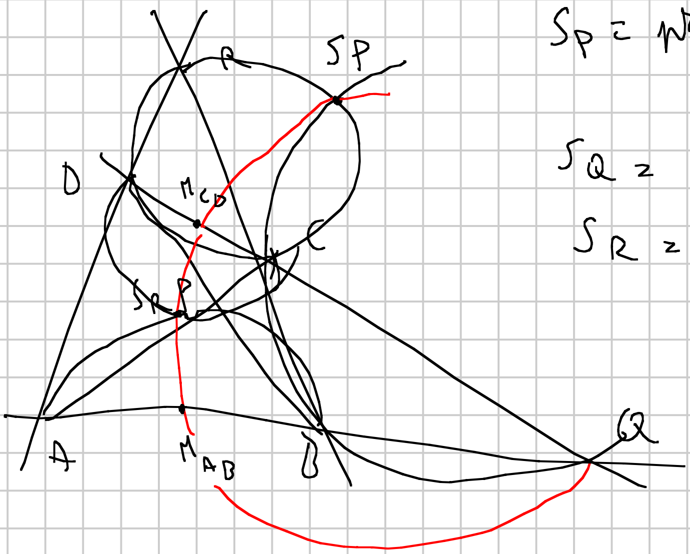
$\odot(AB'C')$ e cyc conc. in $\odot(ABC)$

$\underline{D}$: se $X = \odot(ABC) \cap \odot(AB'C')$

$$\angle(XB, XC') = \angle(XB, XA) + \angle(XA, XC') =$$
$$= \angle(CB, CA) + \angle(B'A, B'C') = \angle(CB, CA) + \angle(BA', BC) =$$
$$= \angle(BA', AC) = \angle(A'B, A'C') \rightarrow X \in \odot(BA'C').$$

$\blacksquare$

Ora basta dim. che $E' \in (P'QR)$ appl. il Lemminimo su $P'Q'R'$ e G.



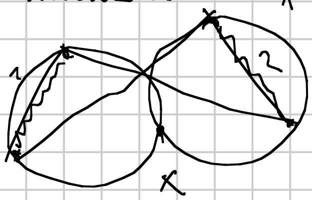
S_P = pt. di Miquel di $\{AB, BC, CD, DA\}$

S_Q = -- con $\{AC, BD, AD, BC\}$

S_R = -- con $\{AC, BD, AB, CD\}$

Oss.

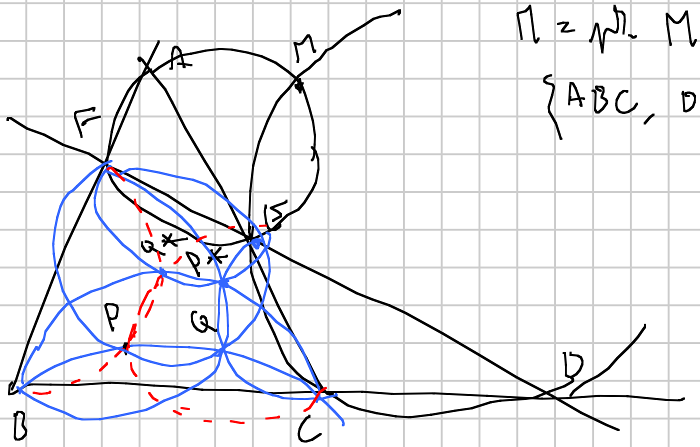
X = centro rotomot. che manda $m_1 \rightarrow m_2$



$\rightarrow$ S_P = centro della rotomot. per cui $DC \rightarrow AB$ e anche $M_{CD} \rightarrow M_{AB}$

$\rightarrow$ per quanto detto $M_{AB}, M_{CD} \in \odot(QS_PS_R)$

Fatto inversivo



M = pt. Miquel di $\{ABC, DEF\}$

$Q = \odot(BCP) \cap \odot(EFP)$

$P^* = \odot(CEQ) \cap \odot(BFQ)$

$Q^* = \odot(EP^*F) \cap \odot(BP^*C)$

Ora $\angle(FP, FQ^*) = \angle(FP, FE) - \angle(FQ^*, FE) =$

$= \angle(QP, QE) - \angle(P^*Q^*, P^*E) = \angle(QP, QC) +$

$\angle(QC, QE) - \angle(P^*Q^*, P^*C) - \angle(P^*C, P^*E) =$

$= \angle(BP, BC) - \angle(BQ^*, BC) = \angle(BP, BQ^*)$

$\to$ BPQ^*F ciclico

M centro rotomot. per cui $AB \to DE$ e simili

$\to$ $\widehat{AMD}$, $\widehat{BME}$, $\widehat{CMF}$ hanno una bis. comune (b)

e (con i triangoli simili) $MA \cdot MD = MB \cdot ME = MC \cdot MF$

$\to \exists$ inv. in M + simm. in b per cui $A \to D$

$B \to E$

$C \to F$

Dimostriamo che $P \to P^*$; sia P_1 l'immagine di P.

allora $\angle(P_1F, P_1E) = \angle(P_1F, P_1M) + \angle(P_1M, P_1E) =$

$= \angle(CP, CM) + \angle(BM, BP) = \angle(CP, BC) + \angle(BC, CM) +$

$\angle(BM, BC) + \angle(BC, BP) = \angle(CP, BP) + \angle(BM, CM) =$

$= \angle(CP, BP) + \angle(AB, AC)$.

Inoltre $\angle(P^*F, P^*E) = \angle(P^*F, FE) + \angle(FE, P^*E) =$

$= \angle(P^*F, FB) + \angle(FB, FE) + \angle(FE, EC) + \angle(EC, P^*E)$

$= \angle(AB, AC) + \angle(QP^*, QB) + \angle(QC, QP^*) =$

$= \angle(AB, AC) + \angle(QC, QB) = \angle(AB, AC) + \angle(PC, PB)$

$\to$ $P_1 \in \odot(P^*EFQ^*)$ analoghe rel.

$\to P^* \equiv P_1$

T_1: (PS_QS_R) e cyc. conc. in un punto F.

D : sia $F = (QS_PS_R) \cap (RS_PS_Q)$

allora $\angle(FS_R, FS_Q) = \angle(FS_R, FS_P) + \angle(FS_P, FS_Q)$

$= \angle(QS_R, QS_P) + \angle(RS_P, RS_Q)$

$= \angle(QS_R, QC) + \angle(QC, QS_P) + \angle(RS_P, RA) + \angle(RA, RS_Q)$

$= \angle(AS_R, AC) + \angle(BC, BS_P) + \angle(BS_P, BA) + \angle(CA, CS_Q)$

$= \angle(AS_R, AB) + \angle(CB, CS_Q) =$

$= \angle(PS_R, PB) + \angle(PB, PS_Q) = \angle(PS_R, PS_Q)$

$\to F \in (PS_RS_Q).$

$T-2 \qquad F = PS_P \cap QS_Q \cap RS_R$

$\underline{D}$: nelle notazione del Lemma inversivo (risp. a S_P) $Q = S_R$ e $P^* = F$

$\to$ la rotomolt. per cui $RP \to FQ$ ha centro S_P

allora $\angle(FS_R, FS_P) = \angle(QS_R, QS_P) \overset{\Downarrow}{=} \angle(S_QR, S_QS_P)$

$= \angle(FR, FS_P) \to F, S_R, R$ all.

$T_3 \qquad F = E'$ (definito prima)

basta che $F \in (M_{AB}M_{AC}M_{AD})$ e cyc

(simm. dei cerchi di Eulero rispetto a σ).

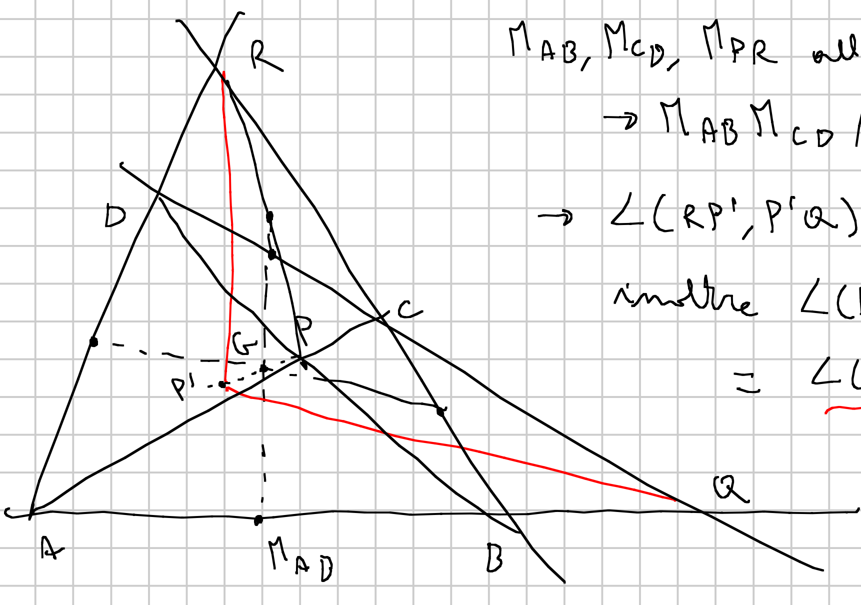
$\angle(M_{AC}M_{AD}, M_{AC}M_{AB}) = \angle(CD, CB) = \angle(CD, CS_P) + \angle(CS_P, CD)$

$= \angle(RD, RS_P) + \angle(QS_P, QB) = \angle(FM_{AD}, FS_P) +$

$\angle(FS_P, FM_{AB}) = \angle(FM_{AD}, FM_{AB})$

$\to F \equiv E'$

Ora basta dim. che $F \equiv E' \in (P'QR)$



M_{AB}, M_{CD}, M_{PR} all. per Gauss.

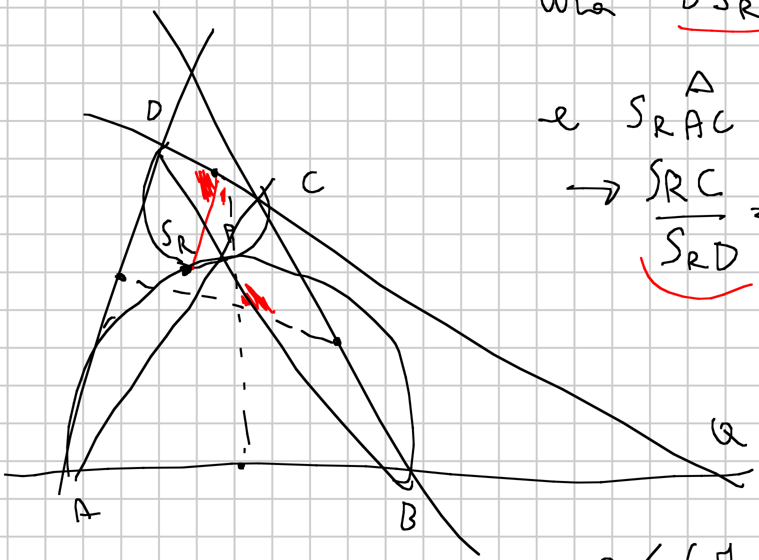
$\to M_{AB}M_{CD} \parallel P'R$

$\to \angle(RP', P'Q) = \angle(M_{AB}M_{CD}, M_{AD}M_{BC})$

inoltre $\angle(FR, FQ) = \angle(FS_R, FQ)$

$= \underline{\angle(M_{CD}S_R, M_{CD}Q)}$

(perché $QM_{AB}FS_RS_PM_{CD}$ ciclico)



Ora $D\widehat{S_R C} = A\widehat{P'B} = M_{AD}\widehat{M_{AB}}M_{BC}$

e $S_R \overset{\triangle}{A} C \simeq S_R B D$ (rotomotetia)

$\to \frac{S_R C}{S_R D} = \frac{AC}{BD} = \frac{M_{AB}M_{BC}}{M_{AB}M_{AD}}$

$\to M_{AB}\overset{\triangle}{M_{AD}}M_{BC} \simeq S_R\overset{\triangle}{D}C$

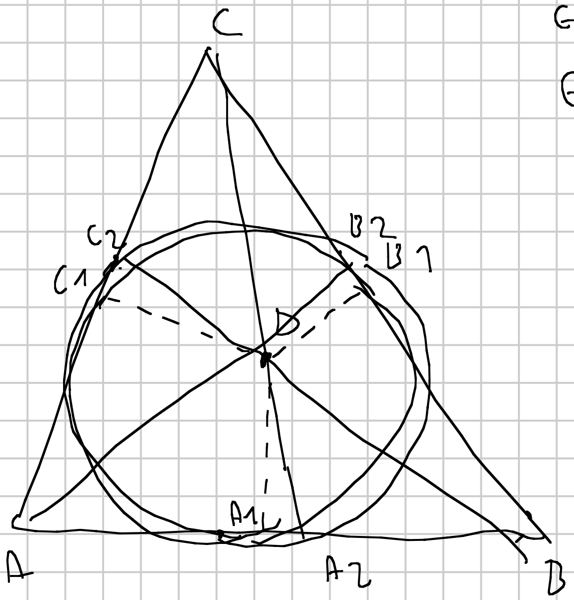
$\to \angle$ uguali

$\to \angle(M_{AD}M_{BC}, M_{AB}M_{CD}) = \angle(DC, M_{CD}S_R)$

$\to F \in (RP'Q)$ e cyc $\to F \in (P'Q'R')$

$\to E \in (PQR)$.

Riformulazione



$E \in$ cerchio di Eulero di ABC

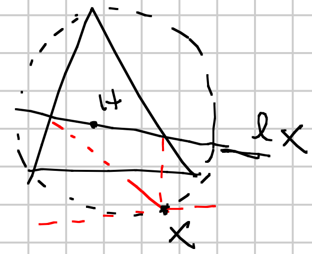
$\in (A_1B_1C_1)$

$\in (A_2B_2C_2)$

Concorrono.

FONTÉNE

RICORDO



ABC tr. e P interno

X = anti-Steiner point di l_X

(i) A_0 = pt. medio di BC e cyc.

A_1 = proiez. di P su BC e cyc.

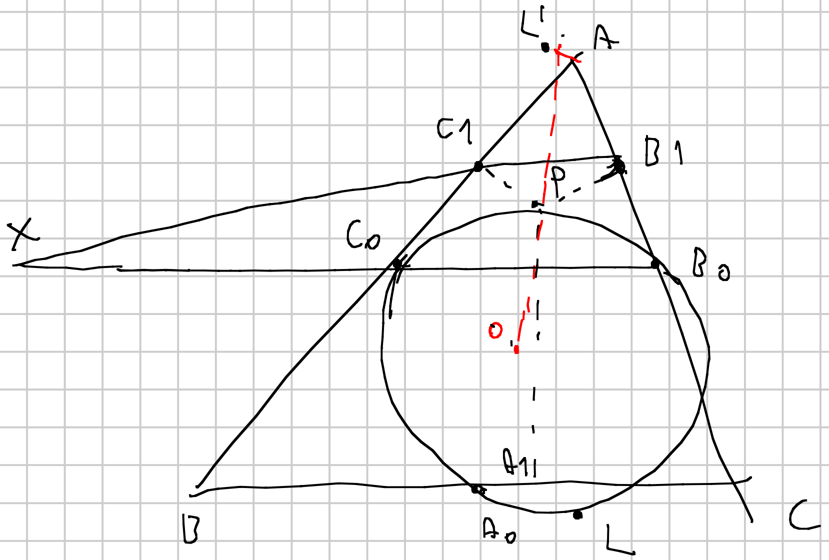
$X = B_1C_1 \cap B_0C_0$ e cyc allora A_1X e cyc concorrono in L.

D/ ora L = anti-Steiner point di OP wrt $A_0B_0C_0$

O = centro di (ABC)

$\forall$ punto T sia T' = simm di T rispetto a B_0C_0

Chiaramente $L' \in OP$



$L' \in (OC_0B_0A)$ per la simm.

$\rightarrow A\hat{L'}P = 90° \rightarrow L' \in (PB_1AC_1)$

Ora $L'C_1C_0X$ è ciclico perché

$\angle(L'C_0, L'C_1) = \angle(L'C_0, L'A) +$

$+ \angle(L'A, L'C_1) =$

$= \angle(B_0C_0, B_0A) + \angle(B_1A, B_1X) =$

$= \angle(XC_0, XC_1)$.

Ora A_1', L', X sono allineati

$$\angle(L'A_1', L'X) = \angle(L'A_1', L'C_1) + \angle(L'C_1, L'X) =$$

$$= \angle(PA_1', PC_1) + \angle(C_0C_1, C_0X) =$$

$$= \angle(BA_1, BC_1) + \angle(BA, BC) = 0$$

$\to$ per simm. A_1, L, X sono all.

$\leadsto$ A_1X e CXC conc. in L.

(ii) $XA_1 \cdot XL = XA_1' \cdot XL' = XC_1 \cdot XB_1$

pow. risp. a (APC_1B_1)

$\to L \in (A_1B_1C_1)$.

Se l passante per O è fissa, L è fisso

e quando P varia, $(A_1B_1C_1)$ passa per L fisso.

Applicazioni

1) P tale che $P\hat{A}B + P\hat{B}C + P\hat{C}A = 90°$

A_1 e CXC come prima

$A_2 = AP \cap (ABC)$ e C_1XC.

ora $\angle(B_1C_1, B_2C_2) = \angle(B_1C_1, PC) + \angle(C_2C, C_2B_2) =$

$= \angle(B_1C_1, PC_1) + \angle(PC_1, AP) + \angle(AP, PC) + \angle(BC, BP)$

$= \angle(AC, AP) + 90° + \angle(AB, AP) + \angle(AP, PC) + \angle(BC, BP) = 180°$

$\to A_1B_1C_1$ e $A_2B_2C_2$ omotetici; sia R il centro dell'omot. Φ.

se P' = coniug. isog. di P wrt ABC,

ABC e $A_2B_1C_1$ sono ortologici in P e P'.

ma allora ABC è ortologico a $A_2B_2C_2$ in P' e $\Phi(P)$

SONDAT $\to P, P', \Phi(P)$ all. in l_1

OMOTETIA $\to R, O, \Phi^{-1}(O)$ all.

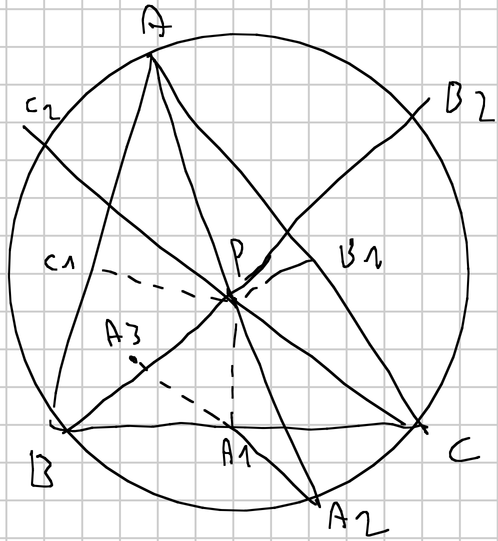
pt. medio di P e P'

$\to O \in l \to O, P, P'$ all.

$\to$ le inters. di $(A_1B_1C_1)$ con il cerchio di Eulero di ABC sono le stesse

$\to$ lo tange.

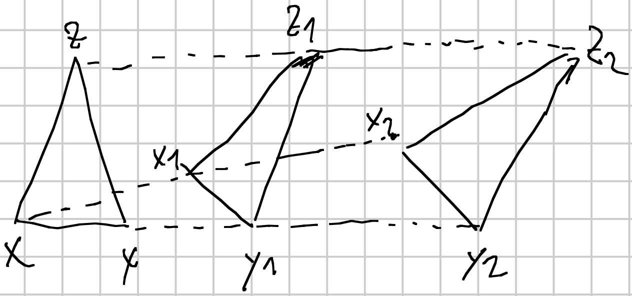
2)



A_3 = simm. di A_2 in A_1 e cyc

TS: H, A_3, B_3, C_3 ciclici

Fatto $A_1\overset{\triangle}{B_1}C_1 \simeq A_2B_2C_2$



se per rotomolt. di centro M $Z \to X$ e $Z_1 \to X_1$
allora $Z_2 \to X_2$

$X_1\overset{\triangle}{\hat{Z_1}}M \simeq X_2\overset{\triangle}{\hat{Z_2}}M \simeq X\hat{Z}M$

ciclando si ha che $X_1Y_1Z_1S \simeq X_2Y_2Z_2S \simeq XYZS$

$\to X_2Y_2Z_2 \simeq XYZ$.

Lemma: nella figura di FONTENÉ,
se $N = LA_1 \cap (A_0B_0C_0)$, allora $AP \perp A_0N$

<u>D</u>

$$\angle(A_0N, AP) = \angle(A_0N, LN) + \angle(LN, PA_1) + \angle(PA_1, AP)$$
$$= \angle(EA_0, EL) + \angle(PA_1', A_1'L') + \angle(PA_1, AP) =$$
$$= \angle(AB, EL) + \angle(AP, AL') + \angle(PA_1, AP) =$$
$$= \angle(AB, EL) + \angle(AP, AL') + \angle(PA_1, AP) =$$
$$= \angle(AB, B_0C_0) + \angle(B_0C_0, B_0L) + \angle(PA_1, AB)$$
$$+ \angle(AB, AL') = \angle(PA_1, B_0C_0) + \angle(B_0C_0, B_0L') +$$
$$+ \angle(B_0C_0, B_0L) = 90^\circ.$$

Sia T = pt. medio di AH

$TN \perp NA_0 \to TN \parallel AP$

$\to$ l'omotetia di centro H e f. 2 per cui $T \to A$ manda $(A_0B_0C_0)$ in (ABC) e $NT \to AA_2$ per il parallelismo da cui $N \to A_2$.

Allora $A_3H \parallel NL = A_1L$

$\to \angle(A_3H, HB_3) = \angle(A_1L, LB_1)$

$= \angle(A_1C_1, C_1B_1) = \angle(A_3C_3, C_3B_3)$.

PROBLEMA

Sia ABC con incentro I e circocentro O.
Sia P t.c. se P' = coniug. isog. di P, allora $P' \in OI$.
$A_1 = AP \cap BC$ e cyc.

TS: (AIA_1) e cyc coassiali

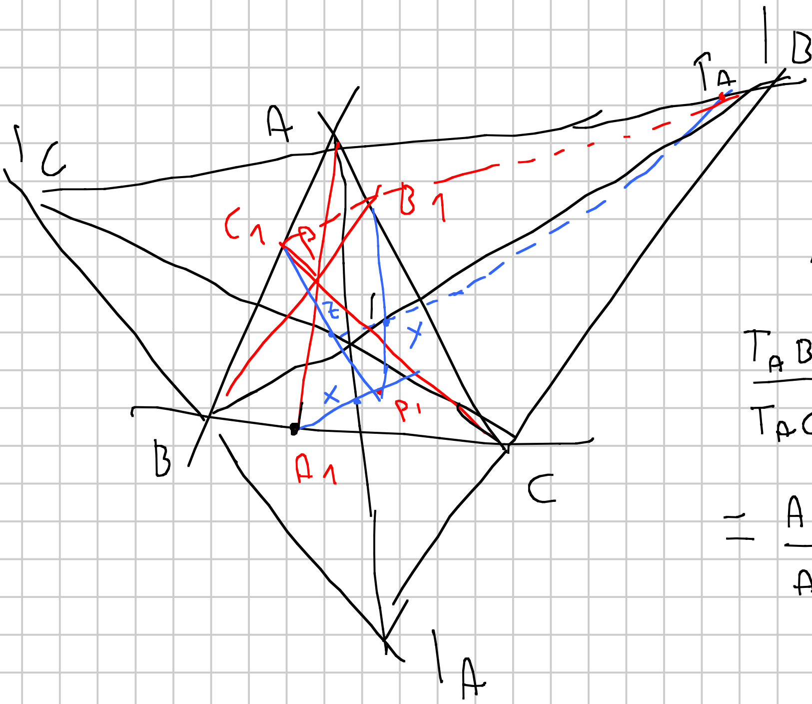
D: (i) I_A e cyc gli excentri.

allora I_AA_1 e cyc concorrono su IP'.

D Sia $X = A_1P' \cap AI$.

allora

YZ, B_1C_1, I_BI_C concorrono



$T_A = I_BI_C \cap B_1C_1$.

Menelao su $P'\overset{\triangle}{B_1C_1}$

$$\frac{T_AB_1}{T_AC_1} \cdot \frac{ZC_1}{ZP'} \cdot \frac{P'Y}{YB_1} =$$

$$= \frac{AB_1}{AC_1} \cdot \frac{CC_1}{CP'} \cdot \frac{BP'}{BB_1} =$$

$$= \frac{\sin \cancel{\hat{A}}}{\sin A\hat{C}C_1} \cdot \frac{\sin A\hat{B}B_1}{\sin \cancel{\hat{A}}} \cdot \frac{\sin P'\hat{C}B}{\sin P'\hat{B}C} = 1$$

Lemma se $A_1B_1 \cap A_2B_2 \cap A_3B_3 = D$ e cyc sono all.

$AA_1 \cap BB_1 \cap CC_1 = P_1$

$= P_2$ sono all.

$= P_3$

Dim proietto $\overline{DEF}$ all'∞; i tre $\triangle$ div. omotetici e i tre centri di omotetia sono all.

applicato a $I_AI_BI_C$, $A_1B_1C_1$, XYZ $\to$

la persp. comune è $\overline{T_AT_BT_C}$ e i centri

sono I, P', $R = I_AA_1 \cap I_BB_1 \cap I_CC_1$

$\to I, P', R$ allineati.

Ora $P' \in IO \to R \in IO$.

$A_2 = I_AA_1 \cap (I_AI_BI_C)$ e cyc.

$I_C\hat{A_2}A_1 = I_C\hat{I_B}I_A = I_A\hat{B}C \to I_CBA_1A_2$ ciclico

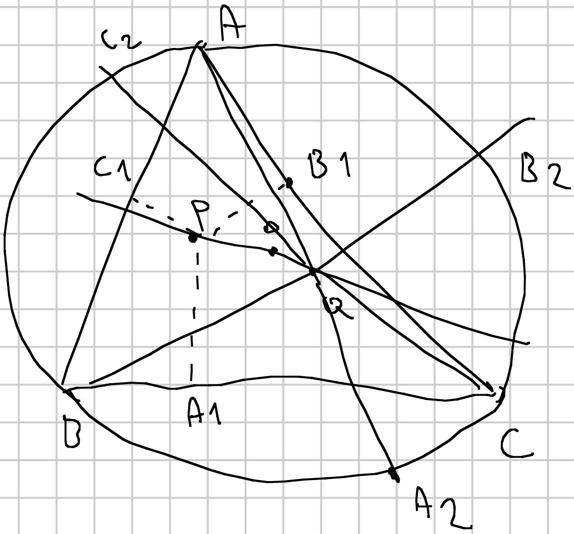
$\to I_AA_1 \cdot I_AA_2 = I_AB \cdot I_AI_C = I_AI \cdot I_AA$

$\to A_2 \in (AIA_1)$

Lemma 2

P, Q, O all. su l

$\to (PA_1A_2)$ e cyc. sono coassiali



D:

$A_3 = A_2P \cap (ABC)$ e cyc.

$A_4 = A_3O \cap (ABC)$ e cyc.

$A_5 = A_2A_4 \cap BC$ e cyc.

ovvio: $A_5 \in (PA_1A_2)$

a) AA_4 e cyc. concorrono

Pascal su $A_2A_4B_3A_3B_4B_2$

$\rightarrow$ $A_2A_3 \cap B_2B_3 = P$
$A_3A_4 \cap B_3B_4 = O$ allineati con Q
$A_2B_4 \cap B_2A_4 = T$

Pascal su $A_2A_4BAB_4B_2$

$\rightarrow$ $A_2B_4 \cap B_2A_4 = T$
$AA_2 \cap BB_2 = Q$ all. con O, P
$AA_4 \cap BB_4 = X$

$\rightarrow$ $AA_4 \cap BB_4 \in l$
$AA_4 \cap CC_4 \in l$ $\rightarrow$ AA_4 e cyc conc. su l. in X

b) A_5 e cyc. allineati

$A_6 = $ (retta tang. a (ABC) in A_2) $\cap BC$.

NOTA Steinbart $\rightarrow A_6, B_6, C_6$ sono allineati

$$\prod_{cyc} \frac{A_6B}{A_6C} \cdot \prod_{cyc} \frac{A_5C}{A_5B} = \prod_{cyc} (BCA_6A_5) = \underset{\substack{\downarrow \\ \text{proietto} \\ \text{da } A_2}}{=} \prod_{cyc} \underline{(BCA_2A_4)}$$

AA_2 e cyc conc. in Q
AA_4 — — X $\rightarrow$ l'ultimo prodotto è 1

per Ceva (anche trigon.)

so che $\displaystyle\prod_{cyc} \frac{A_6B}{A_6C} = -1$

$\rightarrow \displaystyle\prod_{cyc} \frac{A_5C}{A_5B} = -1$

$\Rightarrow A_5, B_5, C_5$ all. su t.

se P_1 = proiez. di P su t,

(PA_1A_2) e cyc passano tutti per P_1

Basta appl. il Lemma 2 a $I_AI_BI_C$ con

$P = I$ e $Q = R$

perché il circocentro di $I_AI_BI_C \in OI$.