N ADVANCED

Titolo nota 03/09/2014

EQUAZIONI FUNZIONALI DI TEORIA DEI NUMERI

① IMO 2010/3

TROVARE LE $g : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$

T.C. $(g(m)+n)(g(n)+m)$ è $\square$

$\forall m, n \in \mathbb{N}_0$

② IMO SL 2009 N3

$F : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ non costante, $\forall a, b \in \mathbb{N}_0$

$(a-b) \mid (F(a)-F(b))$

(i) È vero che F è un polinomio?
È vero che se F è un pol. è a coeff. in $\mathbb{Q}, \mathbb{Z}$?

(ii) Dim. che esistono infiniti primi p per cui $\exists c \in \mathbb{N}_0$ per cui $p \mid F(c)$

③ TROVARE LE $F : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ T.C.

(i) $F(n!) = F(n)!$ $\quad \forall n \in \mathbb{N}_0$

(ii) $(m-n) \mid F(m)-F(n)$ $\quad \forall m, n \in \mathbb{N}_0$

④ Romania TST 2013 1/3

TROVARE $F:\mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ INIETTIVE PER CUI VALE LA SEGUENTE PROPRIETÀ:

SE $S \subseteq \mathbb{N}_0$ È FINITO E $\sum_{s \in S} \frac{1}{s} \in \mathbb{N}_0$

ALLORA $\sum_{s \in S} \frac{1}{F(s)} \in \mathbb{N}_0$

⑤ Cina TST 2014 1/3

SIA $F:\mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ TALE CHE

(i) $MCD(F(m), F(n)) \leq (MCD(m,n))^{2014}$ $\forall m,n \in \mathbb{N}_0$

(ii) $n \leq F(n) \leq n+2014$ $\forall n \in \mathbb{N}$

ALLORA $\exists N \in \mathbb{N}_0$ $\forall n \geq N$ $F(n)=n$

⑥ SIA $n \in \mathbb{Z}$ FISSATO. TROVARE

$F:\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ t.c. $F(x+y+F(y)) = F(x) + ny$

$\forall x,y \in \mathbb{Z}$

---

② $F:\mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ $(a-b) \mid F(a)-F(b)$

(i) NON NECESSARIAMENTE F È UN POLINOMIO

<u>ES</u> DEFINISCO F INDUTTIVAMENTE

$F(1) = 1 \qquad F(2)=2 \quad F(3) = 7$

$F(1), \ldots, F(n)$

$F(n+1)$ deve essere soluzione di

$$\begin{cases} x \equiv F(1) & (n) \\ x \equiv F(2) & (n-1) \\ \end{cases}$$

ES. VERIFICARE CHE ESISTE SOLUZIONE

Pongo $F(n+1) =$ una soluzione $> 2^{n+1}$

$$F(n) = n + n(n-1) + n(n-1)(n-2) + \ldots + n!$$

F non è un polinomio

$a > b \qquad F(a) - F(b) =$

$$\left[a(a-1) \cdot \ldots \cdot (a-(a-1)) + a(a-1) \cdot \ldots \cdot (a-(a-2)) + \ldots + a\right] - \left[b(b-1) \cdot \ldots \cdot (b-(a-1)) + b(b-1) \cdot \ldots \cdot (b-(a-2)) + \ldots + b\right]$$

è $p(a) - p(b)$ per un opportuno polinomio

$$b(x) = x + x(x-1) + \dots + x(x-1)\cdot\ldots\cdot(x-(a-1))$$

$$a - b \mid F(a) - F(b)$$

$$F(n) = n!\left(1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots\right) \sim e \cdot n!$$

ii) Se F è un polinomio, ha coefficienti in $\mathbb{Q}$ (manda infiniti interi in interi)

F non è sempre a coeff. interi

<u>ES</u> $\quad \dfrac{x(x+1)}{2}$ è intero per ogni x intero

$$\frac{a(a+1)}{2} - \frac{b(b+1)}{2} = \frac{a^2 - b^2 + a - b}{2} =$$

$$= (a-b) \cdot \boxed{\frac{a+b+1}{2}} \longrightarrow \text{è intero? Non sempre}$$

$$F(x) = \frac{x^4 - x^2}{2} \qquad \frac{a^4 - b^4 + a^2 - b^2}{2} =$$

$$= (a-b)\,\boxed{\frac{(a^3 + a^2 b + a b^2 + b^3 + a + b)}{2}} \text{ è intero}$$

(1) $n+k$ è sicuramente una soluzione per $k \geq 0$.

Le soluzioni trovate sono quelle per cui

$$F(a) - F(b) = a - b \qquad \forall a, b \in \mathbb{N}_0$$

Se $p \mid (F(a) - F(b))$

$$\frac{(g(a)+n)(g(n)+a)}{(g(b)+n)(g(n)+b)} \quad \text{è } \square$$

cerco n t.c. $g(a)+n$ contiene p con esp. dispari, e anche $g(b)+n$ contiene p con esponente dispari.

Se $p^2 \mid g(a) - g(b)$ pongo $n = p^{g(a)+10} - g(a) + p$

$$p^{g(a)+10} + p$$

$$g(b) + n = \underbrace{(g(b) - g(a))}_{\text{contiene } p^2} + \underbrace{(g(a) + n)}_{\text{contiene uno solo } p}$$

Se $p \parallel g(a) - g(b)$ $\quad n = p^{\text{dispari grande}} - g(a)$

$n + g(a) = p^{\text{dispari grande}}$

$$n + g(b) = p^{\text{dispari grande}} + \underbrace{(g(a) - g(b))}_{\text{c'è un solo } p}$$

$p \mid g(n)+a \qquad p \mid g(n)+b \qquad p \mid (a-b)$

- $g(a)=g(b)$ qualsiasi primo divide $g(a)-g(b)$
dunque ogni primo divide $a-b \Rightarrow a=b$

g è iniettiva

- $a-b=1 \Rightarrow g(a)-g(b)=\pm 1$

- $a-b=2 \Rightarrow g(a)-g(b)=\left(g(a)-g\left(\frac{a+b}{2}\right)\right)$

$+ \dots = 0,\ 2,\ -2$

0 non va bene per l'iniettività

$g(a)-g(b)=\pm 2$

Il segno è sempre lo stesso ...

---

(4) <u>RICORDO</u>: <u>1</u> $\quad 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\dots=+\infty$

<u>2</u> Ogni razionale positivo è della forma

$$\sum_{s\in S}\frac{1}{s} \quad \text{per un certo } S\subseteq \mathbb{N}_0 \text{ finito}$$

<u>3</u> Se $\sum_{s\in S}\frac{1}{s}<r$ con r razionale

esiste $T\subseteq(\mathbb{N}_0\setminus S)$ con $\sum_{s\in S\cup T}\frac{1}{s}=r$

Cosa posso dire di

$\sum_{s \in S} \frac{1}{F(s)}$ quando $\sum_{s \in S} \frac{1}{s}$ non è intera?

$\sum_{s \in S} \frac{1}{s} = r$ arrivo a $\lceil r \rceil$ con T disgiunto da S

$\sum_{s \in S} \frac{1}{s} + \sum_{s \in T} \frac{1}{s}$ è intero

Se $\sum_{s \in S'} \frac{1}{s} = \sum_{s \in S} \frac{1}{s}$ allora

$\sum_{s \in S'} \frac{1}{s} + \sum_{s \in T} \frac{1}{s}$ è intero

Prendo T disgiunto sia da S che da S'

$\sum_{S} \frac{1}{F(s)} + \sum_{T} \frac{1}{F(s)}$, $\sum_{S'} \frac{1}{F(s)} + \sum_{T} \frac{1}{F(s)} \in \mathbb{N}_0$

Faccio la differenza e ho $\sum_{s \in S} \frac{1}{F(s)} - \sum_{s \in S'} \frac{1}{F(s)} \in \mathbb{Z}$

$$\frac{1}{a} \pm \frac{1}{b} \pm \frac{1}{c} \pm \frac{1}{d} \dots \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{1}{F(a)} \pm \dots \pm \quad \in \mathbb{Z}$$

$F(1) = 1$ perché $\frac{1}{1}$ è intero $\Rightarrow \frac{1}{F(1)} \in \mathbb{N}_0$

$F(2) \geq 2$

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n(n+1)}$$

$$1 \geq \frac{1}{F(n)} > \frac{1}{F(n)} - \frac{1}{F(n+1)} - \frac{1}{F(n(n+1))} \in \mathbb{Z}$$

$$\vee\!\!|$$

$$-\frac{1}{F(n+1)} - \frac{1}{F(n(n+1))} \geq -\frac{1}{2} - \frac{1}{3}$$

$$\vee$$

$$-1$$

$$\frac{1}{F(n)} = \frac{1}{F(n+1)} + \frac{1}{F(\sim)}$$

$$\frac{1}{F(n)} > \frac{1}{F(n+1)}$$

F è stratt. crescente

$F(n) \geq n$ $\qquad$ $F(2) = 2$

$F(2) \geq 3 \qquad F(3) \geq 4 \qquad F(6) \geq 7$

$$\frac{1}{F(2)} + \frac{1}{F(3)} + \frac{1}{F(6)} \geq 1$$

$F(2) = 2$

Se $F(n) = n$ $\qquad \frac{1}{n} = \frac{1}{F(n+1)} + \frac{1}{F(n(n+1))}$

$$\leq \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n}$$

⑤ OSS 1 Se $(m, n) = 1$ $(F(m), F(n)) = 1$
sono coprimi

Cerchiamo una successione di numeri a_i
t.c. $(a_i, a_j) = 1$ $(a_{i+1} = a_i! + 1)$
$a_1 = 2018! + 1$
$i > j \Rightarrow a_i > a_j$.

$F(a_i) = a_i + k_i$ $0 \leq k_i \leq 2017$

$(a_j + k_j, a_i + k_i)$

Prendiamo a_j e a_i t.c. $F(a_j) - a_j = F(a_i) - a_i = h$

$(h+1) \mid (n! + h + 1)$ $h = 0, ..., 2017$

$(h+1) \mid F(a_i) = a_i + h = a_{i-1}! + (h+1)$
$(h+1) \mid F(a_j) = a_j + h = a_{j-1}! + (h+1)$

assurdo a meno che h non sia 0
$(a_i, a_j) = 1$

$F(a_i) = a_i + h$ al massimo per un i
per $1 \leq h \leq 2017$

$F(a_i) = a_i$ per infiniti a_i

$\underline{p \mid F(n) \Rightarrow p \mid n}$ | Prendo n t.c.

$p \mid F(n)$ ma $p \nmid n$

Se trovo r con $p \mid r$ $(r, n) = 1$

e $p \mid F(r)$ ho un assurdo ...

Prendo $p_1, \ldots, p_{2015^2}$ primi "enormi"

$r \equiv 0 \quad (p_1 \cdot \ldots \cdot p_{2015})$

$r \equiv -1 \quad (p_{2016} \cdot \ldots \cdot p_{4030})$

$r \equiv -2 \quad (p_{4031} \cdot \ldots)$

$n \equiv -1 \quad (p_1 \cdot p_{2016} \cdot p_{4031} \cdot \ldots)$

$n \equiv -2 \quad (p_2 \cdot p_{2017} \cdot p_{4032} \cdot \ldots)$

$r \equiv 1 \quad (n)$ (n è coprimo con i p_i

prima trovo n e poi r)

$F(n) = n + k$ ma allora $p_k, p_{2015+k} \ldots \mid F(n)$

$F(r)$ è divisibile per uno di questi, assurdo dunque $F(n) = n$ per infiniti n

$r \equiv -1 \quad (a_i)$

$r \equiv -2 \quad (a_{i+1})$

$\vdots$

$r \equiv -2012 \quad (a_{2012})$

$r \equiv 0 \quad (p)$

$r \equiv 1 \quad (n)$

$F(r) = r+k \qquad (F(r), F(a_{i+k})) = a_{i+k}$

$F(a_{i+k}) = a_{i+k}$

$(r, a_{i+k}) = 1 \qquad a_{i+k} \mid (r+k)$ assurdo se $F(r) \neq r$

$F(r) = r \qquad p \mid r \qquad p \mid F(r)$

$(n, r) = 1$ ma $p \mid (\underset{\overset{\shortparallel}{r}}{F(r)}, F(n))$

- TROVARE n t.c. $n+1, \dots, n+2012+\dots+n+4028$ contengano ognuno un primo non contenuto negli altri

F ha 2014 punti fissi consecutivi

– da lì in poi F è l'identità

---

⑥ <u>IDEA</u> $n=0$ a parte (n viene periodica con $\cancel{x}+F(\cancel{x})\equiv 0$ (mod il periodo))

Anche $F(x)=-x$ va bene per $n=0$

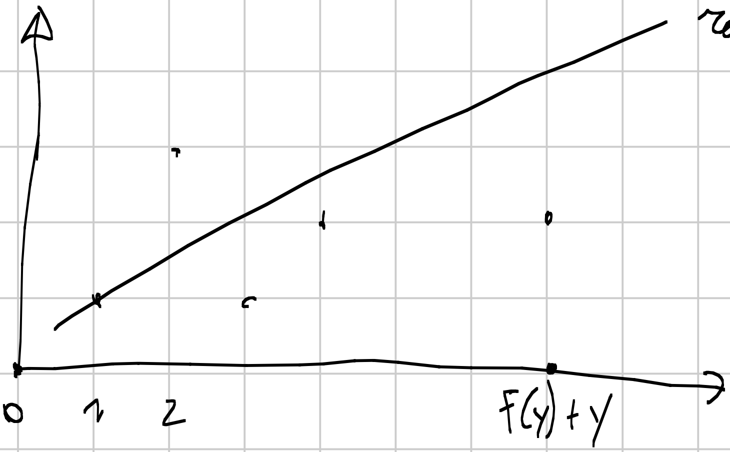
$F(0)=0$ a forza di sostituzioni si fa

$n\neq 0$

$$F(x+\underbrace{y+F(y)}_{\substack{\neq\\0}})=F(x)+\underbrace{ny}$$

se $y\neq 0$

$$F(x+m\underbrace{(y+F(y))})=F(x)+m\,ny$$



retta di pendenza $\left[\dfrac{ny}{|y+F(y)|}\right]$

che passa per i punti del grafico con $x\equiv 1\ (y+F(y))$

In particolare $\forall x\in\mathbb{Z}$

$$\frac{ny}{y+F(y)}x-C_y\leq F(x)\leq\frac{ny}{y+F(y)}x+D_y$$

$$\forall y, z \neq 0 \qquad \frac{n y}{y + F(y)} = \frac{n z}{z + F(z)} = \lambda \in \mathbb{Q}$$

$$F(z) = \frac{n - \lambda}{\lambda} z$$

non resta che trovare i valori buoni di λ