Algebra 3

Titolo nota 05/09/2014

$a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$

per ricorrenza

$$\begin{cases} S_n = n + S_{n-1} \\ S_1 = 1 \end{cases} \qquad S_n = \sum_{i=1}^{n} i$$

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$1\ 2\ 3\ \dots\ n+1$

$(x,y) \mid x<y$ quante sono?

$\{1, \dots, n+1\}^2$

Risposta 1

$$\binom{n+1}{2}$$

S_n =

Risposta 2

$n + n-1 + {}$
$+ n-2 + \dots + 1$
$= \sum_{1 \le i \le n} i$

Altro metodo:

telescopica

$$(n+1)^2 = \sum_{i=0}^{n} (i+1)^2 - i^2$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \cancel{i^2} + 2i + 1 - \cancel{i^2} = 2S_n + n + 1$$

$$\to S_n = \frac{(n+1)(n+\cancel{1}-\cancel{1})}{2}$$

Adesso so fare $\sum_{i=1}^{n} i^k$

per qualunque k!

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = q_n$$

$$(n+1)^3 = \sum_{i=0}^{n} (i+1)^3 - i^3 =$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \cancel{i^3} + 3i^2 + 3i + 1 - \cancel{i^3}$$

$$= 3q_n + 3S_n + n + 1$$

$$\rightarrow q_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\#\{(x,y,z) \mid x < y, z\} = \sum_{i=1}^{n} i^2$$

$$1 \leq x, y, z \leq n+1$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = 2\binom{n+1}{3} + \binom{n+1}{2}$$

→ Somma di succ. aritmetiche $(x_n = x_{n-1} + a)$

Somma di succ. geometriche

$$x_n = x_0 a^n \qquad x_n = a\, x_{n-1}$$

$$g_n = \sum_{i=0}^{n} x_i = x_0 \qquad 1 + x + x^2 + \dots + x^n = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}$$

$$g_{n+1} = g_n + \underbrace{x_0 a^{n+1}}_{= x_{n+1}}$$

$$g_{n+1} = a g_n + x_0$$

$$g_n(a-1) = x_0(a^{n+1} - 1)$$

$$\rightarrow g_n = x_0 \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1}$$

Geometrica "shiftata"
traslata

$$x_{n+1} = a x_n + b \qquad x_0 = c$$

IDEA! $\underbrace{(x_{n+1} + \alpha)}_{y_{n+1}} = a\underbrace{(x_n + \alpha)}_{y_n}$

$$-\alpha + a\alpha = b \rightarrow \alpha = \frac{b}{a-1}$$

$$y_n = a^n y_0 = a^n (x_0 + \alpha) =$$

$$= a^n \left(x_0 + \frac{b}{a-1}\right)$$

$$x_n = y_n - \alpha = a^n\left(x_0 + \frac{b}{a-1}\right) - \frac{b}{a-1}$$

SUCCESSIONI PER RICORRENZA LINEARE

$$* \quad x_{n+1} = a x_n + b x_{n-1} \ (+c)$$

$$x_0, \ x_1$$

"proviamo" sol. del tipo $\lambda^n = x_n$.

$$\lambda^{n+1} = a\lambda^n + b\lambda^{n-1}$$

$$\boxed{\lambda^2 = a\lambda + b}$$

$\rightarrow$ λ_1, λ_2 sono sol dell eq caratteristica $\Rightarrow x_n = \lambda_i^n$ sodolisfa $*$

diverse

$\rightarrow$ $p\lambda_1^n + q\lambda_2^n$ soddisfa $*$

$\forall p, q$

$\rightarrow$ $p + q = x_0 \qquad p\lambda_1 + q\lambda_2 = x_1$

$\rightarrow$ trovo sol. in p e q

p', q'

$$\rightarrow x_n = p' \lambda_1^n + q' \lambda_2^n$$

PROBLEMA: e se c'è una sola radice doppia dell'eq. caratteristica?

(Se $x_1 = \lambda x_0$ ok, ma altrimenti?)

Ma anche $n\lambda^n = x_n$ soddisfa*!

$$(n+1)\lambda^{n+1} \overset{?}{=} n\lambda^n a + (n-1)\lambda^{n-1} b$$

$$\lambda^{n+1} \overset{?}{=} -\lambda^{n-1} b$$

$$\lambda^2 = -b$$

!

è il prodotto delle radici $= \lambda \cdot \lambda$

Eq. $p\lambda^0 + q \cdot 0 \cdot \lambda^0 = x_0$

$$p = x_0$$

$$x_0\lambda + q\lambda = x_1 \rightarrow q = \frac{x_1 - x_0\lambda}{\lambda}$$

- si generalizza per $x_{n+m} = a x_{n+1} + b x_{n+2} + c x_{n+3} + \dots$

- e se l'eq di II grado ha $\Delta < 0$? Nessun problema...

EQUAZIONI FUNZIONALI

$f : A \rightarrow B$ che soddisfa ...

① $f: \mathbb{R} \circlearrowleft \mid f(x)f(y) = xy \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$

"specificare" e' eq. sostituendo x e y particolari.

$$f(x)^2 = x^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$f(x) = c_x x$$

$$c_x = \pm 1$$

$$c_x x \, c_y y = xy \quad \forall x, y$$

$$c_x c_y = 1 \quad \forall x, y$$

$c_x = 1 \ \forall x$ oppure $c_x = -1 \ \forall x$

$\rightarrow$ sol. $f(x) = \pm x$

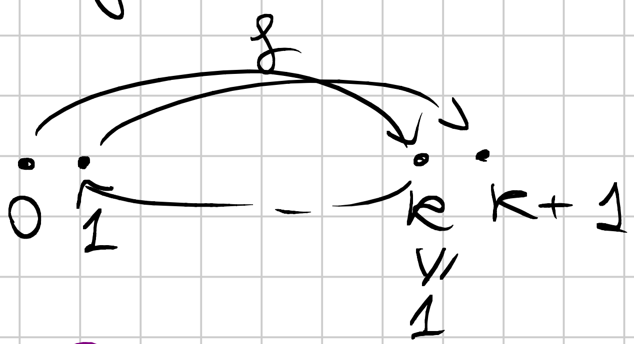
che soddisfano ① $\rightarrow$ HO FINITO.

② $f(f(n)) = n + 1 \quad f: \mathbb{N} \circlearrowleft$

f è INIETTIVA

($f(g(x))$ iniettiva $\rightarrow g$ iniettiva

suriettiva $\rightarrow f$ suriettiva)



$0 \rightarrow k \rightarrow 1 \rightarrow k+1 \rightarrow 2$

$\rightarrow k+2 \rightarrow \dots \rightarrow k$

$k + k - 1$

$\rightarrow$ assurdo perché era iniettiva

Altra dim. $f(f(f(n))) = f(n+1)$

$= f(n) + 1$

$$\rightarrow f(n) = f(0) + n$$ induzione

dentro è eq.

$$f(f(0)+n) = n+1$$

$$2f(0) + n = n+1$$

$$\rightarrow f(0) = 1/2$$

assurdo!

NB. Se avessi cercato funzioni : $\mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ avrei trovato $f(n) = 1/2 + n \ldots$

(3) $f(x+f(y)) + f(f(x)+f(y))$
$= 2x + 2y + 5$

$f : \mathbb{R} \circlearrowleft$

- IDEA! Scambio x e y.

$$f(x+f(y)) = f(y+f(x))$$

- IDEA! y a sx compare solo "filtrata" tramite f; supp. $a \neq b \mid f(a) = f(b)$

Se metto $y = a, b$ LHS è uguale; ma RHS è diverso! Assurdo.

$\rightarrow$ è INIETTIVA!

$$x + f(y) = y + f(x)$$

$$y = 0 \rightarrow f(x) = x + f(0)$$

SOSTITUISCO $x + y + 2f(0) + x + y + 3f(0)$

$$= 2x + 2y + 5$$
$$\leftrightarrow f(0) = 1$$

SOLUZIONE $f(x) = x + 1$

4 $\quad f(x) - f(x + f(y)) = y \quad f: \mathbb{R} ?$

$f(x) = f(x + f(0))$

$a, b \mid f(a) = f(b)$

$$f(x) - f(x + f(a)) = a$$
$$f(x) - f(x + f(b)) = b$$

$f(a) = f(b) \Rightarrow a = b$

è INIETTIVA

$\longrightarrow f(0) = 0$

$x = 0 \longrightarrow f(f(y)) = -y$

$x = y \quad f(f(x)) - f(f(x) + f(y)) = y$

$f(-x) = -f(x)$

$\Rightarrow -x - y = f(f(x) + f(y))$

$f(-x - y) = f(f(f(x) + f(y)))$

$f(-x-y) = -f(x) - f(y)$

$\longrightarrow f(x + y) = f(x) + f(y)$

$x \in \mathbb{R}$

EQUAZIONE DI CAUCHY $: \mathbb{R}$ 5

$f(x) = kx$

$f(f(y)) = -y = k^2 y$:(non c'è un k reale che vada bene $\rightarrow$ NON ha sol.

$\rightarrow f(0) = 0 \quad (\text{sost } x=0, y=0)$

$f(2) = 2f(1)$

induzione

$f(3) = 3f(1) \ldots f(n) = nf(1)$

$f(nx)\ nf(x)$

su $\mathbb{N}$

su $\mathbb{Z}$: $\overset{0}{\overset{\shortparallel}{f(0)}} = f(n-n) =$

$= f(n) + f(-n)$

$\rightarrow f(-n) = -f(n) =$

$= -nf(1)$

su $\mathbb{Q}$ $\quad f\left(\frac{k}{n} n\right) = nf\left(\frac{k}{n}\right)$

$\overset{\shortparallel}{f(k)} = kf(1)$

$\rightarrow f(k/n) = k/n\, f(1)$.

su $\mathbb{Q}$ l'unica sol. sarebbe

$f(x) = kx$

Ma è l'unica sol. su $\mathbb{R}$??

NO. Però, lo è ad esempio se

- $\rightarrow f$ è continua
- $\rightarrow f$ continua "in un punto"
- $\rightarrow f$ monotona
- $\rightarrow f$ limitata dall'alto o dal basso su un intervallo.
- $\rightarrow f$ non abbia il grafico "denso"

ESERCIZI (fatene qualcuno per controllare se avete capito): 89, 92, 87

PROBLEMI dal libretto 2, 6, 8, 10 ← + difficile

→ trovare le $f:\mathbb{R}\circlearrowleft$ | $f(f(x+y)) =$
$= f(x+y) + f(x)f(y) - xy$

Γ

$f:\mathbb{R}\circlearrowleft$ $\quad f(f(x)) = f(x)+8$

$f \geq 0$
$\forall x \geq 0$

quanto fa $f(2002)$ come minimo?

$2002 \to 0$
$\equiv 2\,(8) \longrightarrow 0$
altri $x \longrightarrow x+8$

$f(f(x))$
$f(0) = f(x) + 8 = 8$

6.

$x_{n+1} - x_n =$

$$= 6x_n - 2\sum_{i=0}^{n} x_i - 6x_{n-1} + 2\sum_{i=0}^{n-1} x_i$$

$\longrightarrow$ $x_{n+1} - x_n = 6x_n - 2x_n - 6x_{n-1}$

sol. 2, 3
$\rightarrow$ $p2^n + q3^n$

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x) + 2f(y)$$

$\rightarrow f(0) = 0$; $f(-x) = f(x)$;

$$f(2x) = 4f(x)$$

SCOMMETTO $f(nx) = n^2 f(x)$

$\rightarrow$ faccio tutto $\mathbb{Z}$

$$f(n) = n^2 f(1)$$

poi faccio $\mathbb{Q}$ $f\left(n\frac{k}{n}\right) = n^2 f(k/n)$

$$\overset{\shortparallel}{k^2 f(1)}$$

$$f(x) = x^2 f(1)$$

---

problema 10

$$f(xf(x) + f(y)) = f(x)^2 + y$$

$\rightarrow$ $x = 0$ $f(f(y)) = f(0)^2 + y$

$\rightarrow$ f è BIGETTIVA

$$\exists \alpha \mid f(\alpha) = 0$$

$x = \alpha$ $f(f(y)) = y \rightarrow f(0) = 0$

$x = f(z)$ $f(f(z)z + f(y)) =$

$$z^2 + y = f(z)^2 + y$$

$$\rightarrow f(z)^2 = z^2$$

$$\rightarrow f(z) = \underset{\pm 1}{c_z}\, z$$

SCOMMESSA: vanno bene SOLO

$f(x) = x$ e $f(x) = -x$

Voglio dire che è assurdo avere $a, b \neq 0$

t.c. $f(a) = a$ $f(b) = -b$

$f(a^2 - b) = a^2 + b$

$\left(\begin{array}{ll} a^2 - b & \longrightarrow b = 0 \\ -a^2 + b & \longrightarrow a^2 = 0 \\ & \rightarrow a = 0 \end{array} \right.$

$\rightarrow$ ASSURDO

$f(x) = x$ e $f(x) = -x$ SODDISFANO e sono le uniche soluzioni.