A1 basic Giada

Titolo nota 02/09/2014

Complessi + Polinomi

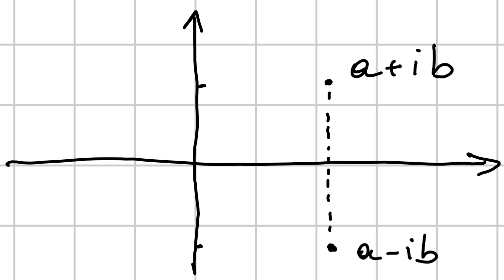
Complessi

$$\mathbb{C} = \{a+ib \; : \; a, b \in \mathbb{R}\}$$

$$z = a+ib = \rho(\cos\theta + i\sin\theta) = \rho e^{i\theta}$$

Operazioni

- SOMMA regola del parallelogramma
- MOLTIPLICAZIONE rotazione + omotetia
- MODULO $|z| = \rho = \sqrt{a^2+b^2}$
- DIVISIONE $\dfrac{a+ib}{c+id} = \dfrac{a+ib}{c+id} \cdot \dfrac{c-id}{c-id} = \dfrac{(ac+bd) + i(bc-ad)}{c^2+d^2}$
- INVERSO $\dfrac{1}{a+ib} = \dfrac{a-ib}{a^2+b^2} = \dfrac{\overline{a+ib}}{|a+ib|^2}$
- CONIUGIO $z = a+ib$
  $\bar{z} = a-ib$



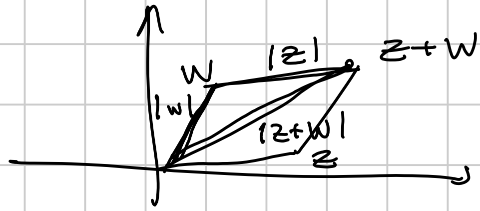
Proprietà

- $z \cdot \bar{z} = (a+ib)(a-ib) = a^2+b^2 = |z|^2$
- $\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}$
- $\overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w}$
- $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$ $z = a+ib$ $w = c+id$

$$\sqrt{(ac-bd)^2 + (ad+bc)^2} = \sqrt{a^2+b^2} \cdot \sqrt{c^2+d^2}$$

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2) = (ac-bd)^2 + (ad+bc)^2$$

- $|z+w| \leq |z| + |w|$



Formule di de Moivre

$$[\rho(\underset{\overset{\shortparallel}{z}}{\cos\theta + i\sin\theta})]^n = [\rho e^{i\theta}]^n = \rho e^{i\theta} \cdot \ldots \cdot \rho e^{i\theta}$$

$$\boxed{\rho_1 e^{i\theta_1} \cdot \rho_2 e^{i\theta_2} = \rho_1\rho_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)}}$$

$$= \rho^n e^{in\theta}$$

$$= \rho^n[\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)]$$

Polinomi

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

$a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ coeff. $\in \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}$

$n = \deg p$

p è monico se $a_n = 1$

Divisione con resto

Dati a, b pol. esistono q, r t.c.
$a(x) = b(x) \cdot q(x) + r(x)$ $\quad \deg r < \deg b$

[Induzione su $\deg a$]

Ruffini
$b(x) = x - \alpha$ $\quad r(x) = a(\alpha)$

$$a(x) = (x-\alpha)\, q(x) + r$$

Cor

Se α è radice di $p(x)$, cioè $p(\alpha)=0$,
$\Rightarrow$ $x-\alpha \mid p(x)$

Cor

Un polinomio di grado n ha al più n radici.

$n = \deg p$

$$p(x) = (x-\alpha)\, q(x)$$

q ha al più grado $n-1$

Criterio di identità fra polinomi

Se p, q sono due polinomi t.c. $\deg p, \deg q \leq n$ e p e q coincidono su almeno $n+1$ valori, allora sono uguali (cioè hanno gli stessi coeff.)

$p(x)-q(x)$ ha grado $d \leq n$
$\Rightarrow$ ha al più n radici
Ma detti $x_1, \dots, x_{n+1}$ i valori in cui coincidono p, q
abbiamo $p(x_i) - q(x_i) = 0$.
$\Rightarrow$ x_i è radice di $p(x)-q(x)$ $\forall\, i = 1, \dots, n+1$

$$\Rightarrow \quad p(x)-q(x) \equiv 0$$

Fattorizzazione unica

I polinomi a coeff. interi / raz / reali / compl. hanno la fattorizzazione unica.
Cioè dato $p(x)$, esistono unici $f_1, f_2, \dots, f_k$ pol. irriducibili t.c. $p(x) = f_1(x) \cdot \ldots \cdot f_k(x)$.

MCD

<u>Def</u>: $a(x), b(x)$ pol. $MCD(a(x), b(x)) = (a(x), b(x))$
è $d(x)$ monico t.c. $d(x) \mid a(x)$ e $d(x) \mid b(x)$
e $\forall$ $e(x) \mid a(x)$ e $e(x) \mid b(x)$, $e(x) \mid d(x)$.

<u>Dim</u> Per induzione sul deg b, utilizzando la divisione euclidea.
$a(x) = b(x) \cdot q(x) + r(x)$

$(a(x), b(x)) = (a(x), r(x))$ ←
deg $r <$ deg b

resto di $a(x)/b(x)$

Algoritmo euclideo $(a(x), b(x)) = (a(x), r(x))$

Bézout

Dati $a(x), b(x)$ t.c. $(a(x), b(x)) = d(x)$, esistono $h(x), k(x)$ t.c. $a(x) \cdot h(x) + b(x) \cdot k(x) = d(x)$

<u>Dim</u> Per induzione su deg b

$(a(x), b(x)) = (a(x), r(x))$

Per induzione, dato che deg $r <$ deg b so trovare h', k' t.c.
$a(x)\, h'(x) + r(x) \cdot k'(x) = d(x)$
$a(x) = b(x) \cdot q(x) + r(x)$ deg $r <$ deg b

$a(x)\, h'(x) + (a(x) - b(x)\, q(x))\, k'(x) = d(x)$

$h(x) = h' + k'$ $k(x) = -q k'$

Interpolazione

(x_i, y_i) $\quad i=1,\dots,n$ $\quad x_i \neq x_j$ per $i \neq j$
e voglio trovare $p(x)$ t.c. $p(x_i) = y_i$.

Ha soluzione e $\deg p(x) = n-1$.

Interpolazione di Lagrange

$$p_i(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)\cdot\ldots\cdot(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdot\ldots\cdot(x-x_n)}{(x_i-x_1)(x_i-x_2)\ldots(\quad)(\quad)\ldots(\quad)}$$

$p_i(x_i) = 1$ $\qquad p_i(x_j) = 0$ $\qquad j \neq i$

$$p(x) = \sum_{i=1}^{n} y_i\, p_i(x) \qquad \checkmark$$

$\deg p = n-1$

Polinomi a coeff. complessi

Teorema (difficile): $p(x)$ a coeff in $\mathbb{C}$, $\deg p \geq 1$, allora $p(x)$ ha (almeno) una radice (complessa).

Teorema fondamentale dell'algebra:
Ogni $p(x)$ a coeff. complessi, si scompone in fattori irriducibili di grado 1.

Dim Induzione + teorema sopra + Ruffini (div. euclidea)

$\deg p = n = 1$

$\deg p = n > 1$ $\qquad$ p ha almeno una radice α
$p(x) = (x-\alpha)\, q(x)$
$\deg q = n-1$
$\Rightarrow$ per ipotesi induttiva q si scompone in fattori di grado 1

Polinomi a coefficienti reali

x^2+1 $\qquad x^2=-1 \qquad i, -i$ sono radici

$$x^2+1 = (x-i)(x+i)$$

Ogni polinomio a coeff. reali si scompone in fattori irriducibili di grado 1 o di grado 2.

<u>Dim</u> Per induzione sul grado di p.

<u>Lemma</u> $p(z)=0 \implies p(\bar{z})=0$

$$\Downarrow$$

$$a_n z^n + \ldots + a_1 z + a_0 = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\overline{a_n z^n + \ldots + a_0} = 0$$

$$\parallel$$

$$\bar{a}_n \bar{z}^n + \ldots + \bar{a}_1 \bar{z} + \bar{a}_0$$

$$\parallel$$

$$a_n \bar{z}^n + \ldots + a_1 \bar{z} + a_0 = p(\bar{z})$$

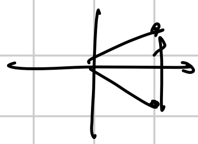
$\deg p = 0$ ok

Se vale per $\deg q \leq n \implies \deg p = n+1$ (INDUZIONE FORTE)

$p(x)$ ha almeno 1 radice α (complessa).

- α reale $\qquad p(x) = (x-\alpha)\, q(x)$ $\qquad$ ok
- α complessa $\qquad \bar{\alpha}$ è radice

  $(x-\alpha) \mid p(x) \qquad (x-\bar{\alpha}) \mid p(x)$



$(x-\alpha)(x-\bar{\alpha}) \mid p(x)$

$($

$$x^2 - (\alpha + \bar{\alpha}) x + \alpha \bar{\alpha} = x^2 - 2 \mathrm{Re}\,\alpha\, x + |\alpha|^2$$

$$\alpha \bar{\alpha} = |\alpha|^2$$

$$\alpha + \bar{\alpha} = 2 \mathrm{Re}\,\alpha$$

$$p(x) = (x^2 - 2\mathrm{Re}\,\alpha\, x + |\alpha|^2)\, q(x)$$

$$\deg q = n - 1$$

Cor: Un polinomio a coeff. reali di grado disp, ha almeno una radice reale.

$$p(x) = p_1(x) \cdot \ldots \cdot p_k(x)$$

$$\deg p = \sum_{i=1}^{k} \deg p_i$$

$\mathbb{Z}[x] = \{$ polinomi a coeff. in $\mathbb{Z}\}$

Polinomi a coeff. razionali

Lemma di Gauss: Un polinomio a coeff. interi è riducibile in $\mathbb{Q}[x]$ sse è riducibile in $\mathbb{Z}[x]$

$$p(x) = \underbrace{a(x)\, b(x)}_{\text{coeff. razionali}} = \underbrace{a'(x) \cdot b'(x)}_{\text{coeff. interi}}$$

$$\frac{a_n}{b_n} x^n + \ldots + \frac{a_1}{b_1} x + \frac{a_0}{b_0}$$

Polinomi a coeff. interi

Lemma (della radice razionale) $p(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$ a coeff. interi e $\frac{q}{r}$ razionale (ridotto ai minimi termini) è radice di $p(x)$

$$\Rightarrow \quad q \mid a_0, \; r \mid a_n$$

Dim $p\left(\frac{q}{r}\right)=0$ $\quad a_n \frac{q^n}{r^n} + \dots + \frac{a_1 q}{r} + a_0 = 0$

$$\Downarrow$$

$$a_n q^n + \dots + a_1 q r^{n-1} + a_0 r^n = 0$$

$$q \mid a_0 r^n \qquad r \mid a_n q^n$$
$$q \mid a_0 \qquad r \mid a_n$$

Lemma Dato $p(x) \in \mathbb{Z}[x]$ e $a, b \in \mathbb{Z}$ (distinti)
vale $a-b \mid p(a)-p(b)$

Dim $a-b \mid a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1})$
$p(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$
$p(a)-p(b) = a_n(a^n - b^n) + \dots + a_1(a-b)$

$\Longrightarrow a-b \mid p(a)-p(b)$

Dim 2 $p(x) = (x-a)\,q(x) + p(a)$

$x=b \qquad p(b) = (b-a)\,q(b) + p(a)$
$\qquad\qquad (b-a)\,q(b) = p(b)-p(a)$

Formule di Viète

Relazione fra coeff. e radici

$p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \quad \leftarrow$ monico

$x^2 + a_1 x + a_0 = (x-\lambda_1)(x-\lambda_2) = x^2 - (\lambda_1+\lambda_2)x + \lambda_1\lambda_2$
$a_1 = -(\lambda_1+\lambda_2)$
$a_0 = \lambda_1\lambda_2$

In generale
$a_{n-1} = -(\lambda_1 + \dots + \lambda_n)$
$a_{n-2} = \sum_{i<j} \lambda_i\lambda_j = (\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \dots +)$
$\vdots$
$a_0 = (-1)^n \lambda_1 \dots \lambda_n$

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = (x-\lambda_1)\dots(x-\lambda_n)$$
$$= x^n - (\lambda_1 + \dots + \lambda_n)x^{n-1} + (\Sigma \lambda_i \lambda_j) x^{n-2} - \dots + (-1)^n \lambda_1 \dots \lambda_n$$

Grado 2 $\quad \lambda_1^2 + \lambda_2^2 = (\lambda_1 + \lambda_2)^2 - 2\lambda_1\lambda_2$

In generale posso esprimere tramite le "espressioni sopra" ogni espressione simmetrica nelle radici.

$$\lambda_1\lambda_2^2 + \lambda_1\lambda_3^2 + \lambda_2\lambda_3^2 + \dots + (\lambda_1\lambda_2\lambda_3)^5$$

$S_k = \lambda_1^k + \lambda_2^k + \dots + \lambda_n^k \qquad k = 1, \dots, n-1$

$k \geq n \qquad p(\lambda_i) = 0 \qquad i = 1, \dots, n$

$$p(\lambda_i) = \lambda_i^n + \dots + a_1\lambda_i + a_0$$

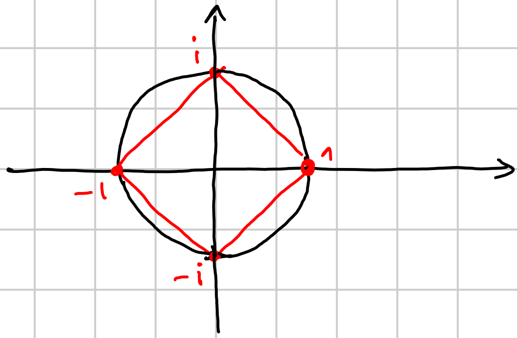
$$\lambda_i^n = -\sum_{j=0}^{n-1} a_j \lambda_i^j \implies \lambda_i^k = -\sum_{j=0}^{n-1} a_j \lambda_i^{j+k-n}$$

$$S_k = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^k = \sum_{i=1}^{n}\left(-\sum_{j=0}^{n-1} a_j \lambda_i^{j+k-n}\right)$$
$$= -\sum_{j=0}^{n-1}\left(a_j \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^{j+k-n}}_{S_{j+k-n}}\right)$$
$$= -\sum_{j=0}^{n-1} S_{k-(n-j)}\, a_j$$

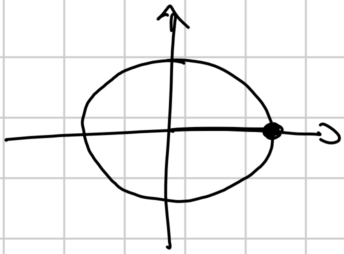
Radici n-esime dell'unità

$x^n - 1 \qquad x^n = 1 \implies |x|^n = |x^n| = 1 \implies |x| = 1$

$$\underline{\underline{x^4-1}} \qquad 1,-1,i,-i$$
$$\shortparallel$$
$$(x-1)(x+1)(x^2+1)$$



$x^n-1 \qquad z$ radice $\qquad z=e^{i\theta}$



$$1=(e^{i\theta})^n = e^{in\theta} = \cos(n\theta)+i\sin(n\theta)$$

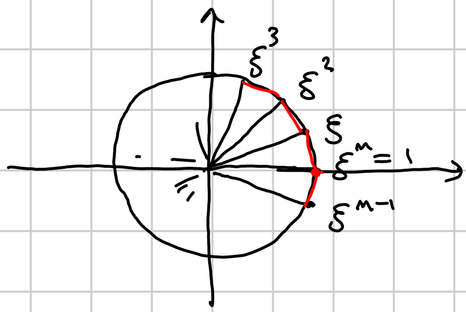
$$\Longrightarrow \begin{cases}\sin(n\theta)=0\\ \cos(n\theta)=1\end{cases} \Longrightarrow n\theta = 2\pi k$$

$$\Longrightarrow \theta = \frac{2\pi k}{n} \qquad \boxed{e^{i\frac{2\pi k}{n}}}$$

$k=1,\dots,n-1,n$

$$\xi = e^{\frac{2\pi i}{n}}$$

$$e^{\frac{2\pi i k}{n}} = \left(e^{\frac{2\pi i}{n}}\right)^k = \xi^k$$



vertici del poligono regolare

Esercizi

p. 13

es. 69, 70, 72

p. 23

es. 3, 7, 8, 10, 11

$f(n)=1^k+2^k+\dots+n^k$ (per $n\geq 1$ intero e $k\geq 0$ intero)

f è un polinomio?

Sia P polinomio che assume valori interi sugli interi.
Cosa sapete dire sul coefficiente direttivo? ← è intero?
è razionale?
il denominatore come è?

Esistono polinomi reali tali che

$$p(x) \geq 2^x \quad \text{per ogni } x \text{ intero positivo?}$$

e tali che $p(x+1) \geq 2p(x)$?

Il polinomio $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ è a coef interi con $p^2 \nmid a_0$ e $p \mid a_i$ (p primo) $\Rightarrow$ è irriducibile

---

Es 73

Sia p polinomio $p(n) = 1^5 + 2^5 + \dots + n^5$; $(n \geq 1)$
quanto vale $p(-1)$ e in generale $p(-n)$?

Considero $q(x) = p(x+1) - p(x)$ $\quad q(n) = (n+1)^5 \quad \forall n \geq 1$

$\Rightarrow q(x) = (x+1)^5 \quad \Rightarrow p(x+1) - p(x) = (x+1)^5 \Leftarrow$

in -1 $\quad x=-1$: $p(0) - p(-1) = 0$

$x=0$: $p(1) - p(0) = 1 \qquad \overset{1}{\underset{\shortparallel}{}} \; p(1) - p(-1) = 1$

$\Rightarrow p(-1) = 0$

in $-n$?

$$\begin{cases} p(1) - \cancel{p(0)} = 1^5 \\ \cancel{p(0)} - \cancel{p(-1)} = 0^5 \\ \cancel{p(-1)} - p(-2) = (-1)^5 \\ \vdots \\ p(\cancel{-n+1}) - p(-n) = (-n+1)^5 \end{cases}$$

sommo.

$$p(\cancel{1}) - p(-n) = \cancel{1^5} + 0^5 + (-1)^5 + \dots + (-(n-1))^5$$

$$p(-n) = 1 + 2^5 + 3^5 + \dots + (n-1)^5 = p(n-1)$$

$$\sum_{i=0}^{n} (i+1)^k = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} i^j = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \sum_{i=0}^{n} i^j$$

$$\overset{\shortparallel}{\sum_{i=1}^{n+1} i^k}$$

Chiamo $p_j(n) = 1^j + 2^j + \dots + n^j$

$$p_k(n+1) = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} p_j(n) = \left[\sum_{j=0}^{k-2} \binom{k}{j} p_j(n)\right] + k\, p_{k-1}(n) + p_k(n)$$

$$\boxed{(n+1)^k = \sum_{j=0}^{k-2} \binom{k}{j} p_j(n) + k\, p_{k-1}(n)}$$

INDUZIONE $\quad p_0(n) = n$ è un polinomio!

induttivo: $\quad p_{k-1}(n) = \dfrac{(n+1)^k - \sum_{j=0}^{k-2} \binom{k}{j} p_j(n)}{k}$ polinomio

Es 7 $\quad \boxed{P(n) = 2^n}$ $\quad \forall n$ naturale?

$q(x) = P(x+1) - 2P(x)$.

$q(n) = P(n+1) - 2P(n) = 2^{n+1} - 2 \cdot 2^n = 0$.

$\Rightarrow q(x) = 0 \Rightarrow \boxed{P(x+1) = 2P(x)}$

$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$

Coef. dir. $\quad 2P(x) = 2a_n$

$P(x+1) = a_n (x+1)^n + a_{n-1}(x+1)^{n-1} + \dots + a_0$

$= a_n x^n +$ Roba di grado al più $n-1$

$\Rightarrow$ coef dir è a_n

$a_n = 2a_n \Rightarrow a_n = 0 \Rightarrow \boxed{P(x) = 0}$

Per x suff. grande $\quad P(x) < 2^x$

Assumo esista P di grado $n \Rightarrow P(i) = 2^i$ per $i = 0 \dots n$

$\Rightarrow P$ è unico e lo scrivo.

Lo valuto in $n+1$ e verifico $P(n+1) \neq 2^{n+1}$.

Non fidatevi della dim. dell' esistenza del MCD.

$$a(x) = b(x)\cdot q(x) + r(x)$$
$$(a(x), b(x)) = (b(x), r(x))$$

Es. 11 pag. 23

$$P(z) = \alpha (z-\lambda_1)(z-\lambda_2) \ldots (z-\lambda_{2002})$$

$P_1, P_2, \ldots, P_{2002}$ t.c. $P \mid P_{2002}$

$$P_{2002}(\lambda_i) = 0 \qquad i = 1, \ldots, 2002$$

$$P_{2002}(x) = P_{2001}(x)^2 - a_{2002}$$

$$0 = P_{2002}(\lambda_i) = P_{2001}(\lambda_i)^2 - a_{2002}$$

$$P_{2001}(\lambda_i)^2 = \text{cost} \qquad i = 1, \ldots, 2002$$

Dimostro per induzione su k, che dati $\lambda_1, \ldots, \lambda_{k+1}$ complessi distinti riesco a trovare $a_1, \ldots, a_k$ t.c. $P_k(\lambda_i)^2 = \text{cost}$ $\quad i = 1, \ldots, k+1$.

?
$$\begin{cases} P_k(\lambda_i) = 0 & i = 1, \ldots, k \\ P_{k+1}(\lambda_i) = P_k(\lambda_i)^2 - a_{k+1} \end{cases}$$
NO

$\boxed{k=1}$

$$P_1(z) = z - a_1$$
$$(\lambda_1 - a_1)^2 = (\lambda_2 - a_1)^2$$

$$\lambda_1 - a_1 = a_1 - \lambda_2 \longrightarrow a_1 = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}$$

Passo induttivo $\quad k \to k+1$

Ho già $a_1, \ldots, a_k$ t.c.
$$P_k(\lambda_i)^2 = \text{cost} \qquad i = 1, \ldots, k+1$$

$$P_{k+1}(\lambda_i) = \underbrace{P_k(\lambda_i)^2}_{\text{cost}} - a_{k+1} \qquad i=1,\dots,k+1$$

$$P_{k+1}(\lambda_i)^2 = \text{cost} \qquad i=1,\dots,k+1$$

$$P_{k+1}(\lambda_{k+2})^2 = P_{k+1}(\lambda_1)^2$$

$$\left(P_k(\lambda_{k+2})^2 - a_{k+1}\right)^2 = \left(P_k(\lambda_1)^2 - a_{k+1}\right)^2$$

deve valere $P_k(\lambda_{k+2})^2 - a_{k+1} = a_{k+1} - P_k(\lambda_1)^2$

$$\rightsquigarrow \quad a_{k+1} = \frac{P_k(\lambda_1)^2 + P_k(\lambda_{k+2})^2}{2}$$

ok