P - ADVANCED

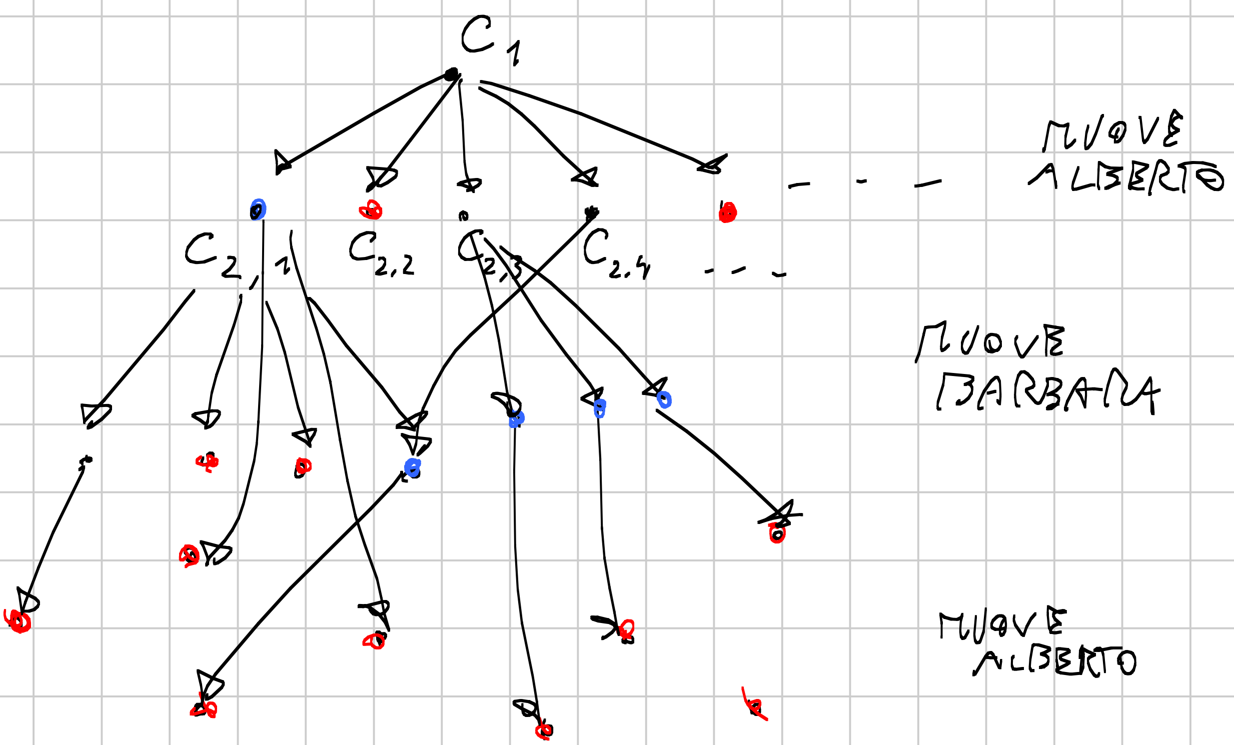
Titolo nota 01/09/2014

INDUZIONE

① ALBERTO E BARBARA GIOCANO A UN GIOCO
- MOSSE ALTERNE
- CHI NON PUÒ MUOVERE PERDE
- INIZIA ALBERTO
- NON SI PUÒ PAREGGIARE
- $\exists\, n \in \mathbb{N}$ T.C. IL GIOCO TERMINA ENTRO n MOSSE

TESI: UNO DEI DUE GIOCATORI HA UNA STRATEGIA VINCENTE.

IDEA DISEGNO IL GRAFO ORIENTATO DELLE CONFIGURAZIONI RAGGIUNGIBILI



NON CI SONO CICLI ORIENTATI (SENNÒ IL GIOCO PUÒ DURARE IN ETERNO)

PARTO DA UN GIOCO G E GLI ASSOCIO IL PIÙ PICCOLO n TALE CHE VALGA LA CONDIZIONE SUL

N° DI MOSSE $F(\mathcal{G}) = \min n$ t.c. ...

IND. SU $F(\mathcal{G})$

P.B. $F(\mathcal{G}) = 0$. ALBERTO PERDE

P.I. $F(\mathcal{G}) > 0$ ALBERTO PUÒ SCEGLIERE ALLA PRIMA MOSSA TRA VARIE CONFIGURAZIONI (O GIOCHI)

$G_1, G_2, .. G_k, ...$

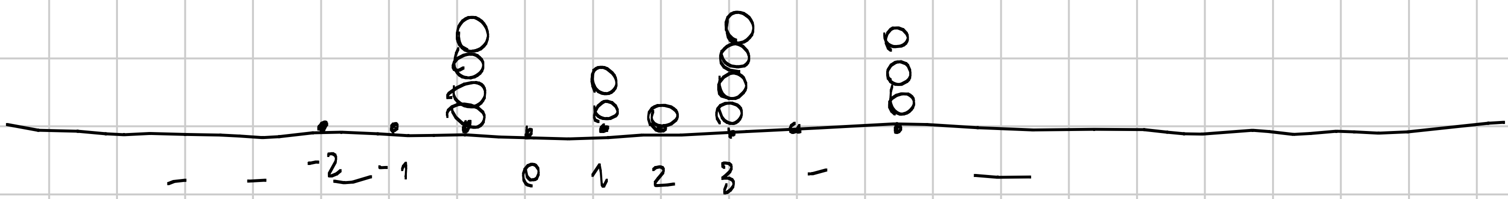
$F(G_i) \leq F(\mathcal{G}) - 1$ ALTRIMENTI $F(G_i) \geq F(\mathcal{G})$

ALLORA ESISTE SEQUENZA DI ALMENO $F(\mathcal{G})$ MOSSE A PARTIRE DA G_i, QUINDI A PARTIRE DA $\mathcal{G}$ SI POSSONO FARE ALMENO $F(\mathcal{G}) + 1$ MOSSE IN SEQUENZA.

- SE $\exists\, G_i$ IN CUI IL 2° GIOCATORE HA STRATEGIA VINCENTE, ALBERTO HA UNA STRATEGIA VINCENTE IN $\mathcal{G}$
- SE $\forall\, G_i$ IL 1° GIOCATORE HA UNA STRAT. VINCENTE, ALLORA IN $\mathcal{G}$ VINCE BARBARA.

---

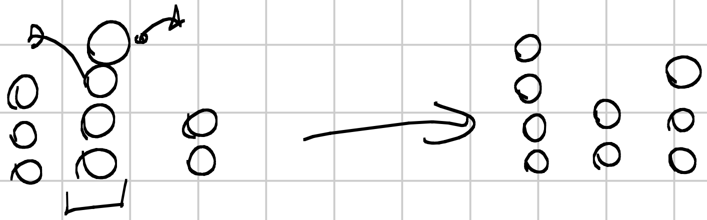
② PILE DI MONETE SUI NUMERI INTERI



- CI SONO FINITE MONETE

UNA MOSSA CONSISTE NEL PRENDERE UNA PILA

CON ALMENO 2 MONETE E SPOSTARNE UNA
A DX E UNA A SX



- DIM. CHE DOPO UN CERTO N° DI MOSSE SI OTTENGONO TANTE PILE DA 1
- DIM. CHE LA CONF. FINALE, E IL NUMERO DI MOSSE PER RAGGIUNGERLA, NON DIPENDONO DALLE MOSSE SCELTE

INVARIANTI

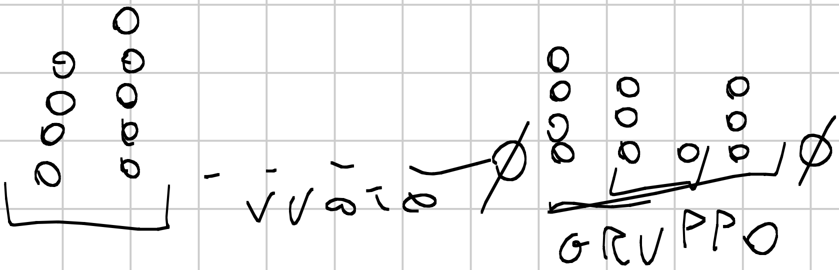
① $\sum_{n\in\mathbb{Z}} n\cdot(\#\text{ di monete sopra } n) = \sum_{\text{monete}} \text{posizione della moneta}$

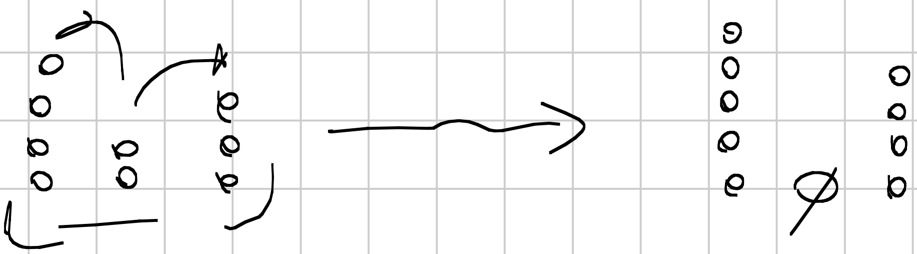
NON CAMBIA

② $\sum_{\text{moneta}} (\text{pos. di } m)^2$ aumenta sempre di 2

$n^2+n^2 \rightsquigarrow (n-1)^2+(n+1)^2$

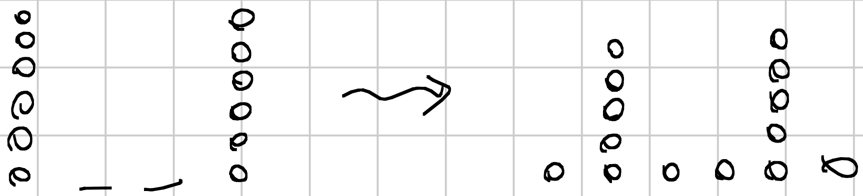
COSA È UN GRUPPO





UN GRUPPO È L'INSIEME DELLE MONETE CONTENUTE IN UNA SEQUENZA MASSIMALE DI PILE SENZA DUE PILE VUOTE CONSECUTIVE

- DUE GRUPPI POSSONO SALDARSI

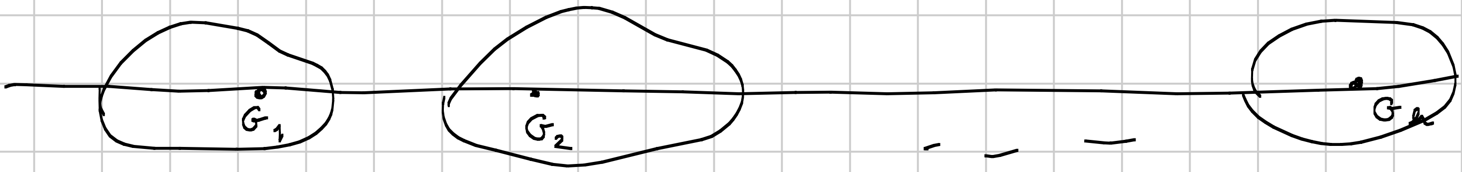


- UNA MOSSA PUÒ CREARE AL PIÙ UNA PILA VUOTA
  UN GRUPPO NON SI PUÒ SFALDARE

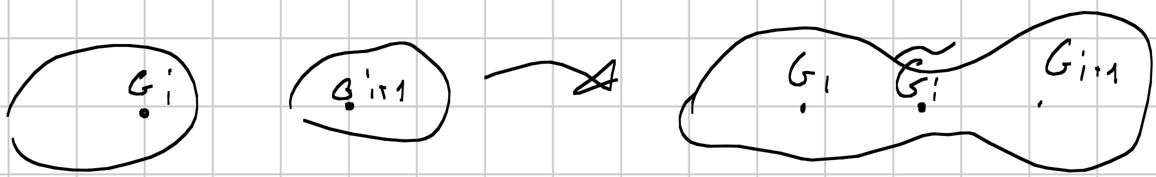
- IL NUMERO TOTALE DI GRUPPI DECRESCE DEBOLMENTE

(CI SONO k MONETE)

SE C'È UNA MONETA $> k+100$ E UNA $< k+100$ IN MEZZO CI SONO 2 PILE VUOTE CONSECUTIVE



$G_1, .., G_n$ SONO I BARICENTRI



- WOW! ABBIAMO DIM. IL 1° PUNTO

- $\forall$ CONFIG. DI MONETE $\exists\, n \in \mathbb{N}$ t.c. NON SI POSSONO FARE PIÙ DI n MOSSE

$F(C) = \min n$ t.c. NON SI POSSONO FARE PIÙ DI n MOSSE

RESTA DA DIM. CHE LA CONF. FINALE È UNICA
(POI IL N° DI MOSSE SI CALCOLA COL 2° "INVARIANTE")

INDUZIONE SU $F(C)$

P.B. $F(C) = 0$ OK

P.I. $F(C) > 0$. CONFRONTIAMO 2 SEQUENZE DI MOSSE

$$C = C_0, C_1, C_2, \ldots, C_m$$

$$C = C_0', C_1', \ldots, C_n'$$

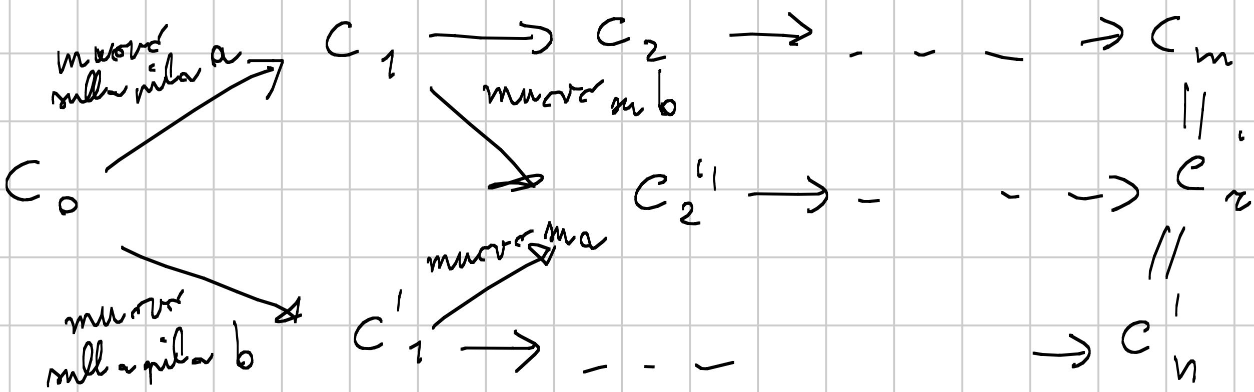
$n, m \geq 1$ TUTTI E DUE

1° CASO $C_1 = C_1'$ $\quad F(C_1) = F(C_1') < F(C)$

PER IP. IND. $C_m = C_n'$ E $m = n$

2° CASO $C_1 \neq C_1'$

IN C ESISTONO ALMENO 2 PILE ≥ 2, QUINDI $m, n \geq 2$



PIGEONHOLE INFINITO
- SE HO INFINITI OGGETTI E FINITI CASSETTI, C'È UN CASSETTO CON INFINITI OGGETTI

③ EGMO 2012 / 6

C'È UN SOCIAL NETWORK CON INFINITE PERSONE ISCRITTE. OGNUNO HA FINITI AMICI, L'AMICIZIA È RECIPROCA, OGNUNO HA ALMENO UN AMICO. OGNUNO SCEGLIE TRA I PROPRI AMICI IL MIGLIORE AMICO, LA "MIGLIORE AMICIZIA" NON È NECESSARIAMENTE SIMMETRICA.

UNA PERSONA P È 1-FAMOSA SE È IL MIGLIORE AMICO DI QUALCUNO, È 2-FAMOSA S // // // DI UNA PERSONA 1-FAMOSA, ...
È (n+1)-FAMOSA SE È IL MIGLIORE AMICO DI UN (n)-FAMOSO

UNA PERSONA È CELEBRE SE È n-FAMOSA PER INFINITI n NATURALI.

TESI: OGNI PERSONA CELEBRE È IL MIGLIOR AMICO DI ALMENO UNA PERSONA CELEBRE

GRAFO (V,E) INFINITO, OGNI VERTICE HA GRADO FINITO

$F: V \to V$ $\quad F(v)$ = il miglior amico di v

$\{F(v), v\} \in E \quad \forall v \in V$

v è un 1-FAMOSO $\quad v \in \mathrm{Im}\, F$

v è 2-FAMOSO $\quad v \in F(\mathrm{Im} F) = \mathrm{Im}(F^2)$

$\vdots$

v è n-FAMOSO $\quad v \in \mathrm{Im}(F^n)$

V CELEBRE. $v_1, \dots, v_k$ SONO GLI AMICI DI V, MA NON TUTTI, QUELLI CHE HANNO SCELTO V COME MIGLIOR AMICO $\{v_1, \dots, v_k\} = F^{-1}(\{v\})$

$\forall n \ \exists \ w_1^n, \dots, \dots w_n^n$ CON $F(w_i^n) = (w_{i+1}^n)$ $1 \leq i \leq n-1$

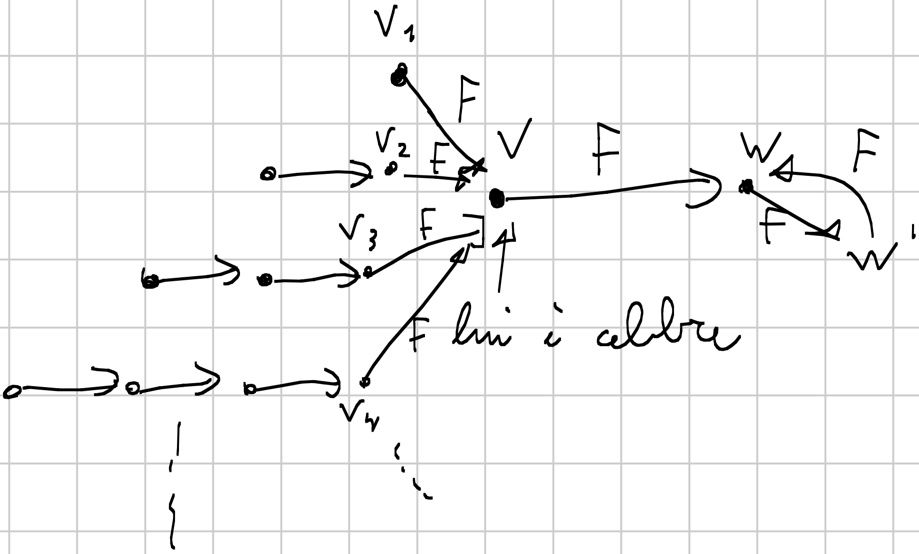
$w_n^n = V$

$$w_1^n \xrightarrow{F} w_2^n \xrightarrow{F} w_3^n \longrightarrow \dots \longrightarrow w_{n-1}^n \xrightarrow{F} V$$

esistono ∞ n per cui w_{n-1}^n è la stessa persona v_j

Allora v_j è celebre

E SE AMMETTIAMO CHE I VERTICI ABBIANO GRADO INFINITO?
TROVARE UN CONTROESEMPIO.



---

④ RAMSEY INFINITO
SE HO UN GRAFO INFINITO, C'E' UN INSIEME INFINITO DI VERTICI TUTTI COLLEGATI O TUTTI SCOLLEGATI.

<u>COROLLARIO</u> OGNI SUCCESSIONE $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$

DI NUMERI REALI AMMETTE UNA SOTTO SUCCESSIONE DECRESCENTE (STRETTAMENTE) O DEB. CRESCENTE.

<u>IDEA</u> COLLEGO CON UN ARCO a_i e a_j SE $i<j$ E $a_i \leq a_j$.

PER RAMSEY ESISTE SOTTOINSIEME TUTTO COLLEGATO (SOTTO SUCC DEB. CRESCENTE) o TUTTO SCOLLEGATO (DECRESCENTE)

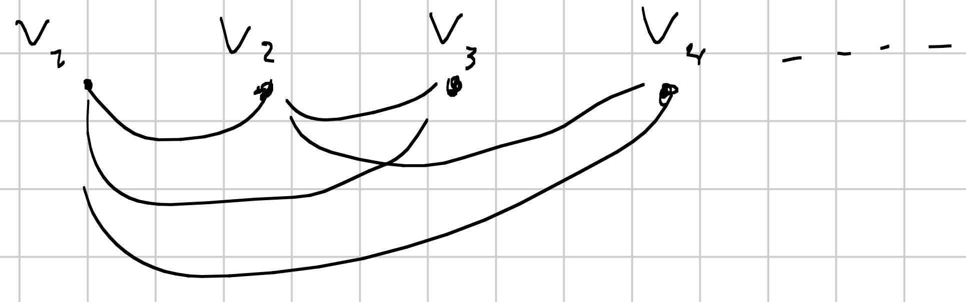
<u>DIM (RAMSEY)</u> (V, E) $|V| = \infty$

Prendo $v_1 \in V$; v_1 è collegato a infiniti altri vertici oppure è scollegato. Facciamo che v_1 è collegato a ogni $w \in S_1 \subseteq V$ $|S_1| = \infty$

Prendiamo $v_2 \in S_1$; v_2 facciamo che è collegato anche lui a infiniti el. di S_1. $\exists S_2$ infinito $S_2 \subseteq S_1 \setminus \{v_2\}$ S_2 collegato a v_2.

$v_3 \in S_2$. Stavolta v_3 è scollegato da tutto $S_3 \subseteq S_2 \setminus \{v_3\}$ $|S_3| = \infty$, e così via

Otteniamo una successione di vertici



Un vertice è rosso se è collegato a tutti i successivi è blu se è scollegato da tutti i successivi
Esistono infiniti vertici rossi o infiniti blu