Stage Senior 2014 – Livello Basic

Stampato integrale delle lezioni

Autori vari

Indice

P - BASIC: Induzione & Pigeonhole - Sem

Titolo nota 01/09/2014

Ingredienti: proposizione a proposito di un generico intero.

↳ di solito: per tutti gli interi da un certo punto in poi

Scopo: dimostrare la proposizione per un generico intero

Ricetta:
- Passo base: la propos. contiene $\forall n \geq n_0$
- Passo induttivo

↓

Dimostro che SE la propos. è vera per un qualche n allora è vera anche per $n+1$.

Risultato: La propos. è vera $\forall n \geq n_0$

Oss: Si può fare anche all'indietro!!

Es: $0 + 1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

passo base: $n = 1$ $\quad 1 = \frac{1 \cdot 2}{2}$ ok.

passo induttivo: Voglio dim che $\underbrace{1 + 2 + \ldots + n}_{= \frac{n(n+1)}{2}} + (n+1) \overset{?}{=} \frac{(n+1)(n+2)}{2}$

per ipotesi induttiva

$\Rightarrow \frac{n(n+1)}{2} + n + 1 \overset{?}{=} \frac{(n+1)(n+2)}{2}$ che è vero, basta fare il conto!!

Es: $1 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(2n+1)(n+1)}{6}$

Es: $1+2^3+3^3+\dots+n^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$

Es (disug. di BERNOULLI) $x > -1$ reale, $n \in \mathbb{N}$ $(\forall n \geq 0)$

allora $(1+x)^n \geq 1+nx$

dim: induz. su n PB: $n=0$ $(1+x)^0 = 1 \geq 1+0=1$ ok.

PI: Voglio dim $(1+x)^{n+1} \overset{?}{\geq} 1+(n+1)x$ H

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)^n \cdot (1+x), \quad \underbrace{(1+x)^n}_{\geq 1+nx} \text{ per ip. ind.}$$

$$(1+x)^{n+1} \underset{(=)}{\geq} (1+x)^n \cdot (1+x) \geq (1+nx)(1+x) = 1+nx+x+nx^2 =$$

$$= 1+(n+1)x+\underbrace{nx^2}_{\geq 0} \geq 1+(n+1)x. \text{ ok.}$$

Es: $n^2 \leq 2^n$ $n=0 \to 0 \leq 1$ ok
$n=1 \to 1 \leq 2$ ok $3^2=9 \leq 2^3=8$

PI: Voglio $(n+1)^2 \overset{?}{\leq} 2^{n+1}$

$$(n+1)^2 = \underbrace{n^2}_{\leq 2^n \text{ ip. ind.}}+2n+1 \leq 2^n+\underbrace{2n+1}_{\leq 2^n} \leq 2\cdot 2^n = 2^{n+1} \quad \leftarrow \text{no!}$$

$2n+1 \leq 2^n$ ← FALSA se la voglio $\forall n$

$$\boxed{2n+1 \underset{\boxed{n \geq 3}}{\leq} (n-1)n+1 = n^2-n+1 \leq n^2}$$

$$n^2+2n+1 \underset{\text{ip. ind.}}{\leq} 2^n+2n+1 \underset{n\geq 3}{\leq} 2^n+n^2 \underset{\text{ip. ind.}}{\leq} 2^n+2^n \quad \text{se } n \geq 3$$

PI è vero per $n \geq 3$

però come PB devo prendere $n_0 \geq 4$ $\quad n_0 = 4$ funziona

2^n, n^2

1, 2, 4, 8, 16

0, 1, 4, 9, 16

$16 \leq 2^4 = 16.$

Definizioni ricorsive

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} i} = \boxed{\frac{n(n+1)}{2}}$$

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n = \prod_{i=1}^{n} i$$

$[0! = 1]$

$1! = 1 \quad \leftarrow$ "PB"

$n! = n \cdot (n-1)! \quad \leftarrow$ "PI"

Es: $\dfrac{(2n)!}{n!\,n!} \leq 4^n$ $\qquad$ PB: $n = 1 \quad 2 \leq 4$

PI:
$$\frac{(2n+2)!}{(n+1)!\,(n+1)!} = \frac{(2n)!}{n!\,n!}\,\frac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1)^2} \underset{\text{ip. ind.}}{\leq} 4^n \cdot \frac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1)^2} =$$

$$= 4^n\,\frac{2n+1}{n+1} \cdot 2 = 4^n\left(2 - \frac{1}{n+1}\right) \cdot 2 \leq 4^n \cdot 2 \cdot 2 = 4^{n+1} \quad \text{ok.}$$

$\dfrac{1}{n+1} \geq 0$

Es che non viene per induzione: $\dfrac{(2n)!}{n!\,n!} \leq \dfrac{4^n}{\sqrt{3n}} \quad \forall n \geq 1$

Quella che funziona: $\dfrac{(2n)!}{n!\,n!} \leq \dfrac{4^n}{\sqrt{3n+1}} \quad \forall n \geq 1$

Quella figa: $\dfrac{(2n)!}{n!\,n!} \leq \dfrac{4^n}{\sqrt{\pi n + 1}}$

$\quad \| $

$\dbinom{2n}{n}$

Fibonacci: 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55

$$\begin{cases} a_0 = 0 \\ a_1 = 1 \\ a_2 = 1 \\ a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \quad \forall n \geq 3 \end{cases}$$

$a_1 = 1$, $a_2 = 1$ ← PB

$\forall n \geq 3$ ← PI

Se la propos. è vera per $n-1$ e n, allora è vera per $n+1$

Es falso: Tutti i fibonacci $(a_n,\ n \geq 0)$ sono pari

$a_0 = 0$ è pari ← Passo (base) Troppo corto.

Se a_{n-1}, a_n sono pari, allora $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$ è pari.

Induzione estesa: (Induzione forte)

- Passo base: $n = n_0$
- Passo induttivo: se la propos. è vera per $n_0, n_0+1, \dots, n$ allora è vera per $n+1$.

Es: Fattorizzazione in fattori primi (esistenza)

Es: Ogni numero naturale si può scrivere come somma di Fibonacci non consecutivi

37 il + grande Fib ≤ 37 è 34

$\Rightarrow 37 = 34 + 3$

38 $\longrightarrow$ 34 $\quad 38 - 34 = 4 \longrightarrow 3 \longrightarrow 4 - 3 = 1$

$34 + 3 + 1$

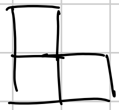
dim: Suppongo di saperlo fare per $1, 2, \dots, n$.

Prendo $n+1$ e sia F il più grande Fib. $\leq n+1$.

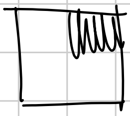
Ora $m = n+1 - F \leq n \Rightarrow$ lo so scrivere come somma di Fib. non consec.

$m = F' + \dots$ Voglio escludere che F e F' siano Fib. consec., se lo fossero $F+F' =$ fib. e $F+F' \le n+1 \Rightarrow F' = 0 \Rightarrow m = 0$

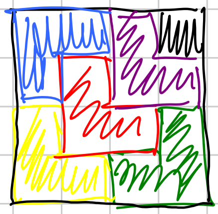
Es: Ogni scacchiera $2^n \times 2^n$ senza un angolo si tassella con trimini a L



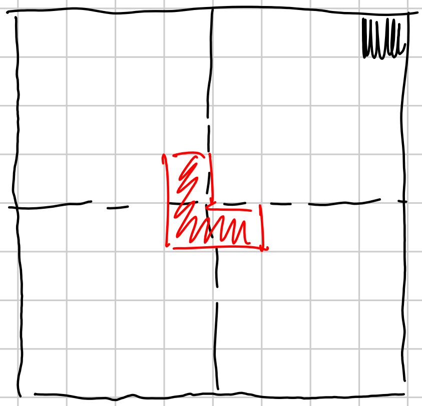
$n=1$



$n=2$



$n=3$

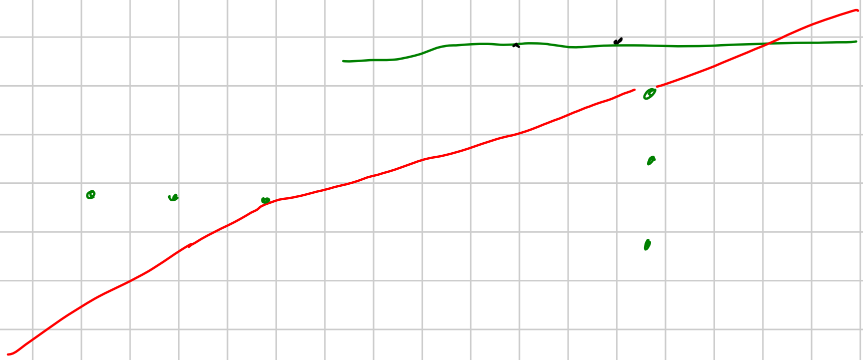


Es: $f(x) = \frac{x}{x+1}$

$f(f(x)) = \frac{x}{2x+1}$

$\underbrace{f(f(\cdots f}_{n}(x)\dots)) = \frac{x}{nx+1}$

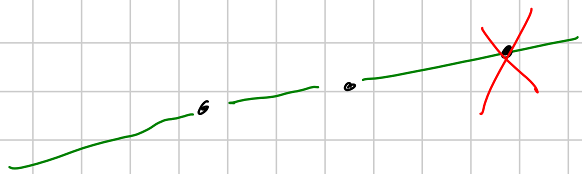
Es: Dati n punti nel piano tali che comunque presine 2, la retta che li passa contiene un terzo punto (degli n), dimostrare che sono tutti allineati



Dim (SBAGLIATA): PB $n=3$ ovvio.

PI: Prendo $n+1$ punti, ne levo 1, gli n che restano stanno su una retta per ip. ind.
Ma allora l'$n+1$-esimo sta pure lui sulla retta.

Problema: Non è detto che togliendo 1 punto i restanti n soddisfino ancora l'ipotesi del Teorema.



Pigeonhole: Se ho $n+1$ oggetti e n cassetti allora c'è almeno 1 cassetto con almeno 2 oggetti.

•) Tra di voi (23) ci sono almeno 2 persone nate nello stesso mese

•) Tra di voi ci sono almeno 2 persone che qui hanno lo stesso numero di conoscenti.

$0, 1, \ldots, \cancel{23}\ 22$ ← nessuno conosce davvero se stesso.

non ci possono essere contemporaneamente 0 e 22 — o c'è un solitario o c'è un popolare

$\Rightarrow$ ho 22 possibilità e 23 persone $\Rightarrow$ ok.

Es: Comunque presi $n+1$ interi tra 1 e $2n$, ce ne sono 2 di cui uno divide l'altro.

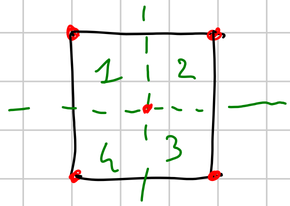
$2^a \cdot d$ ← dispari

<u>Cassetto</u> $=$ { numeri della forma $2^a \cdot d$ per un certo fissato d }

1 3 5 7 9 ← <u>n cassetti</u>
2 6
4 12
8
16
32
64

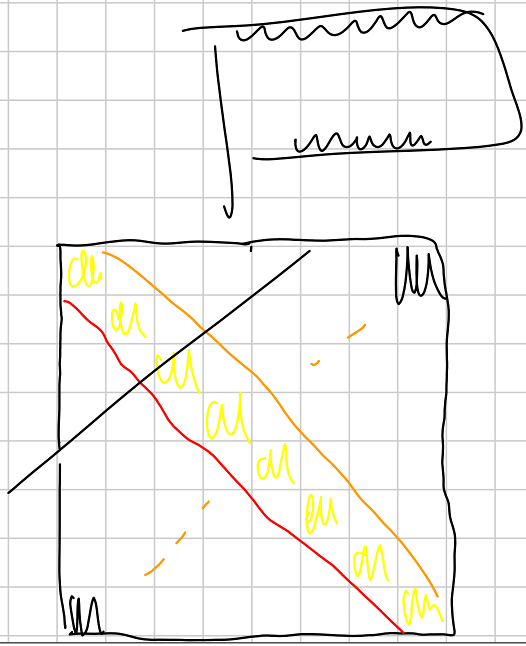
ho $n+1$ numeri
$\Rightarrow$ 2 sono della forma $2^a \cdot d$, $2^b \cdot d$

<u>ES</u>: Dati 5 pti nel quadrato di lato 1 ce ne sono 2 che distano meno di $\frac{\sqrt{2}}{2}$ $(\leq)$



<u>ES</u>. Quanti alfieri al massimo posso mettere su una scacchiera (8×8) senza che siano in presa tra di loro.

Fino a 14 (8 su un lato, 6 sull'altro) si fa



≤ 14

A1 basic Giada

Titolo nota 02/09/2014

Complessi + Polinomi

Complessi

$$\mathbb{C} = \{a+ib : a, b \in \mathbb{R}\}$$

$$z = a+ib = \rho(\cos\theta + i\sin\theta) = \rho e^{i\theta}$$

Operazioni

- SOMMA regola del parallelogramma
- MOLTIPLICAZIONE rotazione + omotetia
- MODULO $|z| = \rho = \sqrt{a^2+b^2}$
- DIVISIONE $\frac{a+ib}{c+id} = \frac{a+ib}{c+id} \cdot \frac{c-id}{c-id} = \frac{(ac+bd)}{c^2+d^2}$ $\underline{+i\,(bc-ad)}$
- INVERSO $\frac{1}{a+ib} = \frac{a-ib}{a^2+b^2} = \frac{\overline{a+ib}}{|a+ib|^2}$
- CONIUGIO $z = a+ib$
  $\bar{z} = a-ib$

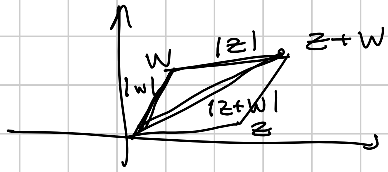
Proprietà

- $z \cdot \bar{z} = (a+ib)(a-ib) = a^2+b^2 = |z|^2$
- $\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}$
- $\overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w}$
- $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$ $\qquad z = a+ib \qquad w = c+id$

$$\sqrt{(ac-bd)^2 + (ad+bc)^2} = \sqrt{a^2+b^2} \cdot \sqrt{c^2+d^2}$$

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2) = (ac-bd)^2 + (ad+bc)^2$$

- $|z+w| \leq |z| + |w|$



Formule di de Moivre

$$[\underbrace{\rho(\cos\theta + i\sin\theta)}_{= z}]^n = [\rho e^{i\theta}]^n = \rho e^{i\theta} \cdot \ldots \cdot \rho e^{i\theta}$$

$$\boxed{\rho_1 e^{i\theta_1} \cdot \rho_2 e^{i\theta_2} = \rho_1\rho_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)}}$$

$$= \rho^n e^{in\theta}$$

$$= \rho^n [\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)]$$

Polinomi

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

$a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ coeff. $\in \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}$

$n = \deg p$

p è monico se $a_n = 1$

Divisione con resto

Dati a, b pol. esistono q, r t.c.
$a(x) = b(x) \cdot q(x) + r(x)$ $\quad \deg r < \deg b$

[Induzione su $\deg a$]

Ruffini
$b(x) = x - \alpha$ $\qquad r(x) = a(\alpha)$

$a(x) = (x-\alpha)\, q(x) + r$

Cor

Se α è radice di $p(x)$, cioè $p(\alpha)=0$,

$\Longrightarrow$ $x-\alpha \mid p(x)$

Cor

Un polinomio di grado n ha al più n radici.

$n=\deg p$

$p(x) = (x-\alpha)\, q(x)$

ha al più grado $n-1$

Criterio di identità fra polinomi

Se p, q sono due polinomi t.c. $\deg p, \deg q \leq n$ e p e q coincidono su almeno $n+1$ valori, allora sono uguali (cioè hanno gli stessi coeff.)

$p(x)-q(x)$ ha grado $d \leq n$

$\Longrightarrow$ ha al più n radici

Ma detti $x_1, \dots, x_{n+1}$ i valori in cui coincidono p, q

abbiamo $p(x_i)-q(x_i)=0$.

$\Longrightarrow$ x_i è radice di $p(x)-q(x)$ $\forall\ i=1,\dots,n+1$

$\Longrightarrow$ $p(x)-q(x) \equiv 0$

Fattorizzazione unica

I polinomi a coeff. interi / raz / reali / compl. hanno la fattorizzazione unica.

Cioè dato $p(x)$, esistono unici $f_1, f_2, \dots, f_k$ pol. irriducibili t.c. $p(x) = f_1(x) \cdot \ldots \cdot f_k(x)$.

MCD

<u>Def</u>: $a(x), b(x)$ pol. $MCD(a(x), b(x)) = (a(x), b(x))$
è $d(x)$ monico t.c. $d(x) \mid a(x)$ e $d(x) \mid b(x)$
e $\forall\ e(x) \mid a(x)$ e $e(x) \mid b(x)$, $e(x) \mid d(x)$.

<u>Dim</u> Per induzione sul deg b, utilizzando la divisione euclidea.
$a(x) = b(x) \cdot q(x) + r(x)$

$(a(x), b(x)) = (a(x), r(x)) \leftarrow$
deg $r <$ deg b

resto di $a(x)/b(x)$

Algoritmo euclideo $(a(x), b(x)) = (a(x), r(x))$

Bézout

Dati $a(x), b(x)$ t.c. $(a(x), b(x)) = d(x)$, esistono $h(x), k(x)$ t.c. $a(x) \cdot h(x) + b(x) \cdot K(x) = d(x)$

<u>Dim</u> Per induzione su deg b

$(a(x), b(x)) = (a(x), r(x))$

Per induzione, dato che deg $r <$ deg b so trovare h', k' t.c.
$a(x)\, h'(x) + r(x) \cdot k'(x) = d(x)$
$a(x) = b(x) \cdot q(x) + r(x)$ deg $r <$ deg b

$a(x)\, h'(x) + (a(x) - b(x)\, q(x))\, k'(x) = d(x)$

$h(x) = h' + k'$ $k(x) = -q\, k'$

Interpolazione

(x_i, y_i) $i = 1, \dots, n$ $x_i \neq x_j$ per $i \neq j$
e voglio trovare $p(x)$ t.c. $p(x_i) = y_i$.

Ha soluzione e $\deg p(x) = n-1$.

Interpolazione di Lagrange

$$p_i(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)\cdot\ldots\cdot(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\ldots\cdot(x-x_n)}{(x_i-x_1)(x_i-x_2)\ldots(\quad)(\quad)\ldots(\quad)}$$

$p_i(x_i) = 1$ $p_i(x_j) = 0$ $j \neq i$

$$p(x) = \sum_{i=1}^{n} y_i\, p_i(x)$$ ✓

$\deg p = n-1$

Polinomi a coeff. complessi

Teorema (difficile): $p(x)$ a coeff. in $\mathbb{C}$, $\deg p \geq 1$, allora $p(x)$ ha (almeno) una radice (complessa).

Teorema fondamentale dell'algebra:
Ogni $p(x)$ a coeff. complessi, si scompone in fattori irriducibili di grado 1.

Dim Induzione + teorema sopra + Ruffini (div. euclidea)

$\deg p = n = 1$

$\deg p = n > 1$ p ha almeno una radice α
$p(x) = (x-\alpha)\,q(x)$
$\deg q = n-1$
$\Rightarrow$ per ipotesi induttiva q si scompone in fattori di grado 1

Polinomi a coefficienti reali

x^2+1 $\qquad$ $x^2=-1$ $\qquad$ $i, -i$ sono radici

$$x^2+1=(x-i)(x+i)$$

Ogni polinomio a coeff. reali si scompone in fattori irriducibili di grado 1 o di grado 2.

Dim $\quad$ Per induzione sul grado di p.

Lemma $\quad p(z)=0 \implies p(\bar{z})=0$

$$\Downarrow$$

$$a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0 = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\overline{a_n z^n + \dots + a_0} = 0$$

$$\parallel$$

$$\overline{a_n}\,\bar{z}^n + \dots + \overline{a_1}\,\bar{z} + \overline{a_0}$$

$$\parallel$$

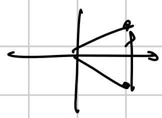
$$a_n \bar{z}^n + \dots + a_1 \bar{z} + a_0 = p(\bar{z})$$

$\deg p = 0$ $\quad$ ok

Se vale per $\deg q \leq n \implies \deg p = n+1$
(INDUZIONE FORTE)

$p(x)$ ha almeno 1 radice α (complessa).

- α reale $\quad p(x) = (x-\alpha)\,q(x)$ $\quad$ ok
- α complessa $\qquad \bar{\alpha}$ è radice
  $(x-\alpha) \mid p(x) \qquad (x-\bar{\alpha}) \mid p(x)$



$(x-\alpha)(x-\bar{\alpha}) \mid p(x)$

$$x^2-(\alpha+\bar{\alpha})x+\alpha\bar{\alpha} = x^2-2\operatorname{Re}\alpha\, x+|\alpha|^2$$

$\alpha\bar{\alpha}=|\alpha|^2$

$\alpha+\bar{\alpha} = 2\operatorname{Re}\alpha$

$$p(x)=(x^2-2\operatorname{Re}\alpha\, x+|\alpha|^2)\, q(x)$$

$\deg q = n-1$

<u>Cor</u>: Un polinomio a coeff. reali di grado disp, ha almeno una radice reale.

$$p(x)=p_1(x)\cdot\ldots\cdot p_k(x)$$

$$\deg p=\sum_{i=1}^{k}\deg p_i$$

$\mathbb{Z}[x]=\{$polinomi a coeff. in $\mathbb{Z}\}$

Polinomi a coeff. razionali

Lemma di Gauss: Un polinomio a coeff. interi è riducibile in $\mathbb{Q}[x]$ sse è riducibile in $\mathbb{Z}[x]$

$$p(x)=a(x)\,b(x)=a'(x)\cdot b'(x)$$

coeff. razionali — coeff. interi

$$\frac{a_n}{b_n}x^n+\ldots+\frac{a_1}{b_1}x+\frac{a_0}{b_0}$$

Polinomi a coeff. interi

Lemma (della radice razionale) $p(x)=a_nx^n+\ldots+a_1x+a_0$ a coeff. interi e $\frac{q}{r}$ razionale (ridotto ai minimi termini) è radice di $p(x)$

$\Rightarrow q\mid a_0,\ r\mid a_n$

Dim $p\left(\frac{q}{r}\right)=0$ $\qquad a_n \frac{q^n}{r^n} + \dots + \frac{a_1 q}{r} + a_0 = 0$

$$\Downarrow$$

$$a_n q^n + \dots + a_1 q r^{n-1} + a_0 r^n = 0$$

$q \mid a_0 r^n \qquad r \mid a_n q^n$

$q \mid a_0 \qquad r \mid a_n$

Lemma Dato $p(x) \in \mathbb{Z}[x]$ e $a, b \in \mathbb{Z}$ (distinti)
vale $a-b \mid p(a)-p(b)$

Dim $a-b \mid a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1})$

$p(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$

$p(a)-p(b) = a_n(a^n - b^n) + \dots + a_1(a-b)$

$\Longrightarrow a-b \mid p(a) - p(b)$

Dim 2 $p(x) = (x-a)\, q(x) + p(a)$

$x = b \qquad p(b) = (b-a)\, q(b) + p(a)$

$(b-a)\, q(b) = p(b) - p(a)$

Formule di Viète

Relazione fra coeff. e radici

$p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \quad \leftarrow$ monico

$x^2 + a_1 x + a_0 = (x-\lambda_1)(x-\lambda_2) = x^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)x + \lambda_1\lambda_2$

$a_1 = -(\lambda_1 + \lambda_2)$

$a_0 = \lambda_1 \lambda_2$

In generale $\quad a_{n-1} = -(\lambda_1 + \dots + \lambda_n)$

$a_{n-2} = \sum_{i<j} \lambda_i \lambda_j = (\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \dots +)$

$\vdots$

$a_0 = (-1)^n \lambda_1 \dots \lambda_n$

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = (x-\lambda_1)\dots(x-\lambda_n)$$

$$= x^n - (\lambda_1 + \dots + \lambda_n)x^{n-1} + \left(\sum \lambda_i \lambda_j\right) x^{n-2} - \dots + (-1)^n \lambda_1 \dots \lambda_n$$

Grado 2 $\qquad \lambda_1^2 + \lambda_2^2 = (\lambda_1 + \lambda_2)^2 - 2\lambda_1\lambda_2$

In generale posso esprimere tramite le "espressioni sopra" ogni espressione simmetrica nelle radici.

$$\lambda_1\lambda_2^2 + \lambda_1\lambda_3^2 + \lambda_2\lambda_3^2 + \dots + (\lambda_1\lambda_2\lambda_3)^5$$

$S_k = \lambda_1^k + \lambda_2^k + \dots + \lambda_n^k \qquad k = 1, \dots, n-1$

$k \geq n \qquad p(\lambda_i) = 0 \qquad i = 1, \dots, n$

$$p(\lambda_i) = \lambda_i^n + \dots + a_1\lambda_i + a_0$$

$$\lambda_i^n = -\sum_{j=0}^{n-1} a_j \lambda_i^j \implies \lambda_i^k = -\sum_{j=0}^{n-1} a_j \lambda_i^{j+k-n}$$

$$S_k = \sum_{i=1}^n \lambda_i^k = \sum_{i=1}^n \left(-\sum_{j=0}^{n-1} a_j \lambda_i^{j+k-n}\right)$$

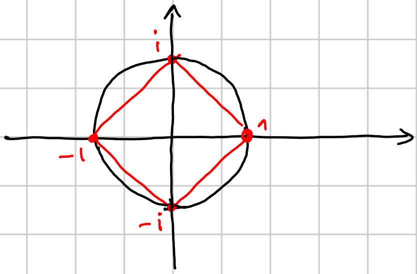
$$= -\sum_{j=0}^{n-1}\left(a_j \underbrace{\sum_{i=1}^n \lambda_i^{j+k-n}}_{S_{j+k-n}}\right)$$

$$= -\sum_{j=0}^{n-1} S_{k-(n-j)}\, a_j$$

Radici n-esime dell'unità

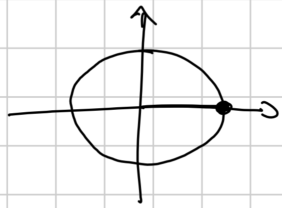
$x^n - 1 \qquad x^n = 1 \implies |x|^n = |x^n| = 1 \implies |x| = 1$

$$\underline{\underline{x^4-1}} = (x-1)(x+1)(x^2+1) \qquad 1,\,-1,\,i,\,-i$$



x^n-1 $\quad z$ radice $\quad z = e^{i\theta}$

$$1 = (e^{i\theta})^n = e^{in\theta} = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$$



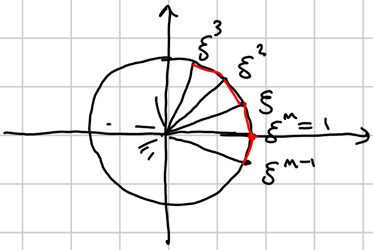
$$\Longrightarrow \begin{cases} \sin(n\theta) = 0 \\ \cos(n\theta) = 1 \end{cases} \Longrightarrow n\theta = 2\pi k$$

$$\Longrightarrow \theta = \frac{2\pi k}{n} \qquad \boxed{e^{i\frac{2\pi k}{n}}}$$

$k = 1, \dots, n-1, n$

$$\xi = e^{\frac{2\pi i}{n}}$$

$$e^{\frac{2\pi i k}{n}} = \left(e^{\frac{2\pi i}{n}}\right)^k = \xi^k$$



vertici del poligono regolare

Esercizi

p. 13

es. 69, 70, 72

p. 23

es. 3, 7, 8, 10, 11

$f(n) = 1^k + 2^k + \dots + n^k$ (per $n \geq 1$ intero e $k \geq 0$ intero)

f è un polinomio?

Sia P polinomio che assume valori interi sugli interi.
Cosa sapete dire sul coefficiente direttivo? ← è intero?
il denominatore come è? è razionale?

Esistono polinomi reali tali che

$P(x) \geq 2^x$ per ogni x intero positivo ?

e tali che $p(x+1) \geq 2p(x)$?

Il polinomio $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ è a coef interi

con $p^2 \nmid a_0$ e $p \mid a_i$ $\Rightarrow$ è irriducibile
(p primo)

Es 73

Sia p polinomio $p(n) = 1^5 + 2^5 + \dots + n^5$; $(n \geq 1)$

quanto vale $p(-1)$ e in generale $p(-n)$?

Considero $q(x) = p(x+1) - p(x)$ $\quad q(n) = (n+1)^5 \quad \forall n \geq 1$

$\Rightarrow q(x) = (x+1)^5 \quad \Rightarrow p(x+1) - p(x) = (x+1)^5 \Leftarrow$

in -1 $\quad x = -1 : \; p(0) - p(-1) = 0$

$x = 0 : \; p(1) - p(0) = 1 \qquad \underset{}{\overset{1}{\overset{\shortparallel}{p(1)}}} - p(-1) = 1$

$\Rightarrow p(-1) = 0$

in $-n$?
$$\begin{cases} p(1) - \cancel{p(0)} = 1^5 \\ \cancel{p(0)} - \cancel{p(-1)} = 0^5 \\ \cancel{p(-1)} - p(-2) = (-1)^5 \\ \vdots \\ p(\cancel{-n+1}) - p(-n) = (-n+1)^5 \end{cases}$$

sommo.

$p(\cancel{1}) - p(-n) = \cancel{1^5} + 0^5 + (-1)^5 + \dots + (-(n-1))^5$

$p(-n) = 1 + 2^5 + 3^5 - \dots + (n-1)^5 = p(n-1)$

$$\sum_{i=0}^{n} (i+1)^k = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} i^j = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \sum_{i=0}^{n} i^j$$

$\overset{\shortparallel}{\sum_{i=1}^{n+1} i^k}$

Chiamo $P_j(n) = 1^j + 2^j + \dots + n^j$

$$p_k(n+1) = \sum_{s=0}^{k} \binom{k}{s} p_s(n) = \left[\sum_{s=0}^{k-2} \binom{k}{s} p_s(n)\right] + k\,p_{k-1}(n) + p_k(n)$$

$$\boxed{(n+1)^k = \sum_{s=0}^{k-2} \binom{k}{s} p_s(n) + k\,p_{k-1}(n)}$$

INDUZIONE $\quad p_0(n) = n$ è un polinomio!

induttivo: $p_{k-1}(n) = \dfrac{(n+1)^k - \sum_{s=0}^{k-2} \binom{k}{s} p_s(n)}{k}$ polinomio

Es 7 $\quad \boxed{P(n) = 2^n}$ $\quad \forall n$ naturale?

$q(x) = P(x+1) - 2P(x)$.

$q(n) = P(n+1) - 2P(n) = 2^{n+1} - 2 \cdot 2^n = 0$.

$\Rightarrow q(x) = 0 \Rightarrow \boxed{P(x+1) = 2P(x)}$

$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$

Coef. dir. $\quad 2P(x) = 2a_n$

$P(x+1) = a_n (x+1)^n + a_{n-1}(x+1)^{n-1} + \dots + a_0$

$= a_n x^n +$ Roba di grado al più $n-1$

$\Rightarrow$ coef dir è a_n

$a_n = 2a_n \Rightarrow a_n = 0 \Rightarrow \boxed{P(x) = 0}$

Per x suff. grande $P(x) < 2^x$

Assumo esista P di grado $n \Rightarrow p(i) = 2^i$ per $i = 0 \dots n$

$\Rightarrow p$ è unico e lo scrivo.

Lo valuto in $n+1$ e verifico $p(n+1) \neq 2^{n+1}$.

Non fidatevi della dim. dell' esistenza del MCD.

$a(x) = b(x) \cdot q(x) + r(x)$

$(a(x), b(x)) = (b(x), r(x))$

Es. 11 pag. 23

$$P(z) = \alpha (z-\lambda_1)(z-\lambda_2) \dots (z-\lambda_{2002})$$

$P_1, P_2, \dots, P_{2002}$ t.c. $P \mid P_{2002}$

$$P_{2002}(\lambda_i) = 0 \qquad i = 1, \dots, 2002$$

$$P_{2002}(x) = P_{2001}(x)^2 - a_{2002}$$

$$0 = P_{2002}(\lambda_i) = P_{2001}(\lambda_i)^2 - a_{2002}$$

$$P_{2001}(\lambda_i)^2 = \text{cost} \qquad i = 1, \dots, 2002$$

Dimostro per induzione su k, che dati $\lambda_1, \dots, \lambda_{k+1}$ complessi distinti riesco a trovare $a_1, \dots, a_k$ t.c. $P_k(\lambda_i)^2 = \text{cost}$ $i = 1, \dots, k+1$.

? $\begin{cases} P_k(\lambda_i) = 0 & i = 1, \dots, k \\ P_{k+1}(\lambda_i) = P_k(\lambda_i)^2 - a_{k+1} \end{cases}$ NO

$\boxed{k=1}$ $P_1(z) = z - a_1$

$$(\lambda_1 - a_1)^2 = (\lambda_2 - a_1)^2$$

$$\lambda_1 - a_1 = a_1 - \lambda_2 \longrightarrow a_1 = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}$$

Passo induttivo $k \to k+1$

Ho già $a_1, \dots, a_k$ t.c.

$P_k(\lambda_i)^2 = \text{cost}$ $i = 1, \dots, k+1$

$$P_{k+1}(\lambda_i) = \underset{\text{cost}}{\underset{\shortparallel}{P_k(\lambda_i)^2}} - a_{k+1} \qquad i = 1, \dots, k+1$$

$$P_{k+1}(\lambda_i)^2 = \text{cost} \qquad i = 1, \dots, k+1$$

$$P_{k+1}(\lambda_{k+2})^2 = P_{k+1}(\lambda_1)^2$$

$$\left(P_k(\lambda_{k+2})^2 - a_{k+1}\right)^2 = \left(P_k(\lambda_1)^2 - a_{k+1}\right)^2$$

deve valere $P_k(\lambda_{k+2})^2 - a_{k+1} = a_{k+1} - P_k(\lambda_1)^2$

$$\rightsquigarrow \quad a_{k+1} = \frac{P_k(\lambda_1)^2 + P_k(\lambda_{k+2})^2}{2}$$

ok

Algebra 2

Titolo nota 06/09/2014

$\lessgtr \geq <$ DISUGUAGLIANZE $\geq < > \leq > < \geq < > \leq > < \geq$

$$\forall a, b, c \in \mathbb{R} \quad a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca$$

$$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 \geq 0$$

RIARRANGIAMENTO

$$a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \dots \geq a_n \qquad a_i, b_i \in \mathbb{R}$$

$$b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_n$$

$$\sum_{cyc} a_1 b_1 \geq \sum_{i=1}^{n} a_i b_{\sigma(i)} \geq \sum_{i=1}^{n} a_i b_{n+1-i}$$

$$\| \quad a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n$$

$$\| \quad \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$$

come si dimostra?

Supp. disug. siano strette.

Suppongo σ non sia "ottimale" cioè non sia l'id.

$$\exists i, j \quad b_{\sigma(i)} < b_{\sigma(j)}, \quad i<j$$

loro compaiono in $\boxed{a_i b_{\sigma(i)} + a_j b_{\sigma(j)}}$

Se li scambio al posto di $\boxed{}$

$$a_i b_{\sigma(j)} + a_j b_{\sigma(i)} \overset{?}{>}$$

$$a_i b_{\sigma(i)} + a_j b_{\sigma(j)}$$

$$(a_i - a_j)(b_{\sigma(j)} - b_{\sigma(i)}) \overset{?}{>} 0 \quad \text{SI}$$

$$a_i > a_j \qquad b_{\sigma(i)} < b_{\sigma(j)}$$

.... → con le uguaglianze.

$$a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca$$

NOTA: simmetria → posso supporre $a \geq b \geq c$

→ riarrangiamento su $\begin{matrix}(a,b,c)\\(a,b,c)\end{matrix}$

Altro esempio: $x, y, z > 0$

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x} \geq 3$$

riarrangiamento su $\begin{matrix}(x \geq y \geq z)\\(1/z, 1/y, 1/x)\end{matrix}$

→ generalizzata $x_i > 0$

$$\sum_{cyc} x_2/x_1 \geq n$$

AM-GM

$$a_1, \dots, a_n \geq 0$$

$$\frac{a_1+a_2+\dots+a_n}{n} \geq (a_1 \dots a_n)^{1/n}$$

media aritmetica

media geometrica $= g$

(se $g=0$ ovvia)

$$x_1 = a_1/g \quad x_2 = a_1a_2/g^2$$

$$x_3 = a_1a_2a_3/g^3 \quad \dots \quad x_n = 1$$

$$\sum_{cyc} x_2/x_1 = a_2/g + a_3/g + \dots + a_n/g + a_1/g$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^n a_i}{g} \geq n$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^n a_i / n \geq g = \left(\prod a_i\right)^{1/n}$$

CHEBYSHEV

$a_1 \geq \dots \geq a_n \quad a_i, b_i \in \mathbb{R}$
$b_1 \geq \dots \geq b_n$

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} a_i b_i}{n} \geq \frac{\sum a_i}{n} \frac{\sum b_i}{n} \geq \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i b_{n+1-i}}{n}$$

$$\frac{1}{n^2} \sum_{j=0}^{n-1} \boxed{\sum_{i=1}^{n} a_i b_{i+j}} \quad \text{``}i+j\text{''} \text{ ``ciclica''}$$

$$\frac{1}{n^2} \cancel{n} \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \geq \dots \geq \frac{1}{n^2} \cancel{n} \sum a_i b_{n+1-i}$$

CAUCHY-SCHWARZ

$a_1 \dots a_n \in \mathbb{R}$
$b_1 \dots b_n$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right) \geq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2$$

$$\sum_{i,j} (a_i b_j - a_j b_i)^2 \geq 0$$

$$= 2\sum_{i,j} a_i^2 b_j^2 - 2\sum_{i,j} a_i a_j b_i b_j$$

$$\boxed{\left(\sum a_i^2\right)\left(\sum b_i^2\right)} \geq \boxed{\left(\sum a_i b_i\right)^2}$$

$=$ si ha se $a_i b_j = a_j b_i$
(se $b_i, b_j \neq 0 \to a_i / b_i = a_j / b_j$)

se (nel caso $\underline{b} = (b_1 \dots b_n) \neq 0$)
$\underline{a} = \lambda \underline{b}$ per qualche λ
(cioè $a_i = \lambda b_i$).

In $\mathbb{R}^2$ $a = (x_a, y_a)$ $b = (x_b, y_b)$

$$\underbrace{(x_a^2 + y_a^2)^{1/2}}_{\text{norma di } a} \underbrace{(x_b^2 + y_b^2)^{1/2}}_{\text{norma di } b} \geq x_a x_b + y_a y_b$$

$$\|a\| \|b\| \cos\theta = \langle a, b \rangle$$

$$\cos\theta \leq 1$$

quando = ? Quando a, b sono paralleli

Torniamo a $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$

$$(a^2 + b^2 + c^2)(b^2 + c^2 + a^2) \geq (ab + bc + ca)^2$$

questo è sempre positivo

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq |ab + bc + ca|$$

"Lemma di Titu" $x_1 \dots x_n$, $a_1 \dots a_n \in \mathbb{R}$

$$\frac{\left(\sum_{i=1}^n a_i\right)^2}{\sum_{i=1}^n x_i} \leq \sum_{i=1}^n a_i^2 / x_i$$

CS su
$(a_1/\sqrt{x_1} \dots a_n/\sqrt{x_n})$
$(\sqrt{x_1} \dots \sqrt{x_n})$

ESEMPIO

$$\sum_{cyc} a_1^2/x_1$$

$$* \sum_{cyc} \frac{1}{c^3(a+b)} \geq 3/2 \qquad abc = 1$$

$a_1^2 = 1/c^2$ $x_1 = c(a+b)$
$a_1 = 1/c$

$*\quad \geq \frac{\left(\sum_{cyc} 1/c\right)^2}{\sum_{cyc} c(a+b)} = \frac{\left(\sum_{cyc} ab\right)^{\cancel{2}}}{2\cancel{\sum_{cyc} ab}}$

$\sum_{cyc} ab \overset{?}{\geq} 3$

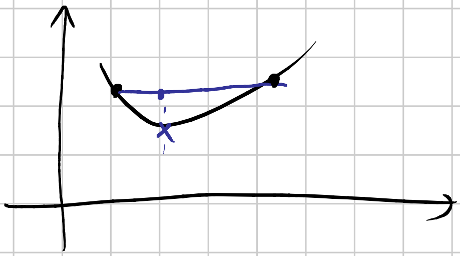
1

AM - GM $\quad \frac{\sum_{cyc} ab}{3} \geq \left[(abc)^2\right]^{1/3}$

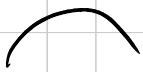
JENSEN

f funzione convessa

= felice

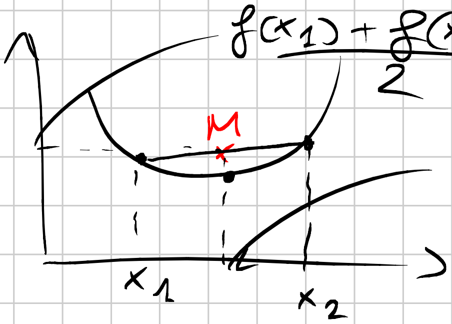


= 2 pti sul grafico → il segmento che li unisce sta sopra



triste = concava

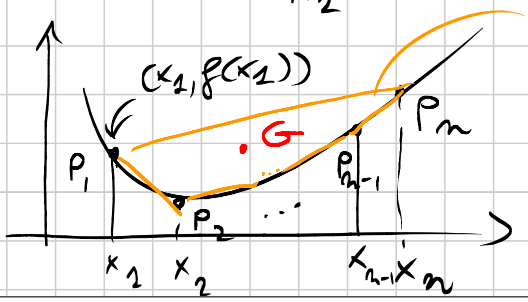
f è convessa $x_1, \dots, x_n$ $\quad \frac{\sum_{i=1}^{n} f(x_i)}{n} \geq f\left(\frac{\sum x_i}{n}\right)$



$\frac{x_1+x_2}{2}$

M sta sopra il grafico

$\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} \geq f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$



poligono convesso

G, baricentro di $P_1 \dots P_n$, sta sopra al grafico.

$$G = \left(\frac{\sum x_i}{n}, \frac{\sum f(x_i)}{n} \right)$$

$$\frac{\sum f(x_i)}{n} \geq f\left(\frac{\sum x_i}{n}\right)$$

$\lambda_i \geq 0$

$\lambda_1 \dots \lambda_n \quad \lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1$

$$f\left(\sum \lambda_i x_i\right) \leq \sum \lambda_i f(x_i)$$

Ma quando una funzione è convessa? $f''(x) \geq 0$

x è convessa e anche concava;

CONVESSE:

x^2 per $x \geq 0$ $x^3 \dots x^n$

x^α $\alpha \geq 1$, $x \geq 0$, e^x

$\operatorname{sen} x$

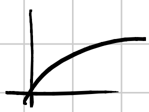
$1/x$, $x \geq 0$

$1/x$

CONCAVE

$\sqrt{x}$

$\log x$



x^α, $x > 0$, $\alpha < 0$

convesso

$f + g$ convessa

crescente $f(g(x))$ $f(ax+b)$

convesse convessa

$f(x)\, g(x)$,

convesse crescenti positive

MEDIE p-ESIME $a_1 \dots a_n > 0$

$$\left(\frac{\sum a_i^p}{n}\right)^{1/p} \geq \left(\frac{\sum a_i^q}{n}\right)^{1/q}$$

se $p \geq q$

$$\underset{3}{CM} \geq \underset{2}{QM} \geq \underset{1}{AM} (\geq \underset{\text{"0"}}{GM}) \geq \underset{-1}{HM}$$

$f(x) = x^{p/q}$ ◡ convessa $(x \geq 0)$

$$\left(\sum x_i / n\right)^{p/q} \leq \frac{1}{n} \sum x_i^{p/q}$$

$x_i := a_i^q$

$$\left(\frac{1}{n}\sum a_i^p\right)^{1/p} \geq \left(\frac{\sum a_i^q}{n}\right)^{1/q}$$

commento: ho dim anche le "medie pesate" ...

NESBITT

$$\sum_{cyc} \frac{a/_{a+b+c}}{b+c/_{a+b+c}} \geq 3/2 \qquad a, b, c > 0$$

x, y, z

- RIARRANGIAMENTO

$$\boxed{\begin{gathered} a \geq b \geq c \\ a+b \geq a+c \geq b+c \\ \frac{1}{b+c} \geq \frac{1}{a+c} \geq \frac{1}{a+b} \end{gathered}}$$

$$\sum_{cyc} \frac{a}{b+c} \geq \frac{1}{2}\left[\sum_{cyc} \frac{a}{a+b} + \sum_{cyc} \frac{b}{a+b}\right]$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{cyc} \frac{a+b}{a+b} = 3/2$$

– é omogenea

→ posso supporre $a+b+c = 1$

$$\sum_{cyc} \frac{a}{\underset{= b+c}{1-a}} = f(a)+f(b)+f(c) \geq 3 f\left(\frac{a+b+c}{3}\right) = 3 f(1/3)$$

$\uparrow$ $1/2$

$\frac{x}{1-x}$ ☺ é convessa su $[0,1)$

$= -1 + \frac{1}{1-x}$ → fra 0 e 1 ha la stessa "convessità" di $1/x$

– CS ("Titu")

$$\sum_{cyc} \frac{a^2}{a(b+c)} \geq \frac{\left(\sum_{cyc} a\right)^2}{\sum_{cyc} a(b+c)} \overset{?}{\geq} 3/2$$

"$\sum \frac{a_i^2}{x_i}$"

$\uparrow\ 2\sum_{cyc} ab$

$$\left(\sum_{cyc} a\right)^2 \overset{?}{\geq} 3\sum_{cyc} ab$$

$$\sum_{cyc} a^2 \overset{?}{\geq} \sum_{cyc} ab$$

$\uparrow$ VERO! :)

PROBLEMI DEL LIBRETTO 3, 4, 5, 9, 10

$$\sum_{cyc} \frac{a^2+b^2}{a+b} \geq a+b+c \quad a,b,c \in \mathbb{R}^+$$

$$\sum_{cyc} x^2y \geq 2(x+y+z)-3 \quad 3=\sum_{cyc} \frac{1}{x}$$

se $\sum_{cyc} xy = 3xyz \quad x,y,z \in \mathbb{R}^+$

3 riarrangiamento

5. CS

4. max x^5yz

$x+y+z=1$

$x,y,z>0$

$$\frac{\overbrace{\frac{1}{5}x+\frac{1}{5}x \quad}^{5\text{ volte}}+y+z}{7} = 1/7$$

$GM(\ldots) \leq 1/7$

$$\left(\frac{1}{5^5}x^5yz\right)^{1/7} \leq 1/7$$

$$\rightarrow x^5yz \leq \frac{5^5}{7^7}$$

cost. del 10 sono 1, 2

Titolo nota 05/09/2014

Algebra 3

$a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$

per ricorrenza

$$\begin{cases} S_n = n + S_{n-1} \\ S_1 = 1 \end{cases} \qquad S_n = \sum_{i=1}^{n} i$$

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$1 \ 2 \ 3 \ \dots \ n+1$

$(x, y) \mid x < y$ quante sono?

$\{1, \dots, n+1\}^2$

Risposta 1

$$\binom{n+1}{2}$$

S_n

Risposta 2

$$n + n-1 + \\ + n-2 + \dots + 1 \\ = \sum_{1 \leq i \leq n} i$$

Altro metodo: telescopica

$$(n+1)^2 = \sum_{i=0}^{n} (i+1)^2 - i^2$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \cancel{i^2} + 2i + 1 - \cancel{i^2} = 2S_n + n + 1$$

$$\rightarrow S_n = \frac{(n+1)(n+\cancel{1}-\cancel{1})}{2}$$

Adesso so fare $\sum_{i=1}^{n} i^k$ per qualunque k!

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = q_n$$

$$(n+1)^3 = \sum_{i=0}^{n} (i+1)^3 - i^3 = \sum_{i=0}^{n} \cancel{i^3} + 3i^2 + 3i + 1 - \cancel{i^3} = 3q_n + 3S_n + n+1$$

$$\rightarrow q_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\#\{(x,y,z) \mid x<y,z\} = \sum_{i=1}^{n} i^2 = 2\binom{n+1}{3} + \binom{n+1}{2}$$

$$1 \le x,y,z \le n+1$$

→ Somma di succ. aritmetiche $\quad (x_n = x_{n-1} + a)$

Somma di succ. geometriche

$$x_n = x_0 a^n \qquad x_n = a\, x_{n-1}$$

$$g_n = \sum_{i=0}^{n} x_i = x_0 \qquad 1 + x + x^2 + \ldots + x^n = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}$$

$$g_{n+1} = g_n + \underbrace{x_0 a^{n+1}}_{x_{n+1}}$$

$$g_{n+1} = a g_n + x_0$$

$$g_n(a-1) = x_0(a^{n+1} - 1)$$

$$\rightarrow g_n = x_0 \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1}$$

Geometrica "shiftata"
traslata

$$x_{n+1} = a x_n + b \qquad x_0 = c$$

IDEA! $\underbrace{(x_{n+1} + \alpha)}_{y_{n+1}} = a \underbrace{(x_n + \alpha)}_{y_n}$

$$-\alpha + a\alpha = b \rightarrow \alpha = \frac{b}{a-1}$$

$$y_n = a^n y_0 = a^n (x_0 + \alpha) =$$

$$= a^n \left(x_0 + \frac{b}{a-1}\right)$$

$$x_n = y_n - \alpha = a^n\left(x_0 + \frac{b}{a-1}\right) - \frac{b}{a-1}$$

SUCCESSIONI PER RICORRENZA LINEARE

$$* \quad x_{n+1} = a x_n + b x_{n-1} \quad (+c)$$

$$x_0 , x_1$$

"proviamo" sol. del tipo $\lambda^n = x_n$.

$$\lambda^{n+1} = a\lambda^n + b\lambda^{n-1}$$

$$\boxed{\lambda^2 = a\lambda + b}$$

$\rightarrow \lambda_1, \lambda_2$ sono sol dell eq caratteristica $\Rightarrow x_n = \lambda_i^{\,n}$ soddisfa $*$

diverse

$\rightarrow p\lambda_1^n + q\lambda_2^n$ soddisfa $*$ $\forall p, q$

$\rightarrow p + q = x_0 \qquad p\lambda_1 + q\lambda_2 = x_1$

$\rightarrow$ trovo sol. in p e q

p', q'

$$\to x_n = p'\lambda_1^n + q'\lambda_2^n$$

PROBLEMA: e se c'è una sola radice doppia dell'eq. caratteristica?

(Se $x_1 = \lambda x_0$ ok, ma altrimenti?)

Ma anche $n\lambda^n = x_n$ soddisfa*!

$$(n+1)\lambda^{n+1} \overset{?}{=} n\lambda^n a + (n-1)\lambda^{n-1} b$$

$$\lambda^{n+1} \overset{?}{=} -\lambda^{n-1} b$$

$$\lambda^2 = -b \quad !$$

è il prodotto delle radici $= \lambda \cdot \lambda$

Eq. $p\lambda^0 + q \cdot 0 \cdot \lambda^0 = x_0$

$$p = x_0$$

$$x_0\lambda + q\lambda = x_1 \to q = \frac{x_1 - x_0\lambda}{\lambda}$$

- si generalizza per $x_{n+m} = a x_{n+1} + b x_{n+2} + c x_{n+3} + \dots$
- e se l'eq di II grado ha $\Delta < 0$? Nessun problema...

EQUAZIONI FUNZIONALI

$f: A \to B$ che soddisfa ....

(1) $f: \mathbb{R} \circlearrowleft \ \big| \ f(x)f(y) = xy \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$

"specificare" e' eq. sostituendo x e y particolari.

$$f(x)^2 = x^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$f(x) = c_x x$$

$$c_x = \pm 1$$

$$c_x x \, c_y y = xy \quad \forall x, y$$

$$c_x c_y = 1 \quad \forall x, y$$

$c_x = 1 \ \forall x$ oppure $c_x = -1 \ \forall x$

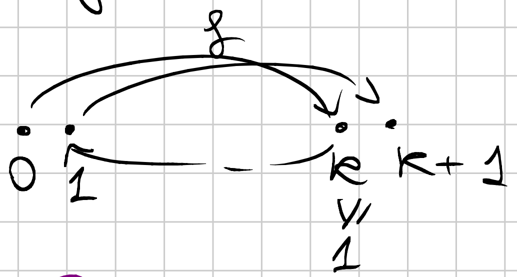
$\rightarrow$ sol. $f(x) = \pm x$ che soddisfano 1 $\rightarrow$ HO FINITO.

(2) $f(f(n)) = n + 1 \qquad f: \mathbb{N} \circlearrowleft$

f è INIETTIVA

($f(g(x))$ iniettiva $\rightarrow g$ iniettiva

$f(g(x))$ suriettiva $\rightarrow f$ suriettiva)



$0 \rightarrow k \rightarrow 1 \rightarrow k+1 \rightarrow 2$
$\rightarrow k+2 \rightarrow \cdots \rightarrow k$
$k + k - 1$

$\rightarrow$ assurdo perché era iniettiva

Altra dim. $f(f(f(n))) = f(n+1)$
$= f(n) + 1$

$\rightarrow f(n) = f(0) + n$ induzione

dentro e' eq.

$f(f(0)+n) = n+1$

$2f(0) + n = n+1$

$\rightarrow f(0) = 1/2$

assurdo!

NB. Se avessi cercato funzioni $: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ avrei trovato $f(n) = 1/2 + n$ ...

3 $f(x+f(y)) + f(f(x)+f(y)) = 2x + 2y + 5$

$f: \mathbb{R} \circlearrowleft$

– IDEA! Scambio x e y.

$f(x+f(y)) = f(y+f(x))$

– IDEA! y a sx compare solo "filtrata" tramite f; supp. $a \neq b \mid f(a) = f(b)$

Se metto $y = a, b$ LHS è uguale; ma RHS è diverso! Assurdo.

$\rightarrow$ è INIETTIVA!

$x + f(y) = y + f(x)$

$y = 0 \rightarrow f(x) = x + f(0)$

SOSTITUISCO $x + y + 2f(0) + x + y + 3f(0)$

$$= 2x + 2y + 5$$

$$\leftrightarrow f(0) = 1$$

SOLUZIONE $f(x) = x + 1$

(4) $f(x) - f(x + f(y)) = y \quad f: \mathbb{R} \circlearrowleft$

$f(x) = f(x + f(0))$

$a, b \mid f(a) = f(b)$

$$f(x) - f(x + f(a)) = a$$
$$f(x) - f(x + f(b)) = b$$

$f(a) = f(b) \Rightarrow a = b$

È INIETTIVA

$\longrightarrow f(0) = 0$

$x = 0 \longrightarrow f(f(y)) = -y$

$x \to f(x)$ $f(f(x)) - f(f(x) + f(y)) = y$

$f(-x) = -f(x)$ $\longrightarrow -x - y = f(f(x) + f(y))$

$f(-x - y) = f(f(f(x) + f(y)))$

$f(-x - y) = -f(x) - f(y)$

$\longrightarrow f(x + y) = f(x) + f(y)$

$x \in \mathbb{Q}$ EQUAZIONE DI CAUCHY $: \mathbb{R} \circlearrowleft$

$f(x) = kx$

$f(f(y)) = -y = k^2 y$:(non c'è un k reale che vada bene $\to$ NON ha sol.

$\to f(0) = 0$ (sost $x=0, y=0$)

$f(2) = 2f(1)$ induzione

$f(3) = 3f(1) \ldots f(n) = nf(1)$

su $\mathbb{N}$ $f(nx)\, nf(x)$

su $\mathbb{Z}$: $\overset{0}{\overset{\shortparallel}{f(0)}} = f(n-n) =$

$= f(n) + f(-n)$

$\to f(-n) = -f(n) =$

$= -nf(1)$

su $\mathbb{Q}$ $f\left(\frac{k}{n} n\right) = nf\left(\frac{k}{n}\right)$

$\overset{\shortparallel}{f(k)} = kf(1)$

$\to f(k/n) = k/n\, f(1)$.

su $\mathbb{Q}$ l'unica sol. sarebbe

$f(x) = kx$

Ma è l'unica sol. su $\mathbb{R}$??

NO. Però, lo è ad esempio se

- $\to f$ è continua
- $\to f$ continua "in un punto"
- $\to f$ monotona
- $\to f$ limitata dall'alto o dal basso su un intervallo.
- $\to f$ non abbia il grafico "denso" ☺

ESERCIZI (fatene qualcuno per controllare se avete capito): 89, 92, 87

PROBLEMI dal libretto 2, 6, 8, 10 ← + difficile

→ trovare le $f:\mathbb{R} \circlearrowleft \mid f(f(x+y)) = f(x+y) + f(x)f(y) - xy$

Γ

$f : \mathbb{R} \circlearrowleft \quad f(f(x)) = f(x) + 8$

$f \geq 0$ $\forall x \geq 0$ — quanto fa $f(2002)$ come minimo?

$2002 \to 0$

$\equiv 2 (8) \longrightarrow 0$

altro $x \xrightarrow[0]{} x+8$

$f(f(x))$

$f(0) = f(x) + 8 = 8$

6. $x_{n+1} - x_n =$

$$= 6x_n - 2\sum_{i=0}^{n} x_i - 6x_{n-1} + 2\sum_{i=0}^{n-1} x_i$$

$$\longrightarrow x_{n+1} - x_n = 6x_n - 2x_n - 6x_{n-1}$$

sol. 2, 3 $\to p2^n + q3^n$

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x) + 2f(y)$$

$\to f(0) = 0$; $f(-x) = f(x)$;

$$f(2x) = 4f(x)$$

SCOMMETTO $f(nx) = n^2 f(x)$

$\rightarrow$ faccio tutto $\mathbb{Z}$

$$f(n) = n^2 f(1)$$

poi faccio $\mathbb{Q}$ $\quad f\left(n\frac{k}{n}\right) = n^2 f(k/n)$

$$\overset{\shortparallel}{k^2 f(1)}$$

$$f(x) = x^2 f(1)$$

problema 10

$$f(xf(x) + f(y)) = f(x)^2 + y$$

$\rightarrow x = 0 \quad f(f(y)) = f(0)^2 + y$

$\rightarrow f$ è BIGETTIVA

$$\exists \alpha \mid f(\alpha) = 0$$

$x = \alpha \quad f(f(y)) = y \rightarrow f(0) = 0$

$x = f(z) \quad f(f(z)z + f(y)) =$

$$z^2 + y = f(z)^2 + y$$

$\longrightarrow f(z)^2 = z^2$

$\longrightarrow f(z) = \underset{\uparrow \pm 1}{c_z}\, z$

SCOMMESSA: vanno bene SOLO

$f(x) = x$ e $f(x) = -x$

Voglio dire che è assurdo
avere $a, b \neq 0$
t.c. $f(a) = a$ $f(b) = -b$

$f(a^2 - b) = a^2 + b$

$a^2 - b \longrightarrow b = 0$ ✗

$-a^2 + b \longrightarrow a^2 = 0 \to a = 0$ ✗

$\to$ ASSURDO

$f(x) = x$ e $f(x) = -x$
SODDISFANO e sono le
uniche soluzioni.

Combinatoria 1 - Basic [Tess]

Titolo nota 04/09/2014

1 - Tecniche di conteggio
2 - Double - Counting

i) Regola della somma Chiave = "Disgiunti"
ii) Regola del prodotto Chiave = "Indipendenti"

$$A = \bigsqcup_{i=1}^{n} A_i$$

unione disgiunta

$$|A| = \sum_{i=1}^{n} |A_i|$$

$$A = A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$$

$$|A| = \prod_{i=1}^{n} |A_i|$$

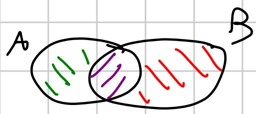
Esempi

10 atleti fanno una gara: quanti sono i podi?

Scelgo 1° in 10 modi
indip. 2° in 9 modi
indip. 3° in 8 modi

Permutazioni sono $n!$
Combinazioni sono $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

P.I.E.



$$|A \cup B| \neq |A| + |B|$$

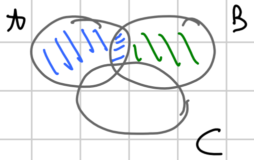
$$A \cup B = (A \setminus B) \cup (A \cap B) \cup (B \setminus A)$$

R.Σ : $|A \cup B| = |A \setminus B| + |A \cap B| + |B \setminus A|$

$$\overset{!}{=} |A| - \cancel{|A \cap B|} + \cancel{|A \cap B|} + |B| - |A \cap B|$$

$$\overset{!}{=} |A| + |B| - |A \cap B|$$

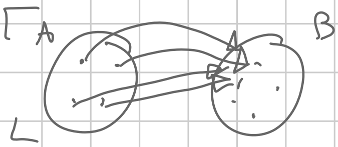
$$|A\cup B\cup C| = |A|+|B|+|C| - |A\cap B| - |B\cap C| - |C\cap A| + |A\cap B\cap C|$$



$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{i<j}|A_i\cap A_j| + \sum_{i<j<k}|A_i\cap A_j\cap A_k| - \dots$$
$$\dots (-1)^{n+1}\left|\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right|$$

---

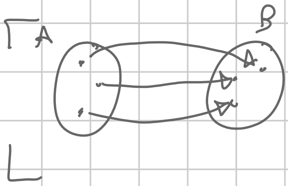
iii Bigezione



f qualsiasi

Se A, B insiemi e $f: A\to B$ t.c. f bigettiva = iniettiva + suriettiva

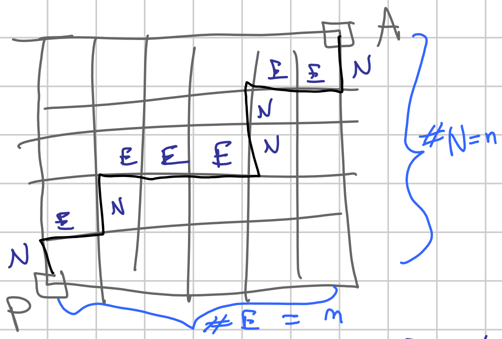
$\Rightarrow |A| = |B|$



f bigettiva

Come si usa?

Se so contare $|A|$ e so che $\exists$ bigezione $f: A\to B$ allora so contare $|B|$ e $|A|=|B|$



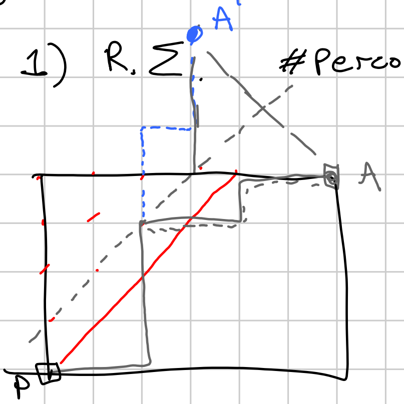
Percorsi monotoni posso andare solo a N o a E

N E N E E E N N E E N è equiv. al percorso tracciato

R. Big. # perc. = # permutazioni di m "E" e n "N" $= \binom{m+n}{n}$

Percorsi monotoni sotto la diagonale

1) R. Σ



\# Percorsi sotto d. = # tutti i percorsi

− # percorsi sbagliati

faccio una riflessione rispetto
del percorso non appena
tocca

↑

è la bigezione

\# p. sbagl. = # p. da P a A'

↑ R. Big.

$L_d = \binom{m+n}{m-1}$ se $m<n$ e $A=(n,m)$

\# perc. s. l. d. $= \binom{m+n}{m} - \binom{m+n}{m-1}$

Ricorsione

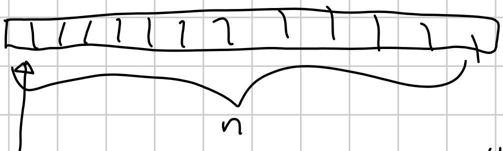
$A_n \in \mathbb{N}$

cerco di calcolare A_n sfruttando A_k con $k<n$

Esempio

Quante sono le stringhe di "A" e "B" che NON hanno 2 "A" consecutive. (di n caratteri) ($= A_n$)

$A_1 = 2$; $A_2 = 3$; $A_3 = 5$; $A_4 = \ldots$

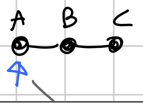


"A" → dopo viene una "B" → una parola con $n-2$ lettere

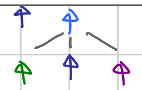
"B" → parola con $n-1$ lettere

$A_n = A_{n-2} + A_{n-1}$

Esempio



ad ogni "mossa" posso spostare la ↑
di al più 1



Contare il # di "percorsi" della ↑ che impiegano n "mosse".

Costruisco + successioni

A_n = # percorsi che finiscono in A

B_n = " " B

C_n = " " C

(La risposta sarà $A_n + B_n + C_n = S_n$)

$A_n = A_{n-1} + B_{n-1}$

$B_n = A_{n-1} + B_{n-1} + C_{n-1}$

$C_n = C_{n-1} + B_{n-1}$

voglio ricorsione su S_n

sommando ...

$$S_n = 2A_{n-1} + 3B_{n-1} + 2C_{n-1} = 2S_{n-1} + B_{n-1}$$

ma $B_n = S_{n-1}$; $S_n = 2S_{n-1} + S_{n-2}$

A mano S_0 e S_1.

IMO 2011, 4

n pesi: $2^0, \dots, 2^{n-1}$

devo avere in ogni momento più peso a SX che a DX

In quanti modi posso disporli?

D_n = # ↑

Voglio ricondurmi a D_{n-1}

IDEA "sistemo" 2^0, mi rimangono i pesi

$2^1, \dots, 2^{n-1} = 2(2^0, \dots, 2^{n-2})$

Data una disposizione degli n pesi, tolgo il peso più piccolo (2^0) e quello che mi rimane è una disposizione di $n-1$ pesi equivalenti al problema con $n-1$ pesi

1 poss.: a SX ~~o~~ 2 poss. per ciascuno degli $n-1$ ↑ ho la scelta DX e SX

$$D_n = (1+2(n-1))\, D_{n-1}$$

Double Counting

Tecnica che usa i conteggi

Esempio

calcolare $1+2+\dots+n$

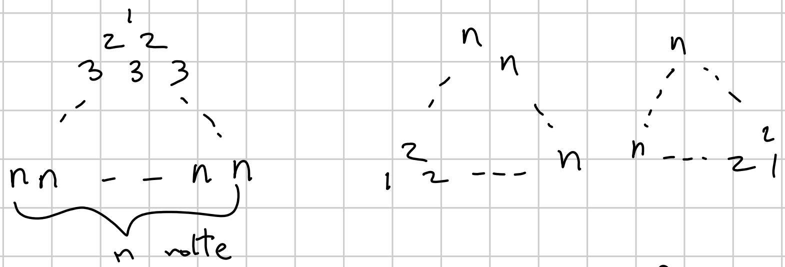
sol con D-C :

1	2	3	4	...	...	n
n	n-1	...	...	...	2	1

$$\underset{\text{per colonna}}{n\cdot(n+1)} = \text{Somma nella tabella} = \overset{\text{per riga}}{2\sum_{i=1}^{n} i}$$

Es 1.5 calcolare $1^2+2^2+\dots+n^2$

sol con D-C



Piano 1 P. 2 P. 3

$$3\sum_{i=1}^{n} i^2 \overset{\times\text{ piani}}{=} \text{Somma dei numeri scritti} ? = \underset{\#\text{ ~~po~~ colonna}}{(2n+1)}\ \underset{\#\text{ colonne}}{\frac{n(n+1)}{2}}$$

— — — —

Grafo $= (V, E)$

V insieme dei vertici

$\underline{E} \subseteq V\times V$ simmetrico (se $(a,b)\in E$, $(b,a)\in E$)

insieme dei lati / archi

$\deg(v)$ con $v \in V$

$\stackrel{!}{=}$ # archi che partono da v

$|E| = \#\sum_{\text{vertice}}$ archi per vertice $= \sum_{v \in V} \deg(v)$

è pari

$= 2$ # tratti disegnati

$$\sum_{v \in V} \deg(v) \equiv 0 \pmod 2$$

$\Rightarrow$ # vertici con $\deg \equiv 1 \ (2)$ è pari

Senior 2002 – C1 n° 10

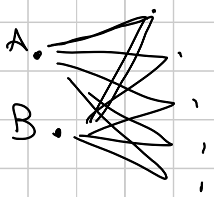
$12k$ persone

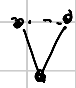
$3k+6$ strette di m. per persona

$\exists N$ t.c. $\forall A, B$ persone $\exists N$ altri invitati t.c.

A e B hanno stretto la mano a esatt. $\stackrel{\wedge}{=}$

Per quali k è possibile?



IDEA D-C : contiamo le 

- se fissiamo gli apici

ci sono $\underbrace{\binom{12k}{2}}_{\text{coppie}} \cdot N$ di "V"

- se fissiamo il centro V

per ogni vertice $\binom{3k+6}{2}$ modi di "V"

ci sono $12k \binom{3k+6}{2}$

Quindi: $\dfrac{\cancel{12k} \cdot (12k-1)}{\cancel{2}} N = \cancel{12k} \dfrac{(3k+6)(3k+5)}{\cancel{2}}$

$12k - 1 \mid 9k^2 + 33k + 30$

$$\frac{9k^2+33k+30}{12k-1} = Ak + B + \frac{C}{12k-1}$$

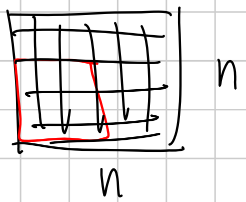
(Lezione N1)

$\rightarrow$ solo un numero finito di k

forse c'è solo $k=3$

per ora se $k \neq 3$ allora N non è intero, quindi non si può fare

IMO 2014 - 2



n torri sulla griglia in modo che non si mangino a vicenda rimarranno dei $\square$ senza torri *

Al variare della config. di torri quant'è al minimo la grandezza del massimo $\square$ di cui * ?

DC + Pigeonhole

Quanti sono i $\square$ di lato k? $= A$

Quanti $\square$ blocca 1 torre? $= B$

se $A > nB$ allora $\exists$ un $\square$ scoperto di lato k

$A = (n-k+1)^2$

$B = k^2$

da questa dis. in k si ottiene che se $k < \sqrt{n} - 1$ allora rimane un $\square$

La risposta era $\underbrace{k \leq \sqrt{n} \text{ si fa}}_{\text{DC migliorato}}$, $\underbrace{\text{di più no}}_{\text{mostrare un esempio}}$

riuscite a trovare il DC migl. che vi dà questa stima?

$(k \leq \sqrt{n})$

Esercizi

P. 18 – Es 100, 101, 102, 105
– Es 111, 112

P. 28 – Es 2

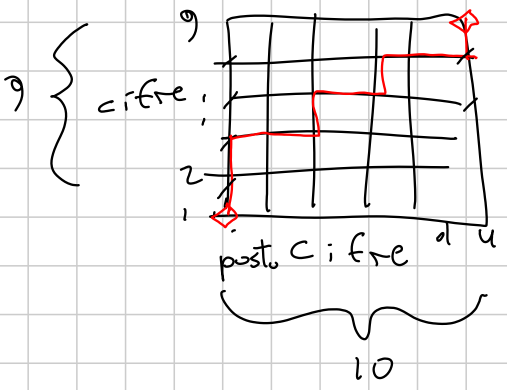
– Ricorsione
Quante stringhe di A, B senza 2A e senza 3B cons?

DC – Scacchiera 8×8
suddivisa in n rettangoli
ogni rettangolo ha tante bianche quante nere
e tutti i rettangoli hanno aree diverse
Quant'è al max n?
– Divido alcuni interi da 1 a n in k coppie disgiunte,
tali che le somme in ogni coppia siano diverse e $\leq n$.
max k = ?

Correzione Esercizi

Es 100 2235557999
quanti sono?

Bigezione



Percorsi monotoni
$\Updownarrow$ f big.
numeri crescenti

Ricorsione

stringhe senza 2A e senza 3B

+ ricorsioni!

$A_n = \#$ finiscono in A

$B_n = \#$ " in AB

$C_n =$ " in BB

$$A_n = B_{n-1} + C_{n-1}$$
$$B_n = A_{n-1}$$
$$C_n = B_{n-1}$$

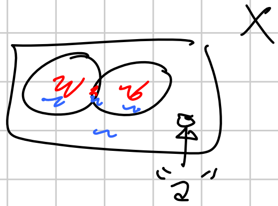
$$S_n = A_n + B_n + C_n \qquad A_n = S_{n-1} - A_{n-1}$$
$$S_n = S_{n-1} + B_{n-1} \qquad A_n + A_{n-1} = S_{n-1}$$
$$S_n = S_{n-1} + A_{n-2} \qquad A_n + B_n = S_{n-1}$$
$$S_n = S_{n-1} + C_n \qquad S_n = S_{n-1} + C_n$$

$$S_{n+2} - S_{n+1} = S_n - \cancel{S_{n-1}} + \cancel{S_{n-1}} - S_{n-2}$$
$$S_{n+2} = S_{n+1} + S_n - S_{n-2}$$

DC Es 112

$$\sum_{(A,B)\in\mathcal{P}(X)} |A\cup B| = n\cdot 3\cdot 4^{n-1}$$

conto sugli elementi



Scacchiera IMO '74, 4

quanti rettangoli in una 8×8?

$$8\times 8 = \text{Area} = a_1 + a_2 + \dots + a_n \geq 2 + 4 + \dots + 2n = n(n+1)$$

$$n \leq 7$$

← L'esempio

Un

TST 2013, 5

$1, \ldots, n$

k coppie disgiunte
le somme delle coppie sono diverse e $\leq n$

$$\binom{2k+1}{2} \overset{\text{c. x numero}}{\leq} \text{Somma degli interi presi nelle coppie} \overset{\text{c. x le coppie}}{\leq} n + (n-1) + \ldots + (n-k+1) = kn - \binom{k}{2}$$

almeno i primi $2k$

$$k(2k+1) \leq kn - \frac{k(k-1)}{2}$$
$$4k^2 + 2k \leq 2kn - k^2 + k$$
$$5k^2 + k \leq 2kn$$
$$5k + 1 \leq 2n$$
$$k \leq \frac{2n-1}{5}$$
$$k \leq \left\lfloor \frac{2n-1}{5} \right\rfloor$$

Euristica: per mostrare l'esempio
sto attento ai casi di uguaglianza

"=" quando $2n \equiv 1 \mod 5$.

Combinatoria 2 - Basic [Tess]

Titolo nota 06/09/2014

Tecniche combinatoriche

ESISTENZA		NON ESISTENZA
COSTRUTTIVA	NON COSTRUTTIVA	• invarianti (vere)
• mostrando l'esempio	• pigeonhole (+ DC)	• colorazioni
• induzione	• principio dell'estremale	• DC
• algoritmiche (+ invarianti)		

— o — o — o —

Invarianti

sono quantità associate ad un sistema che subisce delle trasformazioni:

- o non variano
- oppure lo fanno in modo controllato

sono utili per descrivere il sistema

I problemi sulla non esistenza

- ho un sistema che subisce trasformazioni
- ho una config. iniz.
- " " finale

Domanda: posso arrivare in finale?

Se la risposta è no

- sia $Q = \_\_\_$
- Q $\boxed{\text{non varia}}$ al variare del sistema
- Q all'inizio è A, alla fine è B e $A \neq B$

Esempio

si scrivono gli interi da 1 a n
<u>mossa</u>: scelgo a e b scritti, li cancello e scrivo al posto $|a-b|$

Domanda: per quali n alla fine si ottiene 1 numero dispari?

oss 1: il numero di interi scritti diminuisce ad ogni mossa
$\Rightarrow$ alla fine ho sempre 1 solo numero

oss 2: la richiesta è una parità
$\Rightarrow$ la Q che cerco è una parità

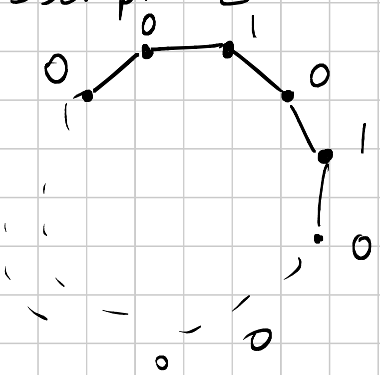
oss 3: provo $Q = \sum$ interi scritti $\pmod 2$

hope Q non varia
prima ho $a+b$, dopo $|a-b| = a-b$ se wlog $a \geq b$
Q non varia $\Leftrightarrow$ $a+b \equiv a-b \pmod 2$

ora calcolo Q all'inizio: $1+2+\dots+n \pmod 2$
$$= \frac{n(n+1)}{2} \pmod 2$$
$$= \begin{cases} 0 & \text{se } n = 4k \vee 4k-1 \\ 1 & \text{se } n = 4k+1 \vee 4k+2 \end{cases}$$

alla fine Q è la parità dell'ultimo numero
quindi alla fine è dispari se $n = 4k+1 \vee 4k+2$

Esempio 2



2014-agono regolare
sui vertici ci sono scritti dei numeri interi

mosse:
a) scelgo 2 vertici adiacenti e li incremento di 1
b) scelgo 2 vertici opposti e li incremento di 1

invarianti!

Riesco ad ottenere una configurazione con i numeri sui vertici tutti uguali?

I vertici con il numero 1 sono in posto "dispari"
e gli altri vertici a distanza pari da questi sono
in posto "dispari", gli altri sono in posto "pari".

$$Q = \sum_{i \text{ dispari}} a_i - \sum_{i \text{ pari}} a_i$$

per mostrare che Q non varia

a) parità diverse $\Rightarrow$ $a_i - a_{i+1}$ non varia se li incremento
b) a_i, a_{i+1007} parità diverse : " " "

Q all'inizio è 2
Q alla fine è 0 $\quad 2 \neq 0$

Esempio 3

sono date 2014 carte in fila
le carte hanno un lato bianco e uno nero
all'inizio sono tutte girate sul bianco

mossa : scelgo 50 carte consecutive t.c. quella + a SX
invarianti!! sia bianca, e le capovolgo

Dimostrare che sono possibili solo un numero finito
di mosse.

L'idea di prima sulle invarianti "vere" non può funzionare

IDEA: invarianti monotone!

$$Q = \sum_{i=1}^{2014} \varepsilon_i 2^i \qquad \text{dove } \varepsilon_i = \begin{cases} 0 & \text{se la } i\text{-esima è bianca} \\ 1 & \text{se la " è nera} \end{cases}$$

è "vedere un numero in base 2 scritto nelle carte"

Voglio mostrare che Q cresce sempre
sto considerando $\underset{=0}{\underset{\uparrow}{\varepsilon_{i+49}}}, \varepsilon_{i+48}, \dots, \varepsilon_i$

(p. mossa) la somma di Q "ristretta" a queste 50 carte è
$$\sum_{j=0}^{48} \varepsilon_{i+j} 2^{i+j} \leq \sum_{j=0}^{48} 2^{i+j} = 2^i(2^{49}-1)$$
(d. mossa) $$\sum_{j=0}^{48} (1-\varepsilon_{i+j}) 2^{i+j} + 2^{i+49} \geq 2^{i+49} = 2^i \cdot 2^{49}$$
$$Q(\text{dopo}) - Q(\text{prima}) \geq 2^i \cdot 2^{49} - 2^i(2^{49}-1) = 2^i \geq 1$$

Quindi Q aumenta sempre

Q all'inizio vale 0
alla fine vale $\leq 2^{2015}$ (l'importante è che ci sia un bound finito)
sono possibili solo un numero finito di mosse.
$\Leftrightarrow$ " " " " aumenti di Q.

Principio dell'estremale

Vogliamo mostrare che tra tante possibilità (tanti oggetti) ce n'è 1 che soddisfa una proprietà P.

P.E suggerisce: sia Q una quantità associata a tali oggetti, prendi quello che ha Q massima e mostra che questo oggetto ha la proprietà P.
se per assurdo ogg_{max} non ha P, posso variarlo di poco e mostro che la variazione ha Q più grande.

Quando esiste min / max?

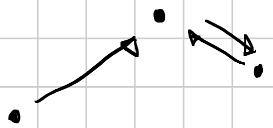
- Quando ho solo finiti oggetti (min e max)
- $A \subseteq \mathbb{N}$, $A \neq \emptyset$ allora ho il min

- $A \subseteq \mathbb{R}$ ed è limitato e chiuso allora ho min e max

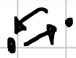
---

Esempio

alcuni cowboy si sparano e sparano al + vicino



il fortunato



(ip: # dispari di cowboy
le distanze rec. sono
tutte distinte)

Dimostrare che almeno uno
sopravvive.

Ad ogni cowboy associo $Q=$ la lunghezza che compie il suo proiettile

Scelgo il cowboy che ha Q massima
$\exists$ perché i cowboy sono finiti
$\exists!$ " le distanze sono finite

se x ass. qualcuno gli spara

$$A_{max} \leftarrow B \quad (\text{+ x ass.})$$

$$Q(A_{max}) \leq dist(A_{max}, B) \qquad (\text{def. } Q(A))$$

$$dist(A_{max}, B) \underset{\text{def. } Q}{=} Q(B) \underset{\max}{<} Q(A_{max})$$

$$dist(A,B) < Q(A) \leq dist(A,B) \quad \text{assurdo}$$

alternativ. $Q(A) \leq dist(A,B) = Q(B)$
ma A era scelta massima!

secondo punto: dimostrate che le traiettorie dei proiettili
non formano mai linee spezzate chiuse
(≥ 3 segmenti)

Induzione

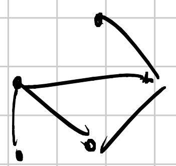
Dimos. sbagliata: P.B. —
P.I. suppongo sia vero per n
dimostro che è vero per $n+1$

Prendo una config. da n, ~~aggiungo~~ una cosa
che mi fa passare da n a $n+1$
e dimostro che la config. ampliata soddisfa la tesi.

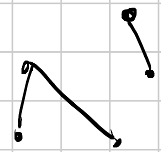
Dim. giusta: P.B. —
P.I. " "
Prendo una config. da $n+1$, tolgo una cosa
che mi fa passare da $n+1$ a n e riconduco
la config. + piccola all'ip. ind. = al problema precedente

Grafo (V, E)

Def. connesso: se comunque scelti $v_i, v_j \in V$
$\exists$ un cammino da v_i a v_j sul grafo



connesso

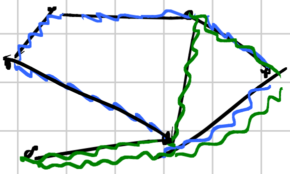


non connesso

(def: ogni classe di equivalenza si chiama
"componente connessa")

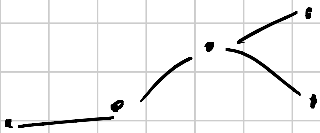
Def ciclo: è un cammino chiuso che passa
una sola volta per alcuni vertici

$v_1 \to v_2 \to v_3 - - - - \to v_n \to v_1$



(def.: se passo più volte su un vertice si chiama "circuito")

Def Albero: grafo
- connesso
- non ha cicli



Problema: mostrare che in un albero $|V| = |E| + 1$

IDEA da casa: se devo dimostrare che un grafo ha una certa proprietà, lo dimostro per induzione

provo induzione su $|V|$

P.B. $|V| = 1$, $|V| = |E| + 1$ sì

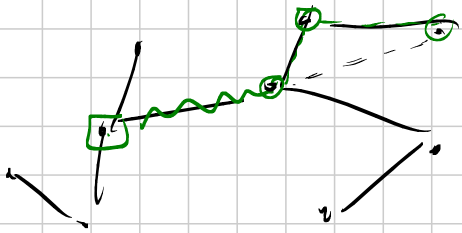
P.I. vero per $|V| = n$

voglio mostrarlo per $n+1$

se trovo un vertice con un solo arco, lo tolgo

e ottengo un grafo, $|V| = n$, chiaramente non sono spuntati cicli, per mostrare che è connesso prendo v_i, v_j nel nuovo grafo, esisteva il percorso nel grafo più grande $v_i \to \underbrace{v_{i+1} \text{- - - -}}\to v_j$
se non ho tolto nessuno di ho vinto
non li ho tolti perché ciascuno ha grado ≥ 2

Per mostrare che un vertice ha grado $= 1$, cammino a caso da un vertice (scelto a caso) senza ritoccare 2 volte lo stesso vertice



mi fermo x 2 motivi
- non ci sono altri archi (ho vinto)
- tutti gli altri li ho già visitati
  però così ho un ciclo

quindi mi fermo in un vertice che posso togliere.

quindi $|V| \stackrel{?}{=} |E| + 1$

so che $|V_-| = |E_-| + 1$ (V_-, E_-) è il grafo a cui mi sono ricondotto

quando ho tolto il vertice, ho anche rimosso un solo arco, cioè $|V| = |V_-| + 1$ e $|E| = |E_-| + 1$.

Algoritmi "Greedy"

ad ogni passaggio scelgo la cosa migliore in quel momento

Esempio

$P_n = \{ 2^n, 2^{n-1} \cdot 3, \ldots, 3^n \}$

se $Y \subseteq P_n$, S_Y è la somma degli elementi in Y (se $Y = \emptyset$, $S_Y = 0$)

Dimostrare che $\forall r \in \mathbb{R}$ $0 \leq r \leq 3^{n+1} - 2^{n+1}$ lo posso "approssimare" con una qualche S_Y, in modo che $0 \leq r - S_Y < 2^n$

IDEA : Alg. Greedy

considero $Y = \emptyset$, ad ogni passo scelgo il più grande elemento $x \in P_n$ t.c. $S_{Y \cup \{x\}} < r$

voglio mostrare che quando mi fermo ottengo Y giusto

se mi fermo, non ho più elementi in P_n tra 0 e $r - S_Y$
in particolare se non ho già preso 2^n

$$2^n \notin [0, r - S_Y] \Rightarrow r - S_Y < 2^n$$

se invece $2^n \in Y$
sia x il + piccolo elemento rimanente, se esiste
allora $x \notin [0, r - S_Y] \Rightarrow r - S_Y < x$

→ se $r - S_Y \geq 2^n$

al posto di Y aggiungo x e tolgo tutti gli elementi in P_n e in Y $< x$

$$[\underbrace{2^n, 2^{n-1}3, \dots,}_{\text{li ho presi}} \underset{\text{no}}{x} \dots 3^n]$$

$$\hookrightarrow \Sigma = 2^{n-i}\left(\frac{3^i - 2^i}{3-2}\right) = 2^{n-i}3^i - 2^n = x - 2^n \qquad x = 2^{n-i}3^i$$

$$S_{Y'} = S_Y + x - (x - 2^n) = S_Y + 2^n$$

$$0 \leq r - S_{Y'} < \underset{\text{x costr.}}{r - S_Y}$$, quindi non avevo seguito il greedy.

se $\nexists\, x$, allora $Y = P_n$ e viene subito.

Esercizi

P. 19 115, 117
119, 120
121

P. 30 5 (P.E.), 13 (P.E. Ind.), 14 (Gre.), 16 (Inv.)

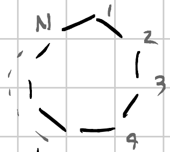
- Alcuni pesetti hanno somma $= n$ e sono tutti ≤ 1

Gre. Quante scatole servono al min. se vogliamo distribuirli in modo che nessuna scatola contenga peso > 1 ?

Correzione

115 $\quad a^2+b^2+c^2$ è invariante

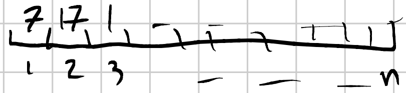
117



$\sum_{i=1}^{N} i\, m_i \pmod N$ esclude N pari

N dispari si mostra la seq. di mosse

119

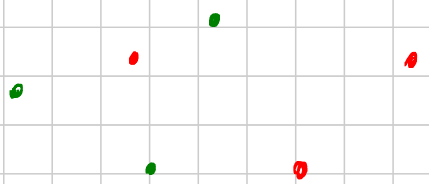


$\sum_{i=1}^{n} i\, a_i \nearrow \qquad \max_{1\leq i\leq n} \{a_i\} = M$

$\sum_{i=1}^{n} i\, a_i \leq \sum_{i=1}^{n} i\, M =$ <u>finito</u>

120 $\quad 2\,\#\text{monete} - \#\text{pile} \searrow$

121 $\quad$ mancava l'ip. che i punti sono a 3 a 3 non allineati



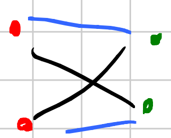
Ad ogni bigezione rossi $\leftrightarrow$ verdi

associo i segmenti

associo $Q = \sum_{1\leq i\leq n}$ lung. segmenti

Allora la minima Q non ha intersezioni

x assurdo



se ~~neri~~ si incrociano, blu hanno somma $<$

5. Grafo $\forall (a,b)\ \exists\ a \to b \vee b \to a$

percorsi anche non diretti

Sia $Q(a) = \#$ città raggiungibili da a

Prendo una città con Q massimo (sulla città c

se $Q(c) < n$

$\exists$ d città t.c. $\nexists$ $c \to d$

$\Rightarrow \exists\, d \to c \Rightarrow Q(d) \geq Q(c)+1$ assurdo.

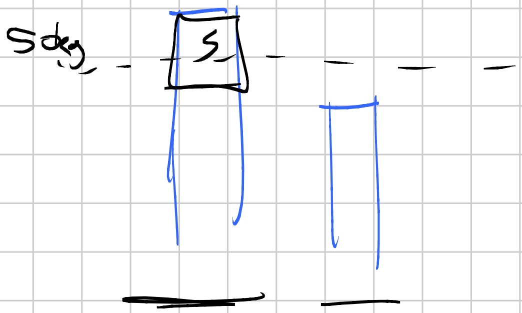
14. 100 kg sono ripartiti in 50 sacchi (non vuoti)

voglio smezzare il carico 50kg – 50kg

(nessun sacco ≥ 51 kg)

Greedy: prendo il sacco + pesante e lo piazzo nel carico + leggero

Se per assurdo non concludo 50kg – 50kg



sia S l'ultimo sacco che ho messo nel carico + pesante alla fine

$S \geq 2$

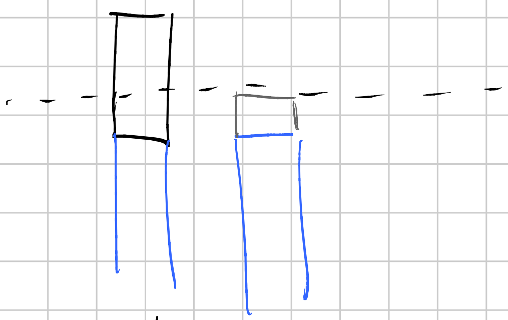
se $S = 2$ S è l'ultimo sacco

$\Rightarrow$ tutti i sacchi pesano ≥ 2

$\Rightarrow$ " " esattamente 2

allora concludevo

$S \geq 3$



Quanto vale $\sqcap$ $\sqcap$?

$100 - S$

Però $\sqcap$ sono fatti da sacchi che pesano almeno quanto S, supponiamo che siano n

quindi: $\sqcap \geq n \cdot S$

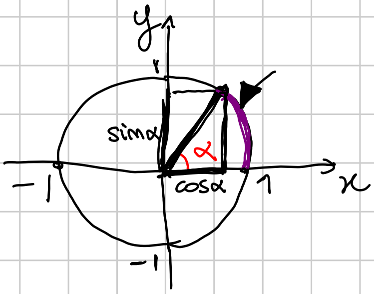
$\sqcap \leq 100 - S$ $\qquad (n+1)S \leq 100$

G1 basic

Giada

Titolo nota 02/09/2014

G3 Geometria sintetica
G2 Metodi analitici
G1 Trigonometria



Gradi $\longleftrightarrow$ Radianti

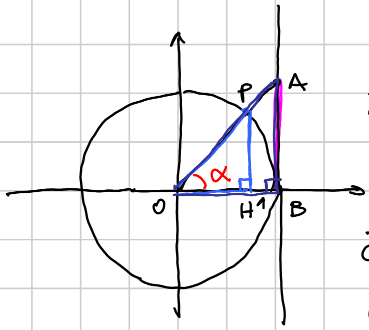
$360° \longleftrightarrow 2\pi$

$\sin, \cos \in [-1, 1]$

$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$

$\tan \alpha = \dfrac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$

$\cot \alpha = \dfrac{1}{\tan \alpha} = \dfrac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$



$\dfrac{PH}{OH} = \dfrac{AB}{BO}$

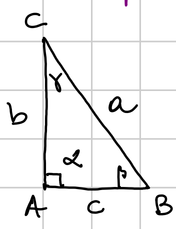
$\Downarrow$

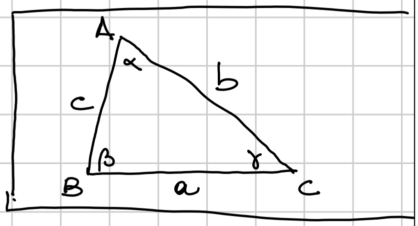
$\dfrac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = AB$

$\parallel$

$\operatorname{tg} \alpha$

Interpretazione geometrica





$b = a \sin \beta$

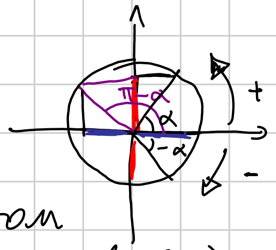
$c = a \sin \gamma = a \cos \beta$

$\gamma = 180° - \alpha - \beta = 90° - \beta$

$\sin(90° - \beta) = \sin \gamma = \cos \beta$

$\tan \beta = \dfrac{b}{c}$

Simmetrie e periodicità



$\sin(90° - \alpha) = \cos\alpha$

$\sin(2\pi + \alpha) = \sin\alpha$ uguale cos, tan

$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$ funzione dispari $(f(-x) = -f(x))$

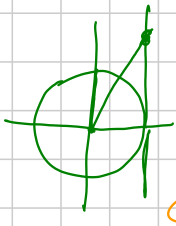
$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$ funzione pari

$\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha$

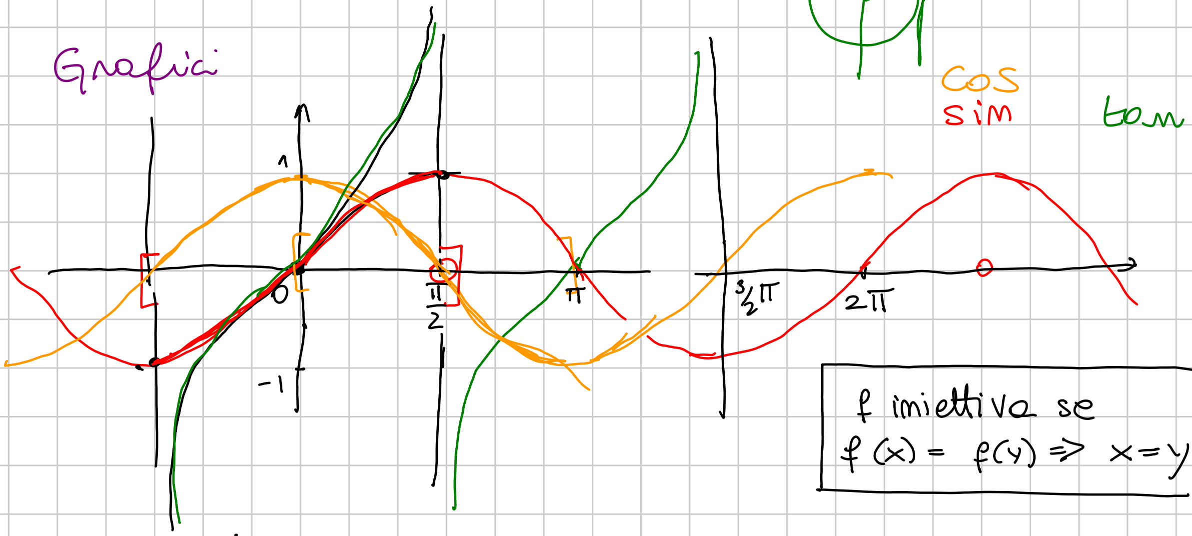
$\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$

Valori speciali

	sin	cos	tan
0	0	1	0
$(60°)\ \frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$



Grafici



f iniettiva se $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$

$\sin x = 1$

$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \longrightarrow$ sin iniettivo

$[0, \pi] \longrightarrow$ cos iniettivo

$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \longrightarrow$ tan biettiva (= iniettiva + suriettiva)

Funzioni inverse

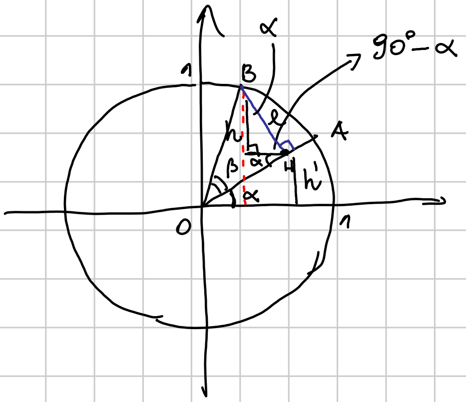
arctan : $\mathbb{R} \longrightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

arcsin : $[-1,1] \longrightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

arcos : $[-1,1] \longrightarrow [0,\pi]$

Formule

Addizione, sottrazione, ...



$h + h' = ?$

$l = OB \cdot \sin\beta = \sin\beta$

$h = l\cos\alpha = \sin\beta\cos\alpha$

$h' = \underset{\underset{\cos\beta}{\shortparallel}}{OH} \cdot \sin\alpha = \sin\alpha\cos\beta$

$$\boxed{\sin(\alpha+\beta) = h + h' = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha}$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} = \frac{\sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha}{\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta}$$

$$= \frac{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\sin\beta}{\cos\beta}}{1 - \frac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}} = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$$

$\beta = -\gamma$ $\qquad \sin(\alpha-\gamma) = \sin\alpha\cos\gamma - \sin\gamma\cos\alpha$

$\beta = \alpha$ $\qquad \sin(2\alpha) = 2\sin\alpha\cos\alpha$

$$\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$$
$$= 2\cos^2\alpha - 1$$

$$\operatorname{tg}(2\alpha) = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$$

$$\sin\alpha = \pm\sqrt{\frac{1-\cos 2\alpha}{2}} \Longrightarrow \sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$$

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$$

Prostaferesi e Werner

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

x esercizio

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left(\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\right)$$

Parametriche in $tg\frac{\theta}{2}$

$$t = tg\frac{\theta}{2}$$

$$tg\,\theta = \frac{2t}{1-t^2}$$

$$\cos^2\frac{\theta}{2} = \frac{1}{\tan^2\frac{\theta}{2}+1} = \frac{1}{t^2+1}$$

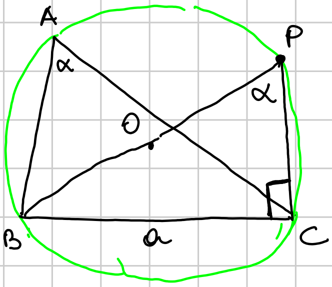
$$\frac{1}{\tan^2\frac{\theta}{2}+1} = \frac{1}{\frac{\sin^2}{\cos^2}+1}$$

$$\cos\theta = 2\cos^2\frac{\theta}{2} - 1 = \frac{2}{t^2+1} - 1 = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$\sin\theta = tg\,\theta\cdot\cos\theta = \frac{2t}{1+t^2}$$

Geometria del triangolo

Teorema dei seni



$$\boxed{\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R}$$

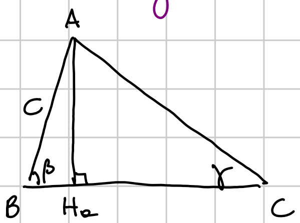
$$\Downarrow$$

$$\sin\gamma = \frac{c}{2R}$$

$$\frac{a}{\sin\alpha} = 2R$$

$$a = 2R\sin\alpha$$

Area trigonometrica



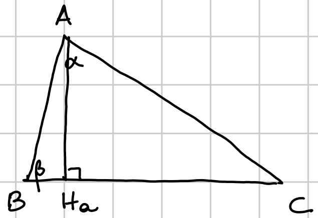
$[ABC]$, S_{ABC} ← area

$$S_{ABC} = \frac{BC \cdot AH_a}{2}$$

$BC = a \qquad AH_a = c\sin\beta = b\sin\gamma$

$$\boxed{S_{ABC} = \frac{1}{2}ab\sin\gamma} \qquad \boxed{S_{ABC} = \frac{abc}{4R}}$$

Teorema di Carnot (o del coseno)



$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha}$$

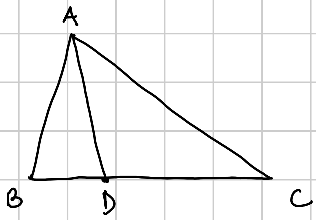
$$b^2 + c^2 - a^2 = (AH_a^2 + CH_a^2) + (AH_a^2 + BH_a^2) - (BH_a + CH_a)^2$$

$$= 2AH_a^2 + \cancel{BH_a^2} + \cancel{CH_a^2} - \cancel{BH_a^2} - \cancel{CH_a^2} - 2BH_a \cdot CH_a$$

$$= 2\underset{\substack{\shortparallel \\ AH_a \cdot AH_a \\ \shortparallel \quad \shortparallel \\ b\sin\gamma \quad c\sin\beta}}{AH_a^2} - 2\underset{\substack{\shortparallel \\ c\cos\beta}}{BH_a} \cdot \underset{\substack{\shortparallel \\ b\cos\gamma}}{CH_a} = 2bc\,(\underbrace{\sin\beta\sin\gamma - \cos\beta\cos\gamma}_{-\cos(\beta+\gamma)})$$

$$= -2bc\cos(\beta+\gamma) = -2bc\cos(\pi - \alpha) = 2bc\cos\alpha$$

Teorema di Stewart

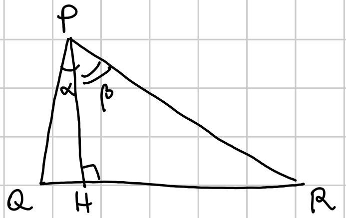


$$a\,(BD \cdot CD + AD^2) = b^2 \cdot BD + c^2 \cdot CD$$

× esercizio
[Carnot su $\overset{\triangle}{ABD}$ e $\overset{\triangle}{ACD}$]

Esempi

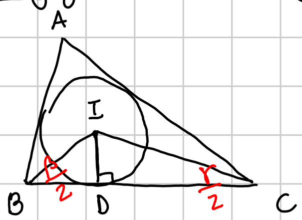
$\sin(\alpha+\beta)$

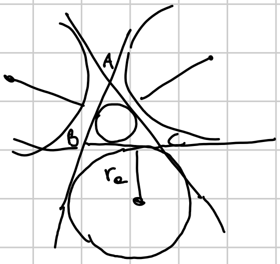


$$S_{PQR} = \frac{1}{2} PQ \cdot PR \cdot \sin(\alpha+\beta)$$
$$\parallel$$
$$S_{PQH} + S_{PHR}$$
$$\parallel$$
$$\frac{1}{2} PH \cdot QH + \frac{1}{2} PH \cdot HR$$
$$\parallel$$
$$\frac{1}{2} PQ \cdot \sin\alpha \, PR \cos\beta + \frac{1}{2} PR \sin\beta \, PQ \cos\alpha$$
$$\Downarrow$$
$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha \cos\beta + \sin\beta \cos\alpha$$

$PH = PQ \cdot \cos\alpha = PR \cdot \cos\beta$
$QH = PQ \cdot \sin\alpha$
$HR = PR \cdot \sin\beta$

Raggio inscritta





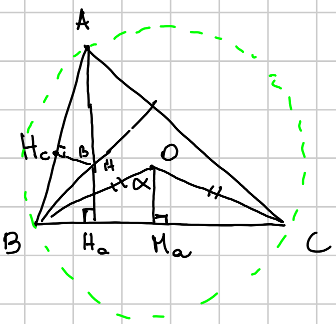
$r \leftarrow$ raggio cfr inscritta

$$r = ID \qquad \frac{ID}{BD} = \operatorname{tg}\frac{\beta}{2} \qquad \frac{ID}{CD} = \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}$$

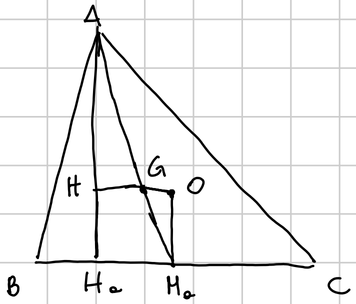
$$\frac{BD}{r} = \cot\frac{\beta}{2} \qquad \frac{CD}{r} = \cot\frac{\gamma}{2}$$

$$\frac{a}{r} = \frac{BD+CD}{r} = \cot\frac{\beta}{2} + \cot\frac{\gamma}{2}$$
$$\Downarrow$$
$$r = \frac{a}{\cot\frac{\beta}{2} + \cot\frac{\gamma}{2}}$$

Ortocentro e circocentro



$$OH_a = BO \cdot \cos\alpha = R\cos\alpha$$
$$AH = \frac{AH_c}{\sin\beta} = \frac{b\cos\alpha}{\sin\beta} = 2R\cos\alpha$$

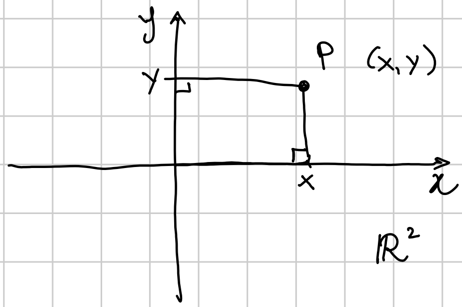


$$\underline{AG = 2\,GH_a}$$

$$\frac{AH}{OM_a} = 2 \qquad \frac{AG}{GH_a} = 2$$

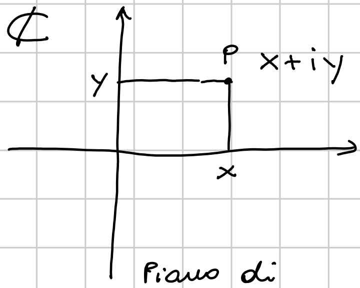
$\Longrightarrow$ O, G, H allineati

Complessi



$\mathbb{R}^2$

Forma cartesiana



Piano di Gauss

$i^2 = -1$

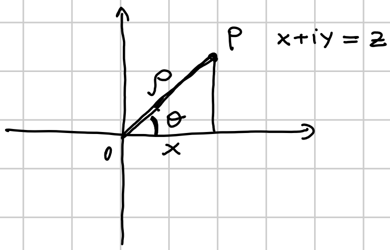
$i \Rightarrow$ unità immaginaria

$$\mathbb{C} = \{x + iy \ : \ x, y \in \mathbb{R}\}$$

$z = x + iy$

$x = Re(z)$ parte reale

$y = Im(z)$ parte immaginaria



$$z = x + iy = \rho\cos\theta + i\rho\sin\theta$$
$$= \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$$

$\hookrightarrow$ forma polare

$$e^{i\theta} := \cos\theta + i\sin\theta \quad \leftarrow$$
$$\Downarrow$$
$$z = \rho e^{i\theta}$$

$\theta = Arg(z)$ argomento

$\rho = |z|$ modulo

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases} \longleftrightarrow \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \operatorname{arctg}\frac{y}{x} \end{cases}$$

$$\rho^2(\sin^2\theta + \cos^2\theta) = x^2 + y^2$$

$$\Downarrow$$

$$\rho = \sqrt{x^2+y^2}$$

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{y}{x} \implies \theta = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$$

Operazioni

$$z = a+ib = \rho_1 e^{i\theta_1}$$
$$\omega = c+id = \rho_2 e^{i\theta_2}$$

- SOMMA

$$z+\omega = (a+ib)+(c+id) = (a+c)+i(b+d)$$

- PRODOTTO

$$z\cdot w = (a+ib)(c+id) = ac + iad + ibc - bd$$
$$= (ac-bd) + i(ad+bc)$$

$$\boxed{\begin{aligned} a &= \rho_1 \cos\theta_1 \\ b &= \rho_1 \sin\theta_1 \\ c &= \rho_2 \cos\theta_2 \\ d &= \rho_2 \sin\theta_2 \end{aligned}}$$

$$= \rho_1\rho_2(\cos\theta_2\cos\theta_1 - \sin\theta_1\sin\theta_2) + i\rho_1\rho_2(\cos\theta_1\sin\theta_2 + \sin\theta_1\cos\theta_2)$$
$$= \rho_1\rho_2\left(\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)\right)$$
$$= \rho_1\rho_2\, e^{i(\theta_1+\theta_2)}$$

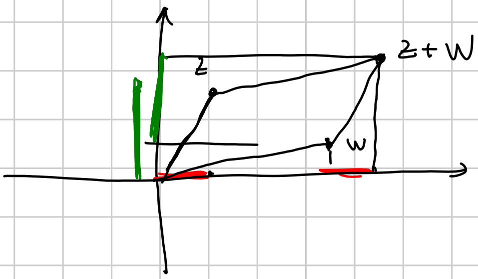
$$\rho_1 e^{i\theta_1}\cdot\rho_2 e^{i\theta_2} = \rho_1\rho_2\, e^{i(\theta_1+\theta_2)}$$

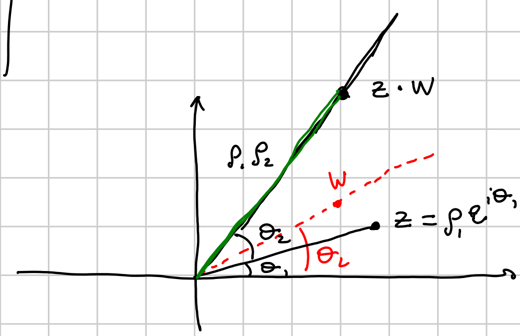
$$\boxed{e^x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}}$$

$$a^x\cdot a^y = a^{x+y}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{e^{i\theta_1}\cdot e^{i\theta_2} = e^{i(\theta_1+\theta_2)}}$$





Se $|w| = \rho_2 = 1$, moltiplicare per w, equivale a ruotare di un angolo $\theta_2 = \arg(w)$

Pag. 3

Es. 5 Prostaferesi e Werner
Es. 1, 2, 3

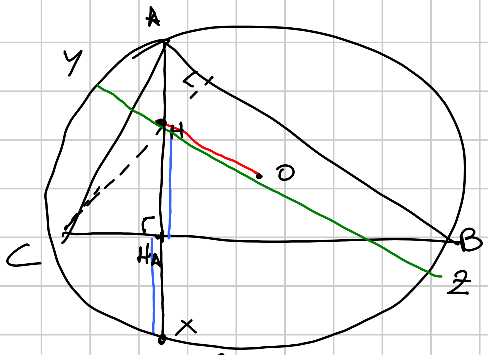
* Es. 4

Es. 6 Stewart
Es. 7 Erone
Es. 8 formule tg

Pag. 32

Es. 1, 4, 8, 9, 10

Correzione esercizi

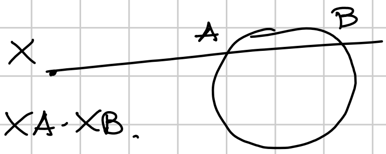


Es 4

$BH_A = c\cos\beta$

$OH^2 = 9R^2 - (a^2+b^2+c^2)$

Potenza rispetto ad una circonferenza + qualcosa sulla simmetrica di H rispetto ai lati.



$\operatorname{Pow} H = HY \cdot HZ = (R-OH)(R+OH) = R^2 - OH^2$

$\operatorname{Pow} H = AH \cdot HX = 2\, AH \cdot HH_A = 2\, AH\,(AH_A - AH)$

$AH_A = b\sin\gamma = 2R\sin\beta\sin\gamma$ $\quad \boxed{\dfrac{b}{\sin\beta} = 2R}$

$AH = 2R\cos\alpha$

$R^2 - OH^2 = 2(2R\cos\alpha)(2R(\sin\beta\sin\gamma - \cos\alpha)) = 8R^2(\cos\alpha\sin\beta\sin\gamma - \cos^2\alpha)$

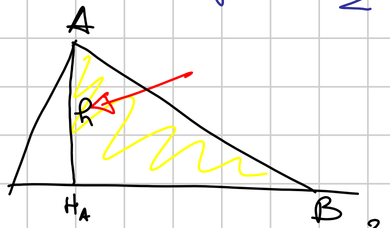
$= 8R^2(\cos\alpha\sin\beta\sin\gamma - 1 + \sin^2\alpha) = -8R^2 +$

$8R^2\left(\cos\alpha\,\dfrac{b}{2R}\,\dfrac{c}{2R} + \dfrac{a^2}{4R^2}\right) = -8R^2 + \underset{b^2+c^2-a^2}{\underset{\shortparallel}{2bc\cos\alpha}} + 2a^2$

$= -8R^2 + a^2 + b^2 + c^2$

$A^2 = p(p-a)(p-b)(p-c)$ con $p = \frac{a+b+c}{2}$.

$A^2 = \frac{a^2 h^2}{4}$



$h = c \cdot \sin\beta \Rightarrow$

$h^2 = c^2 \sin^2\beta = c^2(1-\cos^2\beta) = c^2 - \cancel{c^2}\left(\frac{a^2+c^2-b^2}{2a\cancel{c}}\right)^2$

$A^2 = \frac{a^2\left(c^2 - \left(\frac{a^2+c^2-b^2}{2a}\right)^2\right)}{4} = \frac{a^2c^2 - \frac{(a^2+c^2-b^2)^2}{4}}{4}$

Es 8

$(\alpha+\beta+\gamma = 180°)$

$\operatorname{tg}(\alpha) + \operatorname{tg}(\beta) + \operatorname{tg}(\gamma) = \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta \operatorname{tg}\gamma$

$\operatorname{tg}(180° - x) = -\operatorname{tg}(x)$

$\gamma = 180° - \alpha - \beta$.

$\operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}(180 - \alpha - \beta) = -\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$

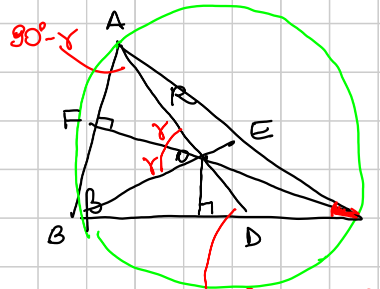
$= \boxed{-\frac{\operatorname{tg}(\alpha) + \operatorname{tg}(\beta)}{1 - \operatorname{tg}(\alpha)\operatorname{tg}(\beta)}}$

$a + b - \frac{a+b}{1-ab} = -ab\frac{a+b}{1-ab} \Leftrightarrow \cancel{a+b} - a^2b - ab^2 - \cancel{a+b}$

$\quad = -ab(a+b)$ ok

$\operatorname{tg}\gamma = \boxed{\frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta - 1}}$

Es. 8 pag. 32



$\underbrace{\frac{1}{AD} + \frac{1}{BE} + \frac{1}{CF} = \frac{2}{AO}}$

$\frac{AD}{\sin\beta} = \frac{AB}{\sin(A\hat{D}B)} = \frac{c}{\sin(90° - \beta + \gamma)} = \frac{c}{\cos(\beta - \gamma)}$

$180° - \beta - (90° - \gamma) = 90° - \beta + \gamma$

$$AD = \frac{c \sin\beta}{\cos(\beta-\gamma)} = \frac{2R \sin\beta \sin\gamma}{\cos(\beta-\gamma)} \qquad \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$$

$$BE = 2R \frac{\sin\alpha \sin\gamma}{\cos(\alpha-\gamma)}$$

$$\frac{1}{AD} + \frac{1}{BE} + \frac{1}{CF} = \frac{2}{R}$$

$$\parallel$$

$$\frac{\cos(\beta-\gamma)}{2\cancel{R}\sin\beta\sin\gamma} + \frac{\cos(\gamma-\alpha)}{2\cancel{R}\sin\alpha\sin\gamma} + \frac{\cos(\alpha-\beta)}{2\cancel{R}\sin\alpha\sin\beta} = \frac{2}{\cancel{R}}$$

$$\sin\alpha \cos(\beta-\gamma) + \sin\beta \cos(\gamma-\alpha) + \sin\gamma \cos(\alpha-\beta) = 4 \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma$$

$$\parallel$$

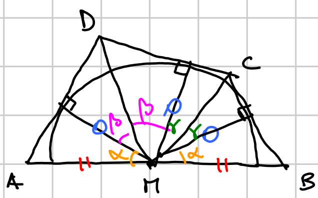
$$\sin\alpha (\cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma) + \sin\beta (\qquad) + \sin\gamma (\cos \dots)$$

$$\sin\alpha \sin\beta \sin\gamma = \sin\alpha \cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\cos\alpha\cos\gamma + \sin\gamma\cos\alpha\cos\beta$$

$$\Updownarrow$$

$$\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta \operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma$$

Es. 8 p. 32



$$AB^2 = 4\, BC \cdot AD$$

$$AB = \frac{2R}{\cos\alpha} \qquad BC = R(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\gamma)$$

$$AD = R(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta)$$

$$\frac{1}{\cos^2\alpha} = (\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\gamma)(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta)$$

$$\alpha + \beta + \gamma = 90^\circ$$

$$\parallel$$

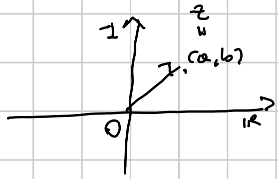
$$\operatorname{tg}^2\alpha + 1$$

G2 BASIC - Vettori; Complessi; Cartesiane

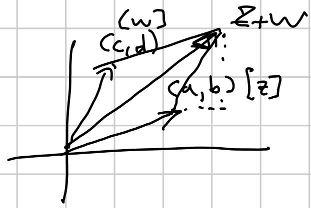
Titolo nota 03/09/2014

Vettori $\doteq$ Numeri Complessi $\doteq$ $\mathbb{R}^2$

$a+bi=z$ $\qquad i^2=-1$ $\qquad \vec{Oz}$



$\underset{z}{(a+bi)}+\underset{w}{(c+di)} = (a+c)+(b+d)i$



$\alpha \in \mathbb{C}$

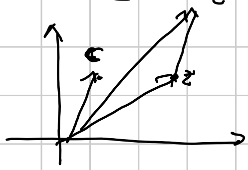
αz ?

Rot ↺ arg α + Omotetia ragione mod α

"SPIRAL SIMILARITY" ... Traslazione di un vettore c: $z' = z+c$

(1) Rotazione attorno all'origine di α

$z' = z \cdot e^{i\alpha}$



Rotazione attorno a c con angolo α ?

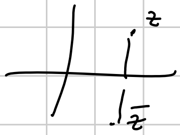
$$z' = (z-c)e^{i\alpha} + c$$

In comune

Punto medio a e b $\quad \frac{a+b}{2}$ [Punto medio $\vec{A}$ e $\vec{B}$ $\frac{\vec{A}+\vec{B}}{2}$]

Oss. (0)

$\bar{z}$ = simmetrico wrt $\mathbb{R}$



$z\bar{z} = |z|^2$

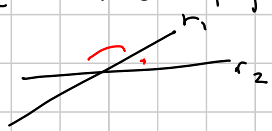
$\frac{z+\bar{z}}{2} = \operatorname{Re} z \qquad \frac{z-\bar{z}}{2i} = \operatorname{Im} z$

Oss. (1)

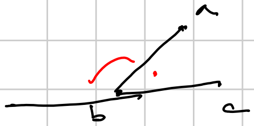
$\boxed{z \in \mathbb{R} \iff z = \bar{z}}$

$\boxed{z \in \operatorname{Im} \iff z = -\bar{z}}$

$\measuredangle(r_1, r_2)$ $\quad r_1$ in senso ↺ per farla coincidere con r_2

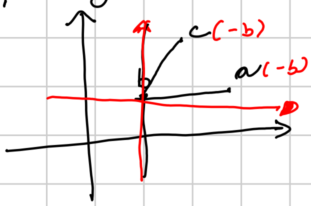


$\measuredangle\, a\,b\,c$ l'angolo con cui ruotare ab in senso ↺ per ottenere bc



Nota: In generale $\measuredangle\, abc \neq \measuredangle\, abc$ ma può essere o lui o il suo supplementare

Eq. angolo



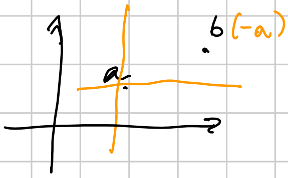
Una relazione con $\varphi = \measuredangle\, abc$:

$$c-b = (a-b)\, e^{i\varphi}\, \frac{|c-b|}{|a-b|}$$

$$\boxed{\frac{c-b}{a-b} = e^{i\varphi}\frac{|c-b|}{|a-b|}}$$

— o —

$z = \lambda a \qquad \lambda \in \mathbb{R}$



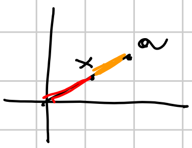
Retta per a e b?

$z = \lambda(b-a)+a \qquad \lambda \in \mathbb{R}$

a, b, c allineati $\Longleftrightarrow$ $c \in$ retta per a, b $\Longleftrightarrow \exists\, \mu \in \mathbb{R}$ t.c. $c = \mu(b-a)+a \Longleftrightarrow \frac{c-a}{b-a} \in \mathbb{R} \Longleftrightarrow \boxed{\frac{c-a}{b-a} = \overline{\frac{c-a}{b-a}} = \frac{\bar c-\bar a}{\bar b-\bar a}}$

$\Longleftrightarrow$ a, b, c allineati

Domanda:



$\frac{|x|}{|a|} = \lambda$? $x = \lambda a$

ok.

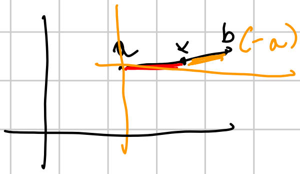
$\frac{|x|}{|x-a|} = \lambda$

$\frac{\cdot}{\cdot} = \lambda \Longrightarrow \frac{\cdot}{\cdot} =$

$\frac{R+A}{R} = \frac{1}{\frac{R}{R+A}} = \frac{1+A}{R} = 1 + \frac{1}{\lambda}$

$\frac{R}{R+A} = \frac{\lambda}{1+\lambda}$

$$\boxed{x = \frac{\lambda}{\lambda+1}\, a}$$



$$\boxed{x = \frac{\lambda}{\lambda+1}(b-a)+a = \frac{a+b\lambda}{\lambda+1}}$$

$$\boxed{\vec X = \frac{\vec A + \vec B\lambda}{1+\lambda}}$$

Parallela a ab passante per c : $z = c + \lambda(b-a)$ $\lambda \in \mathbb{R}$

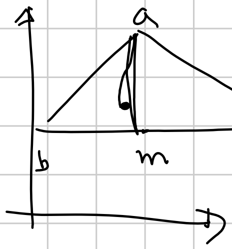
$$\frac{d-c}{b-a} = \frac{\bar d - \bar c}{\bar b - \bar a} \iff ab \parallel cd$$

Perpendicolare ad ab passante per c: $z = c + i\lambda(b-a)$ $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\frac{d-c}{b-a} = -\frac{\bar d - \bar c}{\bar b - \bar a} \iff ab \perp cd$$

E gli angoli? $\measuredangle abc = \measuredangle xyz$

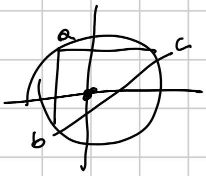
—— o ——



$$m = \frac{b+c}{2}$$

$$g = \frac{a+2m}{3} = \frac{a+b+c}{3}$$

~ o ~



o g h $\frac{og}{gh} = \frac{1}{2}$

$$g = \frac{o + \frac{1}{2}h}{1+\frac{1}{2}} = \frac{2o+h}{3}$$

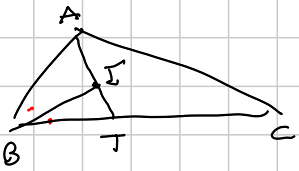
$$3g = 2o + h$$

$$\boxed{a+b+c = \cancel{2o}+h}$$

$$h = a+b+c$$

$\vec{O} \equiv$ origine $\left[\vec{H} = \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} \quad \ldots \quad \vec{G} = \frac{\vec{A}+\vec{B}+\vec{C}}{3}\right]$

Incentro



$$\frac{BT}{TC} = \frac{c}{b} \qquad BT = \frac{ca}{b+c} \qquad TC = \frac{ba}{b+c}$$

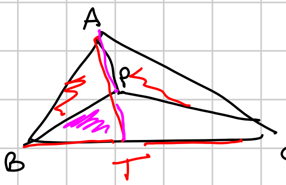
$$\vec{T} = \frac{\vec{B} + \frac{c}{b}\vec{C}}{1+\frac{c}{b}} = \frac{b\vec{B} + c\vec{C}}{b+c}$$

$$\frac{AI}{IT} = \frac{c}{\frac{ca}{b+c}} = \frac{b+c}{a}$$

$$\vec{I} = \frac{\vec{A} + \frac{b+c}{a}\vec{T}}{1+\frac{b+c}{a}} = \frac{a\vec{A} + b\vec{B} + c\vec{C}}{a+b+c}$$

—— o ——

$$\vec{P} = \frac{\alpha\vec{A} + \beta\vec{B} + \gamma\vec{C}}{\alpha+\beta+\gamma}$$

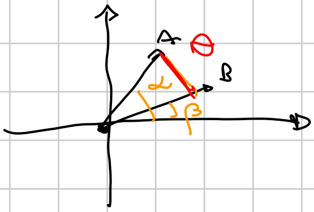


$\Delta PBC : \Delta PCA : \Delta PAB =$
$\alpha : \beta : \gamma$

$$\left[\frac{\alpha}{\alpha+\beta+\gamma} : \frac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma} : \frac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}\right]$$

—— o ——

PRODOTTO SCALARE



Vettori $\in \mathbb{R}^2_{(0)}$

$A = (a_1, a_2)$
$B = (b_1, b_2)$

$a = |\overline{OA}|$
$b = |\overline{OB}|$

$a(b+c) \overset{?}{=} ab + ac$

$\langle \vec{A}, \vec{B} \rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2$

$\vec{A} \cdot \vec{B}$

$= a \cos\alpha \, b \cos\beta + a \sin\alpha \, b \sin\beta =$
$= ab(\cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta) =$
$= ab \cos(\alpha - \beta) = ab \cos\theta =$
$= |\overline{OA}| \, |\overline{OB}| \cos\theta$

SIMM. $\langle \vec{A}, \vec{B} \rangle = \langle \vec{B}, \vec{A} \rangle$

BILINEARE $\rightarrow \langle \vec{A}, \vec{B} + \vec{C} \rangle = \langle \vec{A}, \vec{B} \rangle + \langle \vec{A}, \vec{C} \rangle$ (1)
$\rightarrow \langle \vec{A} + \vec{B}, \vec{C} \rangle = \langle \vec{A}, \vec{C} \rangle + \langle \vec{B}, \vec{C} \rangle$ (2)

$\vec{B} = (b_1, b_2)$
$\vec{C} = (c_1, c_2)$
$\vec{B} + \vec{C} = (b_1 + c_1, b_2 + c_2)$

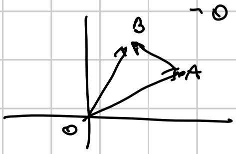
(1) $LHS = a_1(b_1 + c_1) + a_2(b_2 + c_2)$
$RHS = \underline{a_1 b_1 + a_2 b_2} + a_1 c_1 + a_2 c_2$

Oss.
$OA \perp OB \iff \langle \overline{OA}, \overline{OB} \rangle = 0$

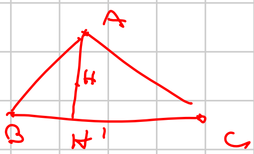
$\overline{AB} \cdot \overline{CD} = |\overline{AB}| \, |\overline{CD}| \cos\theta$ $\quad (AB \perp CD \iff \overline{AB} \cdot \overline{CD} = 0)$

$\| (\overline{OB} - \overline{OA})$

$\hookrightarrow (\overline{OB} - \overline{OA}) \cdot (\overline{OD} - \overline{OC}) \overset{\dagger}{=} \overline{OB} \cdot \overline{OD} - \overline{OB} \cdot \overline{OC} \cdots\cdots$
$- \overline{OA} \cdot \overline{OD} + \overline{OA} \cdot \overline{OC}$



Problemino



$\vec{H} = \vec{A} + \vec{B} + \vec{C}$
$\vec{H'} = ?$

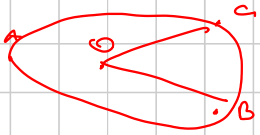
$H' \in BC \rightarrow \vec{H'} = \dfrac{\vec{B} + \lambda \vec{C}}{1 + \lambda}$

$AH' \perp BC \iff \overline{AH'} \cdot \overline{BC} = 0$
$(\vec{H'} - \vec{A}) \cdot (\vec{C} - \vec{B}) = 0$

$\vec{H'} \cdot \vec{C} - \vec{H'} \cdot \vec{B} - \vec{A} \cdot \vec{C} + \vec{A} \cdot \vec{B} = 0$

$\left(\dfrac{\vec{B} + \lambda \vec{C}}{1 + \lambda} \right) \cdot \vec{C} - \left(\dfrac{\vec{B} + \lambda \vec{C}}{1 + \lambda} \right) \cdot \vec{B} - \vec{A} \cdot \vec{C} + \vec{A} \cdot \vec{B} = 0$

$$\frac{1}{1+\lambda}\underbrace{\vec B\cdot\vec C} + \frac{\lambda}{1+\lambda}\underbrace{\vec C\cdot\vec C} - \frac{1}{1+\lambda}\underbrace{\vec B\cdot\vec B} - \frac{\lambda}{1+\lambda}\underbrace{\vec B\cdot\vec C} - \underbrace{\vec A\cdot\vec C} + \underbrace{\vec A\cdot\vec B} = 0$$



$$\vec C\cdot\vec C = OC^2 = R^2$$

$$\vec B\cdot\vec C = R^2\cdot\cos 2\alpha$$

$$\vec C\cdot\vec A = R^2\cdot\cos 2\beta$$

$$\vec A\cdot\vec B = R^2\cdot\cos 2\gamma$$

GI

$$GI^2 = \vec{GI}\cdot\vec{GI} = (\vec I-\vec G)(\vec I-\vec G) = \left(\frac{a\vec A+b\vec B+c\vec C}{a+b+c} - \frac{\vec A+\vec B+\vec C}{3}\right)(a\ldots) = \left(\frac{(2a-b-c)\vec A+(-a+2b-c)\vec B+(-a-b+2c)\vec C}{3(a+b+c)}\right)\cdot(\ldots) =$$

$AH =$ $\quad \vec H = \vec A+\vec B+\vec C$, $\quad \vec{A'} = \vec A$

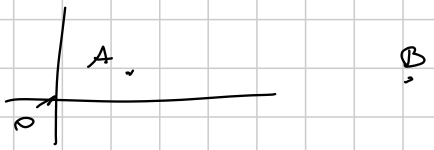
$$AH^2 = (\vec B+\vec C)\cdot(\vec B+\vec C) = R^2+2R^2\cos 2\alpha+R^2 = 2R^2(1+\cos 2\alpha)$$

$$AH = \sqrt2\, R\sqrt{\underset{2\cos^2\alpha}{\underset{\|}{1+\cos 2\alpha}}} = 2R\cos\alpha \text{ [Controlla]}$$

$$x^2+y^2+\alpha x+\beta y+c=0$$

$$C\left(-\frac{\alpha}{2}, -\frac{\beta}{2}\right)$$

$$r=\sqrt{\left(-\frac{\alpha}{2}\right)^2+\left(-\frac{\beta}{2}\right)^2-c}$$



$AX = XB$?

$\frac{AX}{XB} = \lambda \qquad \lambda > 0$

$\Updownarrow \ \dots$

$A = (a_1, a_2)$

$B = (b_1, b_2)$

$X = (x, y)$

$$AX^2 = \lambda^2 XB^2$$

$$(x-a_1)^2 + (y-a_2)^2 = \lambda^2\left[(x-b_1)^2 + (y-b_2)^2\right]$$

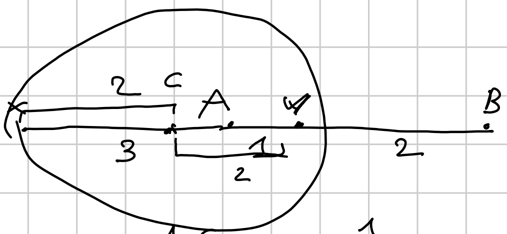
$$(1-\lambda^2)x^2 + (1-\lambda^2)y^2 + 2(\lambda^2 b_1 - a_1)x + 2(\lambda^2 b_2 - a_2)y \dots = 0$$

$$x^2 + y^2 - 2\underbrace{\frac{a_1-\lambda^2 b_1}{1-\lambda^2}}_{\alpha_1} x - 2\underbrace{\frac{a_2-\lambda^2 b_2}{1-\lambda^2}}_{\beta_1} y + \dots = 0$$

$$C\left(\frac{a_1-\lambda^2 b_1}{1-\lambda^2}, \frac{a_2-\lambda^2 b_2}{1-\lambda^2}\right) = \frac{\vec{A} - \lambda^2 \vec{B}}{1-\lambda^2}$$

$C \in AB$

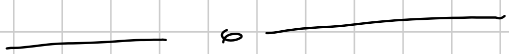
$$\left|\frac{AC}{CB}\right| = \cancel{\phi}\ \lambda^2$$

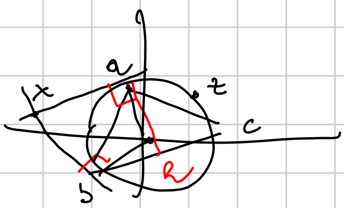


3

$\frac{AX}{XB} = \frac{1}{2}$

$\frac{AC}{CB} = \frac{1}{4}$





$|z| = 1 \Rightarrow |z|^2 = 1 \Rightarrow z\bar{z} = 1$

$\Rightarrow \bar{z} = \frac{1}{z}$

$\bar{a} = \frac{1}{a}$ e ardide

$x = ?$

$xa \perp oa$ (1)

$xb \perp ob$

(1) $\frac{a - \cancel{0}}{a - x} = -\frac{\bar{a} - \cancel{0}}{\bar{a} - \bar{x}}$

$$\frac{a}{a-x} = -\frac{\frac{1}{a}}{\frac{1}{a}-\bar{x}} = -\frac{\frac{1}{a}}{\frac{1-a\bar{x}}{a}} = \frac{1}{a\bar{x}-1}$$

$$a(a\bar{x}-1) = a-x$$

$$a^2\bar{x} - a = a - x$$

$$a^2\bar{x} = 2a - x$$

$$\bar{x} = \frac{2a-x}{a^2}$$

(2) $\bar{x} = \frac{2b-x}{b^2}$

$(1)=(2) \Rightarrow \frac{2a-x}{a^2} = \frac{2b-x}{b^2}$

$$b^2(2a-x) = a^2(2b-x)$$

$$2ab^2 - 2a^2b = x(b^2-a^2)$$

$$2ab(b-a) = x(b+a)(b-a)$$

$$x = \frac{2ab}{a+b}$$

$$h = \frac{1}{2}\left(a+b+c-\frac{bc}{a}\right) \quad \ldots$$

11-12 Veloce Correzione correzione?

13 – 15 – 16 – 19 Complessi (18)

22 (2, 3) – 23 Vettori pag. 9 - 3 reg.

12 – 13 (ultimi 2 punti) – 15 – 19

$$\langle \bar{A}, \bar{B} \rangle = R^2 \cos 2\gamma = R^2(2\cos^2\gamma - 1) =$$

$$=$$

$$R = \frac{abc}{4A}$$

$$A^2 = \frac{-a^4-b^4-c^4+2a^2b^2+2b^2c^2+2a^2c^2}{16} =$$

$$R^2 = \frac{a^2b^2c^2}{16A^2} = \frac{a^2b^2c^2}{--}$$

$$2\cos^2\gamma - 1 = 2\left(\frac{b^2+a^2-c^2}{2ab}\right)^2 - 1 =$$

$$= \frac{b^4+a^4+c^4+\cancel{2a^2b^2} - 2c^2b^2 - 2a^2c^2}{2a^2b^2}$$

$$\overline{AM}^2 = \overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AM} = \left(\frac{\vec{B}+\vec{C}-2\vec{A}}{2}\right)\cdot\left(\frac{\vec{B}+\vec{C}-2\vec{A}}{2}\right) =$$

$$LHS = \frac{1}{4}\left(\vec{B}\cdot\vec{B}+\vec{C}\cdot\vec{C}+4\vec{A}\cdot\vec{A}+2\vec{B}\cdot\vec{C}-4\vec{A}\cdot\vec{B}-4\vec{A}\cdot\vec{C}\right)$$

$$RHS \overset{?}{=} \alpha|\overrightarrow{AB}|^2+\beta|\overrightarrow{AC}|^2+\gamma|\overrightarrow{BC}|^2$$

$$\alpha(\vec{B}-\vec{A})\cdot(\vec{B}-\vec{A})+\beta(\vec{C}-\vec{A})\cdot(\vec{C}-\vec{A})+\gamma(\vec{C}-\vec{B})\cdot(\vec{C}-\vec{B})$$

$$=(\alpha+\gamma)\vec{B}\cdot\vec{B}+(\beta+\gamma)\vec{C}\cdot\vec{C}+(\alpha+\beta)\vec{A}\cdot\vec{A}-2\alpha\vec{A}\cdot\vec{B}-2\beta\vec{A}\cdot\vec{C}$$
$$-2\gamma\vec{B}\cdot\vec{C}$$

$$-2\gamma=\frac{1}{2} \qquad \gamma=-\frac{1}{4}$$

$$-2\alpha=-1 \Rightarrow \alpha=+\frac{1}{2}$$
$$\beta=+\frac{1}{2}$$

$$= \boxed{\frac{1}{2}\underset{c^2}{|\overrightarrow{AB}|^2}+\frac{1}{2}\underset{b^2}{|\overrightarrow{AC}|^2}-\frac{1}{4}\underset{a^2}{|\overrightarrow{BC}|^2}}$$

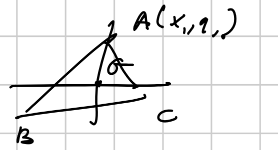
$$\sum m^2 = \sum_{cyc}\frac{1}{2}c^2+\frac{1}{2}b^2-\frac{1}{4}a^2 = \boxed{\frac{3}{4}(a^2+b^2+c^2)}$$

Es $A(x_1,y_1)$ $\quad X(x,y)$
$B(x_2,y_2)$ $\quad \overrightarrow{XA}\cdot\overrightarrow{XB}+\overrightarrow{XB}\cdot\overrightarrow{XC}+\overrightarrow{XA}\cdot\overrightarrow{XC}=0$
$C(x_3,y_3)$

$$\overrightarrow{XA}\cdot\overrightarrow{XB}=(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OX})\cdot(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OX})=$$
$$=x_1x_2+y_1y_2-(xx_1+\boxed{yy_1})-(xx_2+yy_2)+x^2+y^2$$
$$\overrightarrow{XB}\cdot\overrightarrow{XC}=x_2x_3+y_2y_3-(xx_2+yy_2)-(xx_3+yy_3)+x^2+y^2$$
$$\overrightarrow{XC}\cdot\overrightarrow{XA}=x_1x_3+y_1y_3-(xx_1+\boxed{yy_1})-(xx_3+yy_3)+x^2+y^2$$

(1)
$$x^2+y^2-\underbrace{\frac{2x(x_1+x_2+x_3)}{3}}_{\alpha}-\underbrace{\frac{2y(y_1+y_2+y_3)}{3}}_{\beta}+\frac{x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3}{3}+\frac{y_1y_2+y_2y_3+y_1y_3}{3}=0$$

$$\left(-\frac{\alpha}{2}, -\frac{\beta}{2}\right) = \left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$$



$\boxed{\text{Origine nel baricentro}}$

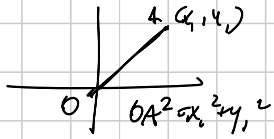
$$x_1+x_2+x_3=0$$
$$y_1+y_2+y_3=0$$

$(0,0) \equiv$ baricentro

$$x^2+y^2$$

$$(\underset{\underset{0}{\parallel}}{x_1+x_2+x_3})^2 = x_1^2+x_2^2+x_3^2+2(x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3)$$

$$x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3 = -\frac{x_1^2+x_2^2+x_3^2}{2}$$
$$y_1y_2+y_2y_3+y_1y_3 = -\frac{y_1^2+y_2^2+y_3^2}{2}$$

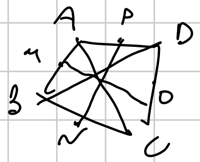


$$x^2+y^2 \underbrace{-\frac{(x_1^2+y_1^2)}{6}-\frac{(x_2^2+y_2^2)}{6}-\frac{(x_3^2+y_3^2)}{6}} = 0$$

$$R^2 = \frac{GA^2}{6}+\frac{GB^2}{6}+\frac{GC^2}{6} = \frac{\left(\frac{2}{3}AM\right)^2}{6}+\dots =$$
$$= \frac{2}{27}\sum AM^2 = \frac{2}{\cancel{27}_9}\cdot\frac{\cancel{3}}{\cancel{4}_2}(a^2+b^2+c^2) = \frac{a^2+b^2+c^2}{18}$$

19

$$AC \perp BD$$
$$\Updownarrow$$
$$MO = NP$$



$$M = \frac{A+B}{2} \qquad O = \frac{C+D}{2}$$
$$N = \frac{B+C}{2} \qquad P = \frac{A+D}{2}$$

$MO = NP \Leftrightarrow$

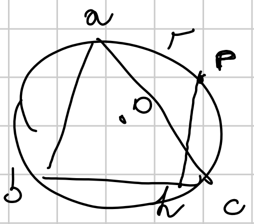
$$\Leftrightarrow MO^2 = NP^2 \Leftrightarrow \vec{MO}\cdot\vec{MO} = \vec{NP}\cdot\vec{NP} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (\vec{O}-\vec{M})(\vec{O}-\vec{M}) = (\vec{P}-\vec{N})(\vec{P}-\vec{N}) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left(\frac{C+D-A-B}{2}\right)\left(\frac{C+D-A-B}{2}\right) = \left(\frac{A+D-B-C}{2}\right)\left(\frac{A+D-B-C}{2}\right)$$

$$\cancel{C\cdot C}+\cancel{D\cdot D}+\cancel{A\cdot A}+\cancel{B\cdot B}+2C\cdot D\cancel{-2A\cdot C}-2B\cdot C-2A\cdot D\cancel{-2B\cdot D}+2A\cdot B$$
$$\cancel{C\cdot C}+\cancel{D\cdot D}+A\cdot A+B\cdot B-2D\cdot C-2A\cdot C+2B\cdot C+2A\cdot D-2B\cdot D-2A\cdot B$$
$$C\cdot D-B\cdot C-A\cdot D+A\cdot B=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow C(D-B)-A(D-B)=0$$

$$(C-A)(D-B)=0$$

$$\Rightarrow \vec{AC}\cdot\vec{BD}=0 \quad \Rightarrow AC\perp BD$$

13



$p\in\Gamma$

$h=?$

$$h\in bc \leftrightarrow \frac{h-c}{b-c}=\frac{\bar h-\bar c}{\bar b-\bar c} \quad (1)$$

$$ph\perp bc \leftrightarrow \frac{c-b}{h-p}=-\frac{\bar c-\bar b}{\bar h-\bar p} \quad (2)$$

$$-\frac{(h-c)}{b-c}=\frac{\bar h-\frac{1}{c}}{\frac{1}{b}-\frac{1}{c}}=\frac{\frac{c\bar h-1}{c}}{\frac{c-b}{bc}}\to c-h=bc\bar h-b$$

$$\boxed{\bar h=\frac{b+c-h}{bc}}$$

altrimenti con il lato

$$(2)\quad \frac{c-b}{h-p}=-\frac{\frac{1}{c}-\frac{1}{b}}{\frac{b+c-h}{bc}-\frac{1}{p}}=\frac{\frac{b-c}{bc}}{\frac{p(b+c-h)-bc}{bcp}}\Rightarrow$$

$$\frac{1}{h-p}=\frac{p}{p(b+c-h)-bc}$$

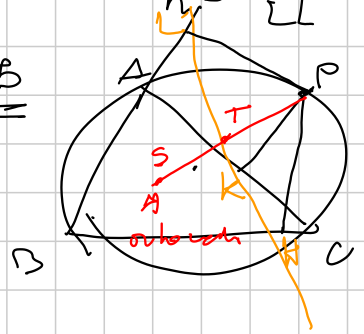
MODULO L'ERRORE

$$p(b+c)-hp-bc=ph-p^2$$

$$p(b+c)-bc+p^2=2ph$$

$$h=\frac{1}{2}\left[(b+c)-\frac{bc}{p}+p\right]=\frac{1}{2}\left[p+b+c-\frac{bc}{p}\right]$$

15



Centrato in O

⊙ABC ha raggio 1

$$h=\frac{1}{2}\left(p+b+c-\frac{bc}{p}\right)$$

$$k=\frac{1}{2}\left(p+a+c-\frac{ac}{p}\right)$$

$$l=\frac{1}{2}\left(p+a+b-\frac{ab}{p}\right)$$

$$\frac{h-k}{l-k}\stackrel{!}{=}\frac{\bar h-\bar k}{\bar l-\bar k}$$

$$LHS = \frac{\cancel{\frac{1}{2}}\left(b-a-\frac{bc}{p}+\frac{ac}{p}\right)}{\cancel{\frac{1}{2}}\left(b-c-\frac{ab}{p}+\frac{ac}{p}\right)} = \frac{\frac{p(b-a)-c(b-a)}{\cancel{p}}}{\frac{p(b-c)-a(b-c)}{\cancel{p}}} = \frac{(p-c)(b-a)}{(p-a)(b-c)}$$

$$\overline{LHS} = \frac{(\bar p-\bar c)(\bar b-\bar a)}{(\bar p-\bar a)(\bar b-\bar c)} = \frac{\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{c}\right)\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right)}{\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{a}\right)\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)} = \frac{\frac{c-p}{\cancel{pc}}\,\frac{a-b}{\cancel{ba}}}{\frac{a-p}{\cancel{pa}}\,\frac{c-b}{\cancel{bc}}} =$$

$$= \frac{(c-p)(a-b)}{(a-p)(c-b)} =$$

E.S.

PH è bisettrice della retta di simmetria di P (← ovvio in sintetica)

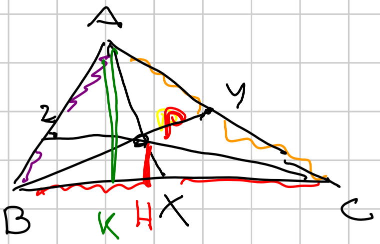
↑ ortocentro

FINE

G3 BASIC - Sintetica

Titolo nota 05/09/2014

Teorema di Ceva.



AX, BY, CZ concorrono $\overset{?}{\Leftrightarrow}$ $\frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} \cdot \frac{AZ}{ZB} = 1$

$\Rightarrow$ (1) $\frac{BX}{XC} = \frac{[PBX]}{[PXC]}$

$\quad\;\, \| \quad \frac{[ABX]}{[AXC]}$

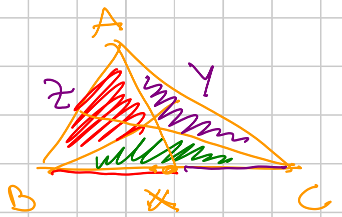
$\boxed{a:b = c:d}$ Hp

$\boxed{a-c : b-d = a:b}$ Th

$\frac{a-c}{b-d} = \frac{a}{b} \Updownarrow \boxed{\cancel{ab} - bc = \cancel{ab} - ad}$ $\qquad \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc$

$$\frac{[ABX]}{[AXC]} = \frac{[PBX]}{[PXC]} \Rightarrow \frac{[ABX]-[PBX]}{[AXC]-[PXC]} = \frac{[ABX]}{[AXC]} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{[PAB]}{[PCA]} = \frac{[ABX]}{[AXC]} = \frac{BX}{XC}$$



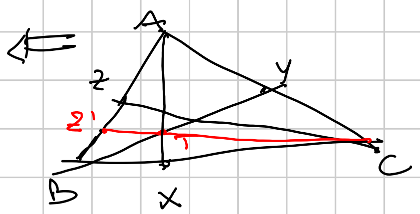
$\frac{BX}{XC} = \frac{\bullet}{\bullet}$

$\frac{CY}{YA} = \frac{\bullet}{\bullet}$

$\frac{AZ}{ZB} = \frac{\bullet}{\bullet}$

$$\frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} \cdot \frac{AZ}{ZB} = 1$$

$\Leftarrow$

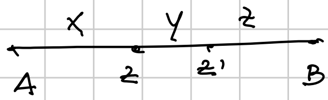


$\frac{BX}{XC} \frac{CY}{YA} \frac{AZ}{ZB} = 1$ x hp

$T = AX \cap BY$

$\frac{BX}{XC} \frac{CY}{YA} \frac{AZ'}{Z'B} = 1$ x Ceva diretto

$$\underbrace{\frac{AZ}{ZB} = \frac{AZ'}{Z'B}}$$

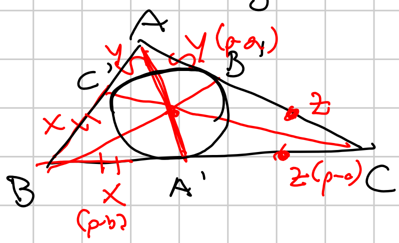


$$\underbrace{\frac{x}{y+z} = \frac{x+y}{z}}$$

$$\Updownarrow$$

$$\cancel{xz} = xy + \cancel{xz} + y^2 + yz$$
$$xy + y^2 + yz = 0$$

P.to di Gergonne



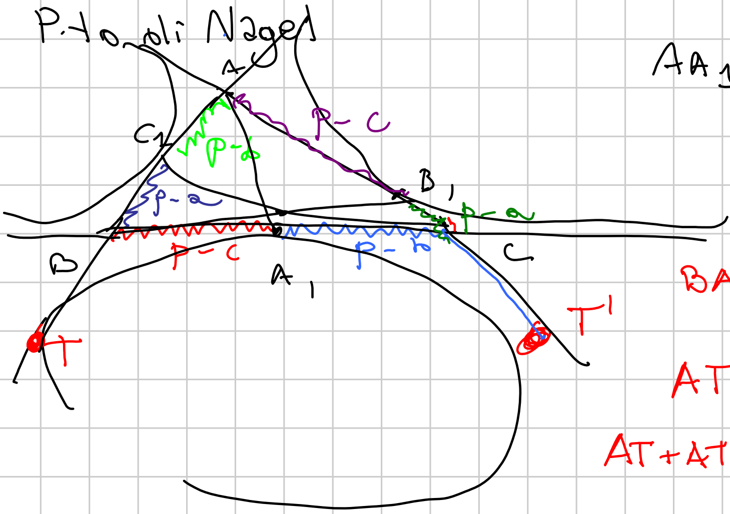
AA', BB', CC' concorrono

$$\begin{cases} x+z = a \\ y+z = b \\ x+y = c \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} y = \frac{b+c-a}{2} = p-a \\ x = \frac{c+a-b}{2} = p-b \\ z = \frac{a+b-c}{2} = p-c \end{cases}$$

$$x+y+z = \frac{a+b+c}{2} = p$$

$$\frac{BA'}{A'C}\,\frac{CB'}{B'A}\,\frac{AC'}{C'B} = \frac{\cancel{p-b}}{\cancel{p-c}}\,\frac{\cancel{p-c}}{\cancel{p-a}}\,\frac{\cancel{p-a}}{\cancel{p-b}} = 1.$$

P.to di Nagel



AA_1, BB_1, CC_1 concorrono

p.to di Nagel ABC

$BA_1 \stackrel{?}{=} p-c$

$AT = AT'$ (1)

$$AT + AT' = AB + \underset{\underset{BA_1}{\parallel}}{BT} + AC + \underset{\underset{CA_1}{\parallel}}{CT'} = 2p$$

$$\underbrace{BA_1 + CA_1}_{BC}$$

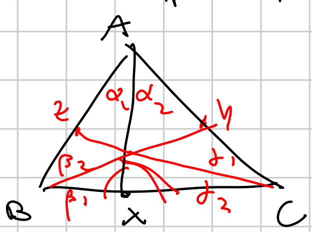
$AT = AT' = p$

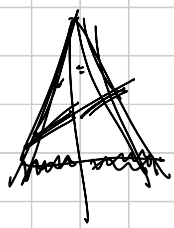
$BA_1 = BT = AT - AB = p - c$

$$\frac{BA_1}{A_1C}\,\frac{CB_1}{B_1A}\,\frac{AC_1}{C_1B} = \frac{\cancel{p-c}}{\cancel{p-b}}\,\frac{\cancel{p-a}}{\cancel{p-c}}\,\frac{\cancel{p-b}}{\cancel{p-a}} = 1.$$

Ceva trigonometrico

$$\frac{BX}{XC} = \frac{\dfrac{AB \sin\alpha_1}{\cancel{\sin AXB}}}{\dfrac{AC \sin\alpha_2}{\cancel{\sin AXC}}} =$$





$= \frac{c \sin\alpha_1}{b \sin\alpha_2}$ (*)

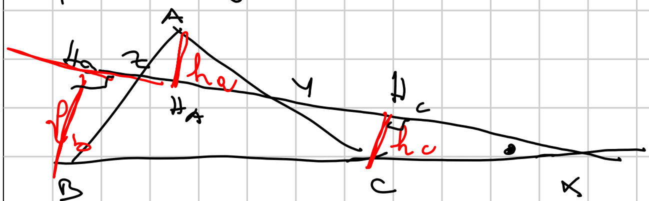
AX, BY, CZ concorrono $\iff$

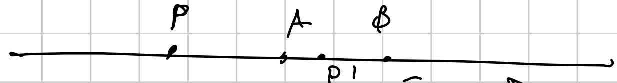
$$\frac{BX}{XC}\,\frac{CY}{YA}\,\frac{AZ}{ZB} = 1 \iff$$

$$\iff \frac{\cancel{c}\,\sin\alpha_1}{\cancel{b}\,\sin\alpha_2}\,\frac{\cancel{a}\,\sin\beta_1}{\cancel{c}\,\sin\beta_2}\,\frac{\cancel{b}}{\cancel{a}}\,\frac{\sin\gamma_1}{\sin\gamma_2} = 1 \Rightarrow$$

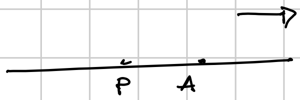
$$\iff \frac{\sin\alpha_1 \sin\beta_1 \sin\gamma_1}{\sin\alpha_2 \sin\beta_2 \sin\gamma_2} = 1$$

Menelao





$\frac{PA}{AB} > 0$



$\frac{P'A}{AB} < 0$

$PA > 0$
$AP < 0$

X, Y, Z allineati

$\Updownarrow$

$$\frac{BX}{XC}\,\frac{CY}{YA}\,\frac{AZ}{ZB} = -1$$

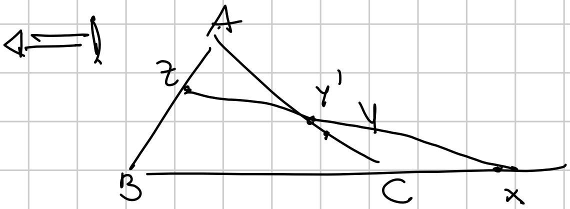
$\Downarrow$ $C\hat{X}H_c \sim B\hat{X}H_b \Rightarrow \frac{BX}{XC} = -\frac{BH_b}{CH_c} = -\frac{h_b}{h_c}$

$C\hat{Y}H_c \sim A\hat{Y}H_A \Rightarrow \frac{CY}{YA} = \frac{CH_c}{AH_A} = \frac{h_c}{h_a}$

$A\hat{Z}H_A \sim B\hat{Z}H_B \Rightarrow \frac{AZ}{ZB} = \frac{h_a}{h_b}$

$$\frac{BX}{XC}\cdot\frac{CY}{YA}\cdot\frac{AZ}{ZB} = -\frac{\cancel{h_b}}{\cancel{h_c}}\,\frac{\cancel{h_c}}{\cancel{h_a}}\,\frac{\cancel{h_a}}{\cancel{h_b}} = -1$$

$\Uparrow$

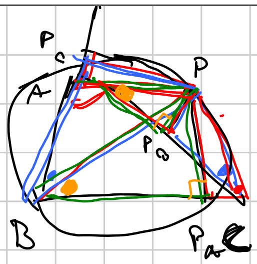


$\frac{BX}{XC}\,\frac{CY}{YA}\,\frac{AZ}{ZB} = -1$ x hp.

$\frac{BX}{XC}\,\frac{CY'}{Y'A}\,\frac{AZ}{ZB} = -1$ x menelao nell' hp. di andata

$\Downarrow$

$\frac{CY}{YA} = \frac{CY'}{Y'A}$ ASSURDO.



In modulo LHS

$$\frac{BP_A}{P_AC}\cdot\frac{CP_B}{P_BA}\cdot\frac{AP_C}{P_CB} = 1$$

$$\widehat{BP_AP} \sim \widehat{AP_BP}$$

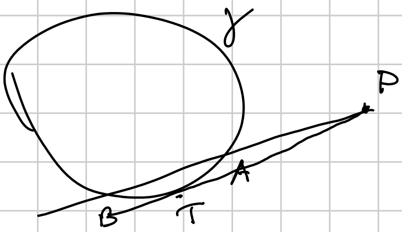
$$\frac{BP_A}{P_BA} = \frac{PB}{PA}$$

$$\widehat{PP_BC} \sim \widehat{PP_CB} \Rightarrow \frac{CP_B}{P_CB} = \frac{PC}{PB}$$

$$\widehat{AP P_C} \sim \widehat{PP_AC} \Rightarrow \frac{AP_C}{P_AC} = \frac{PA}{PC}$$

$$LHS = \frac{\cancel{PB}}{\cancel{PA}}\,\frac{\cancel{PC}}{\cancel{PB}}\,\frac{\cancel{PA}}{\cancel{PC}} = 1$$

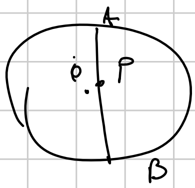
Est.



$\mathrm{Pow}_\gamma P > 0$

$PA \cdot PB = \text{cost}$ al variare della retta

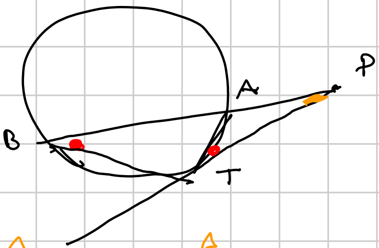
Int.



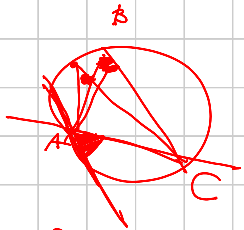
$\mathrm{Pow}_\gamma P < 0$

Oss.

Est.



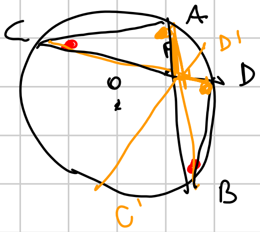
$PT^2 = PA \cdot PB$



Rossi =

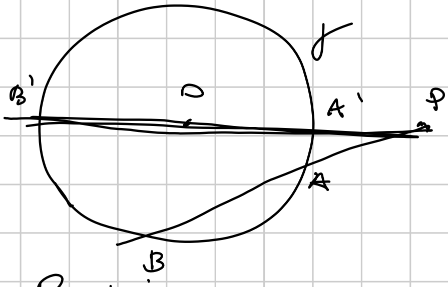
$$\widehat{PTA} \sim \widehat{PBT} \Rightarrow \frac{PT}{PA} = \frac{PB}{PT} \Rightarrow PT^2 = PA \cdot PB$$

Int.



$$\widehat{PAC} \sim \widehat{PDB} \Rightarrow \frac{PA}{PC} = \frac{PD}{PB} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow PA \cdot PB = PC \cdot PD$$

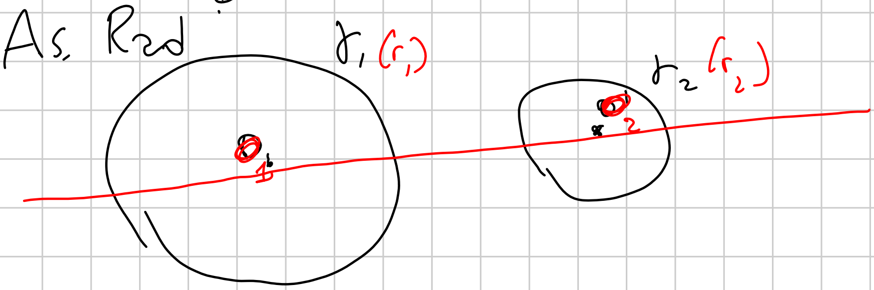


$PA \cdot PB = Pow_{\gamma} P = PA' \cdot PB' =$

$= (PO - \overset{r}{OA'})(PO + \overset{r}{OB'}) =$

$= PO^2 - r^2$

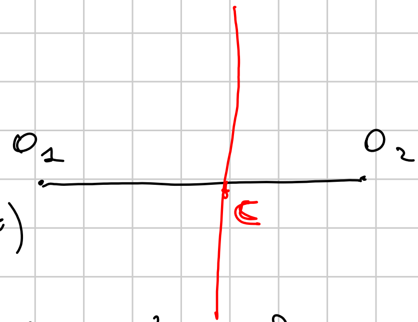
As. Rad



P s.t. $Pow_{\gamma_1} P = Pow_{\gamma_2} P$

$PO_1^2 - r_1^2 = PO_2^2 - r_2^2$

$$\boxed{PO_1^2 - PO_2^2 = r_1^2 - r_2^2 = k} \quad (*)$$

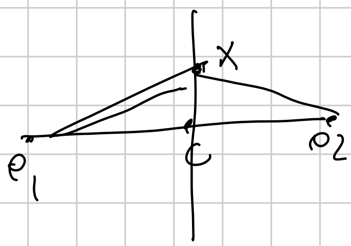


Chi è il luogo dei P t.c. $PO_1^2 - PO_2^2 = k$?

Claim: La retta ⊥ ad O_1O_2 passante per C dove

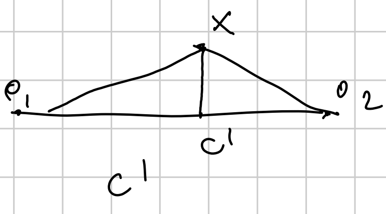
$$\boxed{CO_1^2 - CO_2^2 = k}$$

$$\begin{cases} CO_1 + CO_2 = O_1O_2 \\ CO_1^2 - CO_2^2 = k \end{cases}$$



$XO_1^2 - XO_2^2 \stackrel{?}{=} (XC^2 + O_1C^2) - (XC^2 + O_2C^2) = O_1C^2 - O_2C^2 = k$

X soddisfa (*)



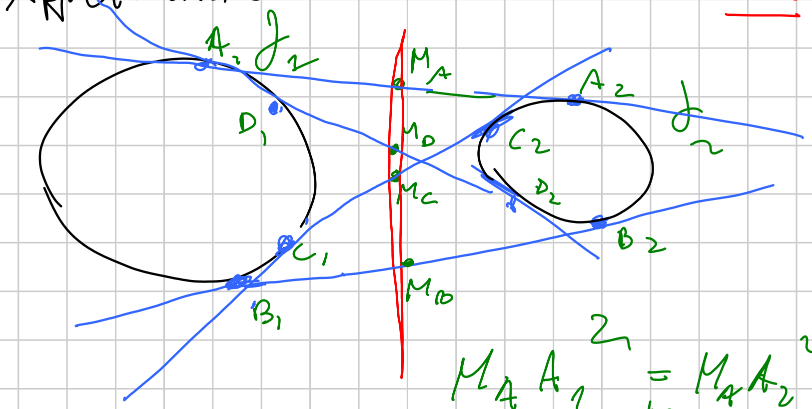
C'

$XO_1^2 - XO_2^2 = k \quad (*)$

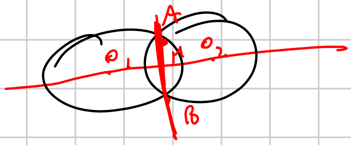
$\boxed{O_1C'^2 - O_2C'^2} = (XO_1^2 - XC'^2) - (XO_2^2 - XC'^2) = XO_1^2 - XO_2^2 = k$

Soddisfa $O_1C'^2 - O_2C'^2 = k$ ⇓

Applicazione

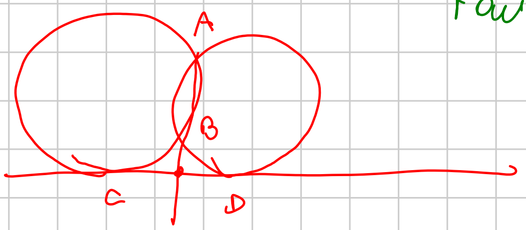


Oss.



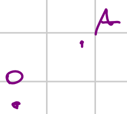
$$M_A A_1^2 \underset{\text{tp.}}{=} M_A A_2^2$$

$$Pow_{\gamma_1} M_A = Pow_{\gamma_2} M_A$$



$AB \cap CD \longrightarrow$ punto medio di CD.

OMOTETIA

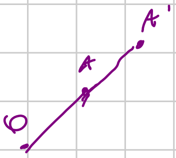


A'

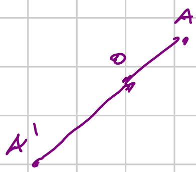
O, A, A' allineati

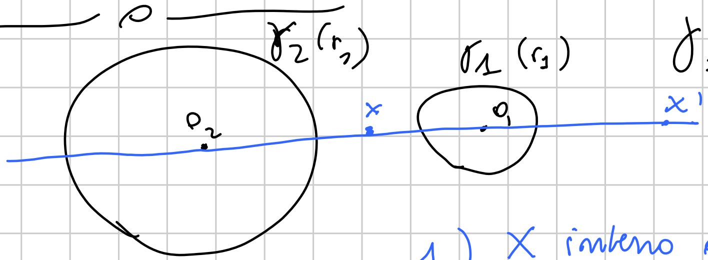
$$\frac{OA'}{OA} = \lambda$$

$\lambda > 0$



$\lambda < 0$





$\gamma_1 \longrightarrow \gamma_2$

$X \in O_1 O_2$

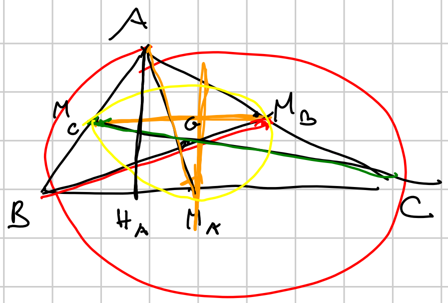
1) X interno ad $O_1 O_2$

X t.c. $\dfrac{XO_2}{XO_1} = -\dfrac{r_2}{r_1}$

$$\left[\frac{\vec{A} + \lambda \vec{B}}{1+\lambda}\right]$$

2) X' esterno ad O_1O_2

X' t.c. $\frac{X'O_2}{X'O_1} = \frac{r_2}{r_1}$



Cahs G $\lambda = -\frac{1}{2}$

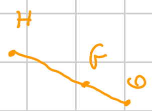
$BC \longrightarrow M_BM_C$

$Alt_A \longrightarrow \perp$ a M_BM_C passante per M_A

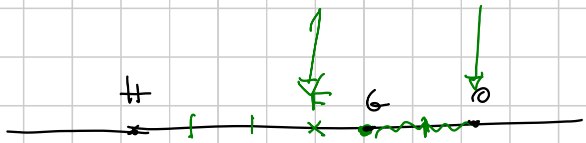
$\perp$ a BC passante per M_A

Asse di BC

$H(ABC) \longrightarrow O(ABC)$



H, G, O allineati $\frac{HG}{GO} = 2$ retta di Eulero



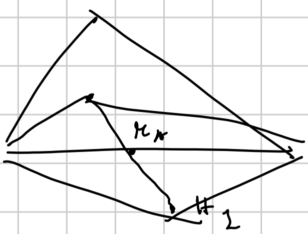
Un centro di omotetia che manda $\odot M_AM_BM_C$ in $\odot ABC$

Omotetia di centro G e rapporto -2 manda $\odot M_AM_BM_C$ in $\odot ABC$

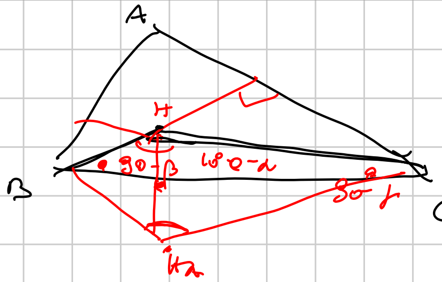
F O

Oss. 1 Il centro di $\odot M_AM_BM_C$ (F) è il punto medio di OH

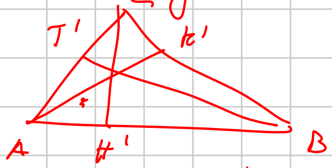
Oss. 2 H è l'altro di centro di omotetia fra $\odot M_AM_BM_C$ e $\odot ABC$



H_1 simmetrico di H wrt M_A ∈ $\odot ABC$



OSS: facile



$H', K', T' \in \odot M_A M_B M_C$

Centri di omotetia   Circoscritta - Inscritta

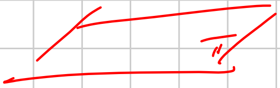
Inscritta Feuerbach (1)

INVERSIONE CIRCOLARE

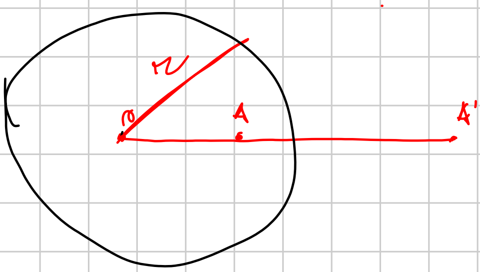
O, r

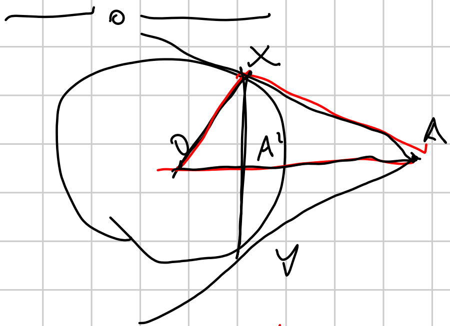
$A \longrightarrow A'$

1) O, A, A' allineati
2) A, A' dalla stessa parte di O
3) $OA \cdot OA' = r^2$



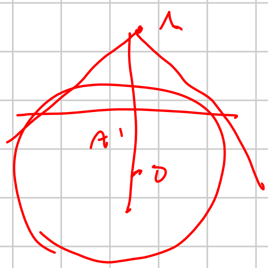
$OA \cdot OA' = r^2$

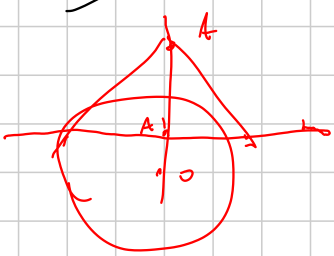


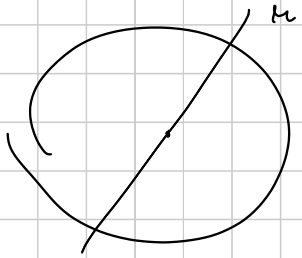


$A' = XY \cap OA$

$OA' \cdot OA = OX^2 = r^2$

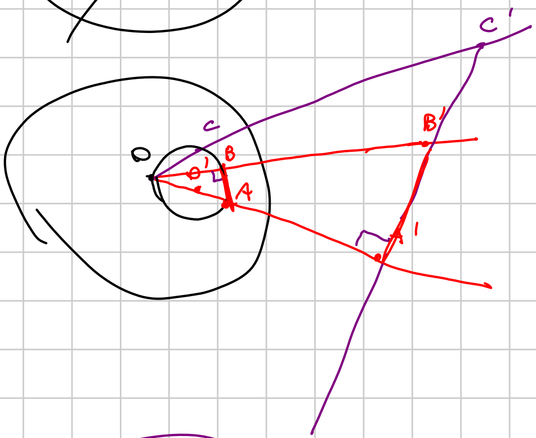




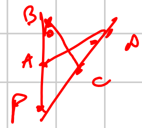


1) r per l'origine $\longrightarrow$ se stessa

2)

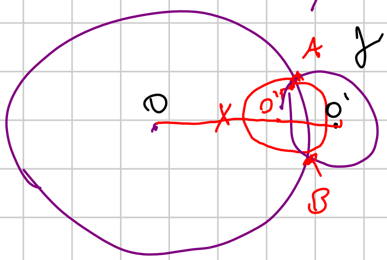


$OB \cdot OB' = r^2 = OA \cdot OA'$



$PA \cdot PB = PC \cdot PD$

retta a cosa $O \notin$ $\longleftrightarrow$ circonferenza per l'origine

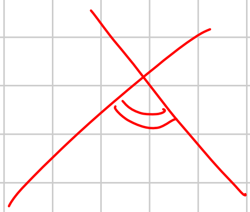


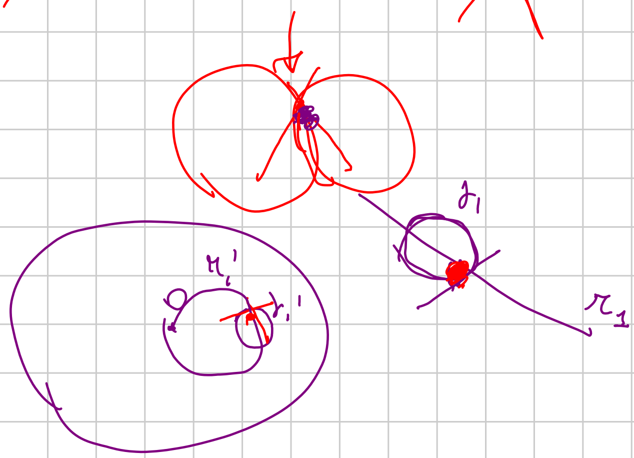
O, O', O'', e cerchio della sfera tangente sono allineati

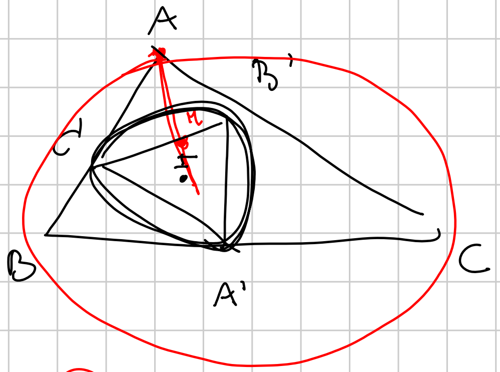
$\downarrow$

centro di inverso

Inversione conserva gli angoli







I, O, H(A'B'C') allineati
(ABC)

$A \to M_{B'C'}$
$B \to M_{A'C'}$
$C \to M_{A'B'}$

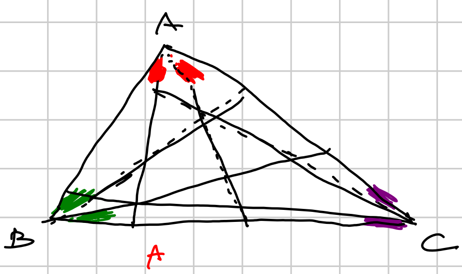
⊙ ABC $\longrightarrow$ Feuerbach di A'B'C'
O F(A'B'C')

I, $\boxed{O}$, F(A'B'C') allineati

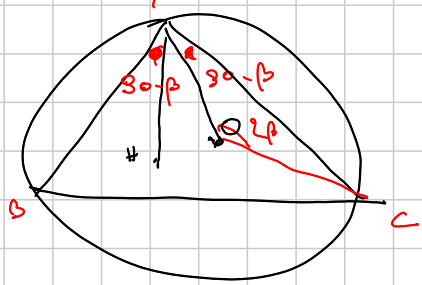
F(A'B'C'), O(A'B'C'), $\boxed{H(A'B'C')}$ allineati x prima
I

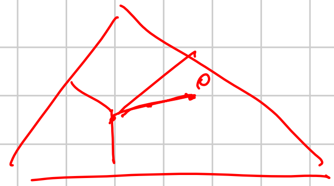
$\Downarrow$

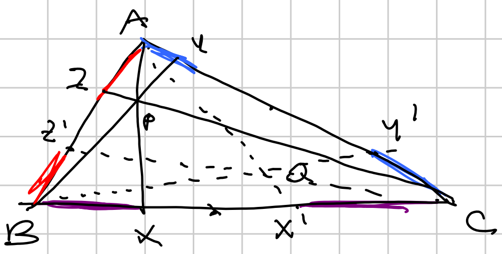
sulla retta OI: O, I, H(A'B'C') sono allineati



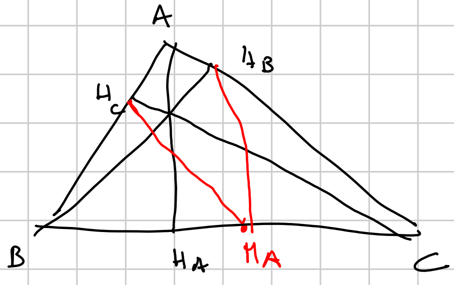
FIGURE



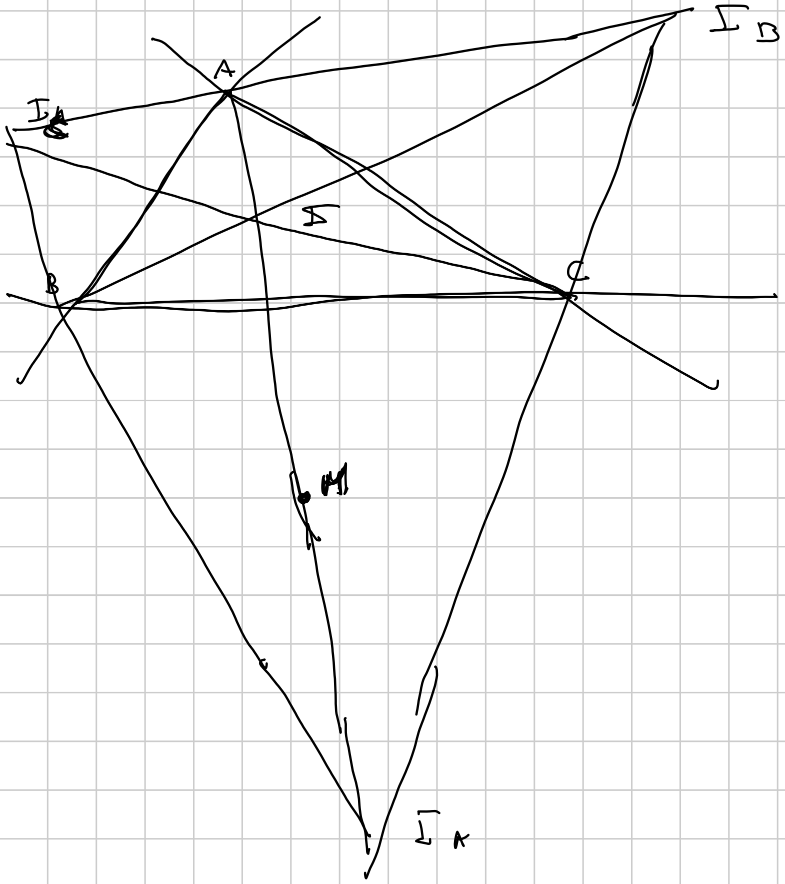




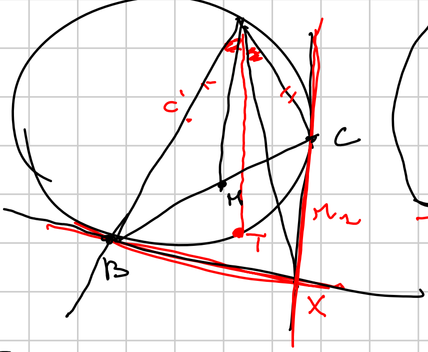
PROBLEMI

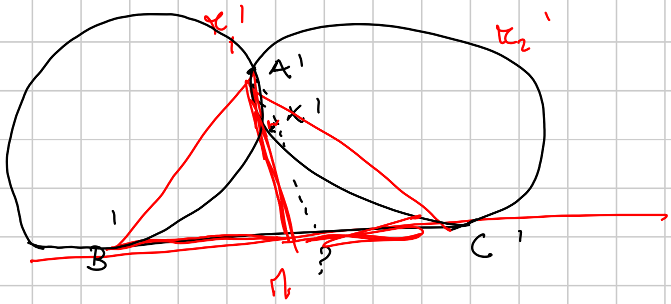


VELOCI



Lemma Simmediana





· Inversione centro A e $r=\sqrt{AB\cdot AC}$ + Simmetria rispetto alla bisettrice di $\hat{A}$.

· $B \longrightarrow C' \longrightarrow C$

$AC'\cdot AB = AB\cdot AC$

$AC' = AC$

$C \longrightarrow B$

$\omega_{ABC} \longrightarrow BC$

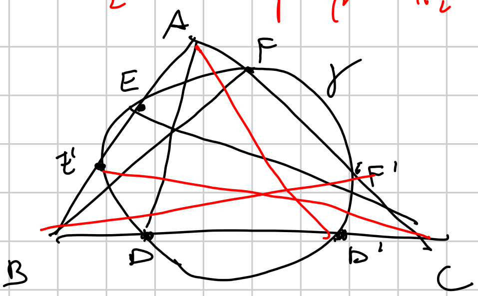
$r_1 \longrightarrow$ Cfr per A, B tangente a BC

$r_2 \longrightarrow$ Cfr per A, C tangente a BC

$X \longrightarrow X' = r_1' \cap r_2'$

$X \in$ simmetrica di AM rispetto A

$X' \in AM$



$$\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CF}{FA}\cdot\frac{AE}{EB}=1$$

(1) $BE'\cdot BE = BD'\cdot BD$

(2) $CD'\cdot CD = CF'\cdot CF$

(3) $AE\cdot AE' = AF\cdot AF'$

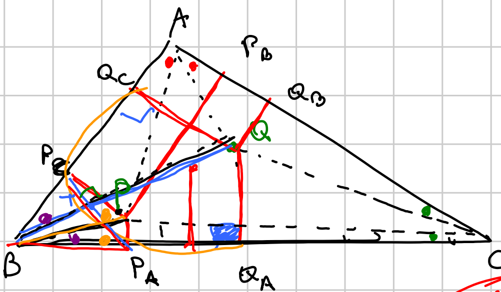
$$\frac{BD'}{D'C}\cdot\frac{CF'}{F'A}\cdot\frac{AE'}{E'B}=1$$

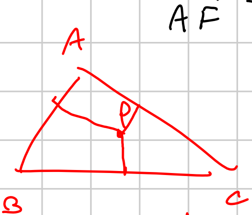
(1) $\frac{BD}{BE} = \frac{BE'}{BD'}$

(2) $\frac{CF}{CD} = \frac{CD'}{CF'}$

(3) $\frac{AE}{AF} = \frac{AF'}{AE'}$

$$\frac{BE'}{BD'}\cdot\frac{CD'}{CF'}\cdot\frac{AF'}{AE'}=1$$





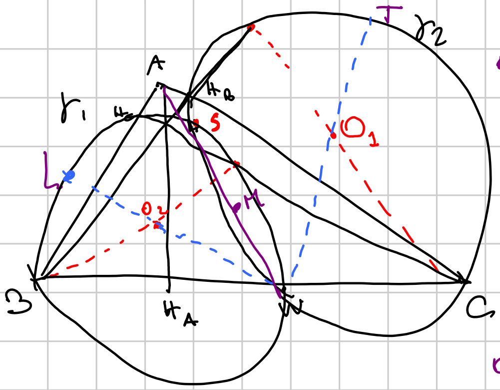
$T\hat{P_A}B$

$P P_A B P_C$ ciclico

$P_C\hat{P_A}B \cong P_C\hat{P}B \cong \frac{\pi}{2} - P\hat{B}P_C \cong \frac{\pi}{2} - Q\hat{B}Q_A \cong \frac{\pi}{2} - T\hat{B}P_A$

$\Rightarrow B\hat{T}P_A \cong \frac{\pi}{2}$

$BP_A\cdot BQ_A = BT\cdot BQ = BP_C\cdot BQ_C$



• Fatto 1: $A \in SW$

SW è l'asse radicale di γ_1 e γ_2

e $AH_C \cdot AB = AH_B \cdot AC = Pow_{\gamma_2} A \Rightarrow A \in SW$

$Pow_{\gamma_1} A$

• HO_1O_2 allineati (fatto noto)

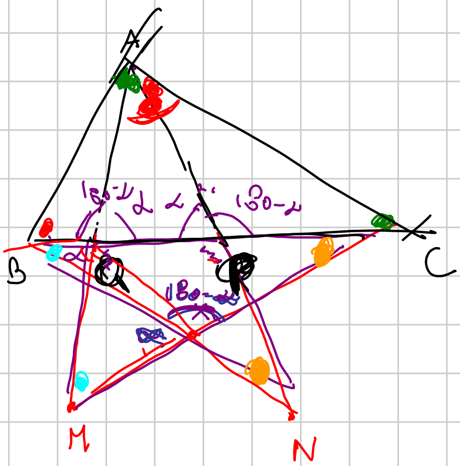
$\Rightarrow$ SLT allineati (omotetia di centro W e ragione 2)

quindi $S \in LT$

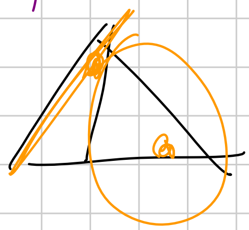
• $H \in SL$ poiché HSH_AW è ciclico e dunque $H\hat{S}W = 90°$

Essendo poi $L\hat{S}W = 90°$, $H \in SL$.

• Dunque H, S, L, T allineati e in particolare $H \in LT$.



1°



$AB^2 = BP \cdot BC$

$AC^2 = CQ \cdot BC$

$Q\hat{A}C \sim B\hat{A}P$ (1)

$Q\hat{C}M \sim B\hat{P}N$

$$\frac{CQ}{QM} = \frac{CQ}{QA} \overset{(1)}{=} \frac{AP}{BP} = \frac{PN}{BP}$$

$$\frac{CQ}{QM} = \frac{PN}{BP}$$

BQMX ciclico poiché i celesti sono uguali

Teoria dei numeri

ma_go

Titolo nota 03/09/2014

divisibilità: a, b interi, a divide b ($a \mid b$)

esiste intero k t.c. $ak = b$.

se $a \mid b \Rightarrow |a| \leq |b|$ $\boxed{\text{a meno che } b = 0}$

primi: { p è un primo se è divisibile solo per se stesso e per 1. / Cinca

def "vera": $p > 1$ è primo se $p \mid ab \Rightarrow p \mid a$ o $p \mid b$.

def MCD (massimo comun divisore) di a, b interi:

è il massimo dei divisori comuni.

ogni intero positivo ha una fattorizzazione in primi e questa fattorizzazione è unica (a meno dell'ordine).

es Dimostrare il teorema fondam. dell'aritmetica.

MCD si calcola bene dalla fattorizzazione.

n intero positivo, $d(n) = \#\{\text{divisori positivi di } n\}$ ← numero di

es Per quali n, $d(n)^2 = n$? ← n è $\square$ ⇓ α_i pari $\forall i$

Calcoliamo $d(n)$!

Se $n = p_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_r^{\alpha_r}$, allora

(*) $d(n) = (\alpha_1+1) \cdot \ldots \cdot (\alpha_r+1)$.

eq $\iff$ $[\boxed{(\alpha_1+1)} \cdot \ldots \cdot (\alpha_r+1)]^2 = n = \boxed{p_1^{\alpha_1}} \cdot \ldots \cdot p_r^{\alpha_r}$.

$\Rightarrow$ n è dispari (*) (n è $\square$ $\iff$ $d(n)$ è dispari)

$p_1 < p_2 < \ldots < p_r \Rightarrow p_1 \geq 3$.

Se n ha un solo fattore primo p, $d(p^\alpha)^2 = p^\alpha$

$(\alpha+1)^2 = p^\alpha$

es Dimostrare per induzione che $p^\alpha \geq (\alpha+1)^2$ per $\alpha \gg 0$.

$p = 3$: $p^\alpha = (\alpha+1)^2$ 2 è una sol.
(ed è l'unica! es)

$p \geq 5$ $p^\alpha = (\alpha+1)^2$

$(\alpha+1)^2 \leq 3^\alpha < 5^\alpha$ non ci sono sol.

trovato 1 sol: $n = 9$; $n = 1$ uniche sol.

MCD $(1227, 4721)$

$4721 = 1227 \cdot 3 + 1040$

$1227 = 1040 \cdot 1 + 187$

$1040 = 187 \cdot 5 + 105$

$$187 = 105 \cdot 1 + 82$$
$$105 = 82 \cdot 1 + 23$$
$$82 = 23 \cdot 3 + 13$$
$$23 = 13 \cdot 1 \quad 10 \qquad (*_3)$$
$$13 = 10 \cdot 1 \quad 3 \qquad (*_2)$$
$$10 = \boxed{3} \cdot 3 \quad 1 \longrightarrow \text{MCD!} \qquad (*_1)$$
$$3 = 1 \cdot 3 \quad 0 \qquad (*_0)$$

thm (Bézout) L'algoritmo di Euclide produce l'MCD

Come otteniamo tornando indietro?

$$10 = 3 \cdot 3 + 1$$
$$13 = (3 \cdot 3 + 1) \cdot 1 + 3 = \quad 13 = 3 \cdot$$

Andiamo a porre verso Bézout (quello vero)

thm (Bézout) se $d = MCD(a,b)$, esistono due interi h, k t.c. $h \cdot a + k \cdot b = d$.

in part. se a, b sono coprimi, $h \cdot a + k \cdot b = 1$.

idea Prendo 3 dalla $(*_2)$ e lo sostituisco nella $(*_1)$

$$(*_2) = \quad 13 = 10 \cdot 1 + \boxed{3} \Longrightarrow 3 = 13 - 10$$
$$(*_1) = \quad 10 = 3 \cdot 3 + 1$$

$$10 = (13 - 10) \cdot 3 + 1 \Longrightarrow$$
$$\underset{d}{1} = \underset{h}{(-3)} \cdot \underset{a}{13} + \underset{k}{4} \cdot \underset{b}{10}$$

IMO 59/1 $\quad \dfrac{\boxed{21n+4}}{14n+3}$ è irriducibile?

Alg. di Euclide

$$21n+4 = (14n+3)\cdot 1 + (7n+1)$$

$$14n+3 = (7n+1)\cdot 2 + 1$$ ← non c'è n!

La frazione è irrid. sempre!

Variazione: $\dfrac{21n+4}{14n+9}$

$$21n+4 = (14n+9) + 7n-5$$
$$14n+9 = (7n-5)\cdot 2 + 7 \quad \boxed{?}$$
$$7n-5 = 7\cdot n - 5$$

$$m^2+(m+1)^2 = n^4+(n+1)^4$$

$$2m^2+2m+\cancel{1} = 2n^4+4n^3+6n^2+4n+\cancel{1}$$

$$m^2+m = n^4+2n^3+3n^2+2n$$
$$m^2+m+1 = \underbrace{n^4+2n^3+3n^2+2n+1}_{(n^2+n+1)^2}$$
$$\boxed{m^2+m+1} = (n^2+n+1)^2 = x^2$$

$m \lneq \sqrt{m^2+m+1} \lneq m+1$, se $m>0$, non ci sono sol!

$m=0 \to n=0$!

IMO 06/4 $\quad 1+2^x+2^{2x+1} = y^2$

x, y interi.

se $x < -1$, LHS non è intero

se $x = -1$, LHS $= 2 \neq y^2$.

$x \geq 0$, se $x = 0$ $1 + 1 + 2 = 4 = 2^2$.

$(0, \pm 2)$ ⇝ sol.

se $x > 0$, y è dispari.

$$y^2 - 1 = 2^x(1 + 2^{x+1})$$

$$(y-1)(y+1) = 2^x(1 + 2^{x+1})$$

$$MCD(y-1, y+1) \mid (y+1) - (y-1) = 2 \Rightarrow MCD = 2.$$

$$d \mid a,\ d \mid b \Rightarrow d \mid a \pm b. \quad (d \mid a + kb)$$

$$1 + 2^x + 2 \cdot 2^{2x} \qquad 2^{x-1} = a$$

$$1 + 2 \cdot a + 2 \cdot a^2 \cdot 4 = 1 + 2a + 8a^2 =$$

$$= (a+1)^2 + 7a^2$$

$$y^2 = (a+1)^2 + \underbrace{7a^2}_{\text{pochi fattori primi!}}$$

$$(\underbrace{y - a - 1}_{M})(\underbrace{y + a + 1}_{N}) = 7a^2$$

$MCD(M, N) \mid 2y$ ⇝ y dispari

(con un po' di att., non hanno altri fatt. in comune)

$MCD = 2$

$$M \cdot N = 7 \cdot 2^{2(x-1)} \qquad M < N$$

un paio di possibilità:

$2 \,,\; 2^{2x-3} \,,\; 7$ da distribuire

$2 \cdot 7 \quad , \quad 2^{2x-3}$

$2 \quad , \quad 7 \cdot 2^{2x-3}$

$$\boxed{M = 14 \,, \quad N = 2^{2x-3} \quad --- \quad (es)}$$

$M = 2 \,, \quad N = 7 \cdot 2^{2x-3} \quad ?$

$$\begin{cases} y - 2^{x-1} - 1 = 2 \\ y + 2^{x-1} + 1 = 7 \cdot 2^{2x-3} \end{cases}$$

$$2^x + 2 = 7 \cdot 2^{2x-3} - 2$$

$$\underbrace{2^x}_{\text{div. per } 8} + 4 = \underbrace{7 \cdot 2^{2x-3}}_{\text{divisibile per } 8} \qquad \text{se } x \geq 3$$

CONGRUENZE:

<u>def</u> $a \equiv b \pmod m$ se

- $m \mid (a-b)$
- $a = b + km$ per qualche $k \in \mathbb{Z}$
- il resto della div. di a per m
  " " " " b " " .

<u>non</u> si dovrebbe scrivere $5 \bmod 3 = 2$.

classi di congruenza $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$.

Ricordiamoci: $a = b \Rightarrow a \equiv b \pmod{m}$

\pmod{m}.

$a \equiv b \pmod{m}$, $c \equiv d \pmod{m}$

$\Rightarrow$ $a + kc \equiv b + kd \pmod{m}$

$a \cdot c \equiv b \cdot d \pmod{m}$

La divisione si comporta bene solo con moduli "coprimi" col divisore.

Bézout entra in scena:

a intero, cerco h inverso di a mod m, dove $MCD(a, m) = 1$.

ovvero cerco h intero tale che $h \cdot a \equiv 1 \pmod{m}$.

Dalla seconda def. di $\equiv$, $h \cdot a = 1 + km$ per qualche k.

$$h \cdot a - k \cdot m = 1$$

Posso trovare h e k se e solo se $MCD(a, m) = 1$.

(li trovo esplicitamente con Euclide).

Quante sono le soluzioni?

Prendiamo un'altra soluzione (h', k')

$$h' \cdot a - k' m = 1 \quad -$$
$$h \cdot a - k \cdot m = 1$$

$$(h - h') \cdot a - (k - k') \cdot m = 0$$

$$(h - h') \cdot a = (k - k') \cdot m$$

$h - h' = \ell \cdot m$ per qualche ℓ.

$h \equiv h' \pmod m$

h, h' inversi mod m

$h \cdot a \equiv h' \cdot a \Rightarrow (h'-h) \cdot a \equiv 0$

$\Rightarrow (h'-h) \cdot \cancel{a \cdot h} \equiv 0 \pmod m$

<u>OSS</u> Se m è primo, l'unica classe di resto <u>non</u> invertibile è 0.

a è invertibile mod $p \overset{\text{primo}}{\Leftrightarrow} p \nmid a$.

- $x^2 + y^2 = 2015$

<u>modulo 4</u>

$x^2 + y^2 \equiv 2015 \equiv 3 \equiv -1 \pmod 4$

se x è pari $\Rightarrow 4 \mid x^2 \Rightarrow x^2 \equiv 0 \pmod 4$

se x è dispari $\Rightarrow (2y+1)^2 = \underbrace{4y^2 + 4y}_{\text{div. per } 4} + 1 \equiv 1 \pmod 4$

$x \equiv \begin{cases} +1 \\ -1 \end{cases} \pmod 4 \Rightarrow x^2 = (\pm 1)^2 = 1 \equiv 1 \pmod 4$

$x^2 + y^2 \begin{cases} 0 \\ 1 \\ 2 \end{cases} \pmod 4$ <u>no</u>

$x^2 + y^2 = 2208$

mod 3 : $x^2 \begin{cases} 0 \equiv 0 \\ (\pm 1)^2 \equiv 1 \end{cases}$

x^2+y^2 $\begin{cases} 0 \longrightarrow \text{solo se } x\equiv y\equiv 0 \ (3) \\ 1 \\ 2 \end{cases}$

$$x^2+y^2\equiv 0 \pmod 7$$

IMO 2009/1

k, n interi positivi $2\le k\le n$.
$a_1,\dots,a_k$ interi distinti in $\{1,\dots,n\}$.
Sappiamo che $n \mid a_j(a_{j+1}-1)$ per $j=1,\dots,k-1$.

Dimostrare che $n\nmid a_k(a_1-1)$.

$$a_j(a_{j+1}-1)\equiv 0 \pmod n$$

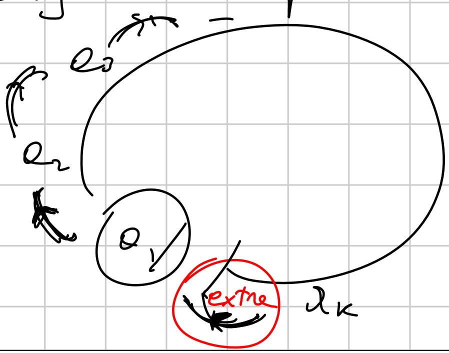
$$a_j\cdot a_{j+1}\equiv a_j \pmod n$$

$$a_1\cdot a_2\equiv a_1 \pmod n$$
$$a_2\cdot a_3\equiv a_2 \pmod n$$
$$\Downarrow$$
$$a_1\cdot a_2\cdot a_3\equiv a_1\cdot a_2\equiv a_1 \pmod n$$

$\Rightarrow$ per induzione, $\underbrace{a_1\cdot\ldots\cdot a_k}\equiv a_1 \pmod n$

se fosse falsa la tesi, $a_k\cdot a_1\equiv a_1 \pmod n$

$\Rightarrow$ ogni prodotto di k consecutivi è congruo al primo:



$$a_1 \cdot \ldots \cdot a_k \equiv a_1,$$
$$a_2 \cdot \ldots \cdot a_k \cdot a_1 \equiv a_2 \pmod{n} \qquad \square$$

$p^2 - 2q^2 = 1$ con p, q primi

p dispari $\Rightarrow p-1, p+1$ pari

$(p-1)(p+1) = p^2 - 1 = 2q^2 \Rightarrow q = 2 \Rightarrow p = 3.$

Se $p, q > 2 \Rightarrow$ sono dispari $\Rightarrow p^2, q^2 \equiv 1 \pmod 4$

$\Rightarrow 1 - 2 \equiv 1 \pmod 4$ impossibile.

Per quali n $4n+9$ e $9n+1$ sono entrambi $\square$?

$$\begin{cases} 4n+9 = x^2 \\ 9n+1 = y^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2 - y^2 = -5n+8 \\ (x-y)(x+y) = 8 - 5n \end{cases}$$

mod 3 $\qquad x^2 \equiv n \pmod 3$

$\qquad y^2 \equiv 1 \pmod 3$

n pari: se n dispari, $4n \equiv 4 \pmod 8$

$\Rightarrow 4n + 9 \equiv 4 + 1 \equiv 5 \pmod 8$

$4y(y+1) + 1 \equiv 1 \pmod 8$

$\Rightarrow n$ pari.

$$9x^2 - 4y^2 = \cancel{36n} + 81 - \cancel{36n} - 4$$

$$(3x - 2y)(3x + 2y) = 77 = 7 \cdot 11$$

$1 \quad 77 \Rightarrow x = 13, \ y = 19 \Rightarrow n = 40$

$7 \quad 11 \Rightarrow x = 3, \ y = 1 \Rightarrow n = 0$

$$4n+9 = 13^2 \Rightarrow n = \frac{169-9}{4} = 40$$

$a_1, \dots, a_{37}$ interi $\Rightarrow \exists\, 1 \le i \le j \le 37$ t.c.

$S(i,j) = a_i + a_{i+1} + \dots + a_{j-1} + a_j$ è div. per 37.

$$S(i,j) = \underset{\substack{\parallel \\ S_j}}{S(j,1)} - \underset{\substack{\parallel \\ S_{i-1}}}{S(i-1,1)}$$

$S_1, \dots, S_{37}$

$a_1,\ a_1+a_2, \dots,\ a_1+\dots+a_{37}$

ORA, CASSETTI: o sono tutte diverse $\Rightarrow \exists j$ t.c. $S(j,1) \equiv 0$.

o ce ne sono 2 uguali $\Rightarrow S_j - S_i \equiv 0$.

FINE.

Esercizi:
- es. 36, 39, 45, pp. 9-11
- es. 2 p. 38
- per quali m $m^4 + 4^m$ è primo?
- risolvere $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{1}{3}$ $(m, n > 0)$
- $p^3 + q^2 = r^4$ $(p, q, r$ primi$)$

es 2| Per quali valori del primo p l'equazione

$$x^2 + px - 444p = 0$$

ha radici intere?

$\triangle = \square$. :)

$\triangle = p^2 + 4 \cdot 444p = n^2$

$p \mid n \Rightarrow p^2 \mid n^2 \qquad p^2 \mid p^2$

$p^2 \mid n^2 - p^2 \Rightarrow p^2 \mid 4 \cdot 444 \cdot p$

$\Rightarrow p \mid 4 \cdot 444 = 2^4 \cdot 3 \cdot 37$

$p = 2 \qquad 4 + 1776 \cdot 2 = 3556 \qquad \cdot < 60^2$

$\wedge$
59^2

$p = 3 \qquad 9 + 1776 \cdot 3 = 5337 \qquad$ non $\square$

$p = 37 \qquad 37^2 + 37 \cdot 37 \cdot 16 \cdot 3 =$

$37^2 (1 + 48) = (7 \cdot 37)^2.$

$\square$

es 3 | $\quad m^4 + 4^m.$

0 $\quad m = 1$ funziona

1 $\quad m$ dev'essere dispari oppure $0 \Rightarrow$ dispari

2 $\quad m = 2n+1$

$m^4 + 4^{2n+1} = m^4 + 4 \cdot 4^{2n} =$

$= m^4 + 4 \cdot (2^n)^4$

$m = x, \ 2^n = y \qquad x^4 + 4y^4$

$$\underbrace{(x^4 + 4x^2y^2 + 4y^4)}_{\square} - \underbrace{4x^2y^2}_{\square} =$$

(Sophie Germaine) $(x^2 + 2y^2 - 2xy)(x^2 + 2y^2 + 2xy)$

$$x^2 + 2y^2 - 2xy = 1$$

$$m^2 + 2 \cdot 2^{2n} - 2^n \cdot m$$

$$2 \cdot 2^{2n} - 2^n \cdot (2n+1) + (2n+1)^2$$

$$2^{2n+1} > 2^n \cdot (2n+1) + (2n+1)^2$$

per induzione es

$\square$

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{1}{p} \qquad p \text{ primo}$$

$$pn + pm = m \cdot n$$

$$mn - p \cdot m - p \cdot n = 0$$

$$(m-p)(n-p) = mn - pm - pn + p^2 = p^2$$

$\boxed{\text{WLOG } m \geq n}$

$$m - p \geq n - p$$

$n - p = 1 \Rightarrow m - p = p^2$

$n - p = p \Rightarrow m - p = p \Longrightarrow \frac{1}{2p} + \frac{1}{2p} = \frac{1}{p}$

$$\begin{cases} n - p = 1 \\ m - p = p^2 \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{matrix} n = 1 + p \\ m = p^2 + p \end{matrix}$$

$$\frac{1}{1+p} + \frac{1}{p^2+p} = \frac{1}{p+1}\left(1 + \frac{1}{p}\right) = \frac{1}{\cancel{p+1}} \cdot \frac{\cancel{p+1}}{p} = \frac{1}{p}$$

$$S = \{(2p, 2p), (p+1, p^2+p), (p^2+p, p+1)\}$$

es 5

$$p^3 + q^2 = r^4$$

$$p^3 = r^4 - q^2 = (r^2-q)(r^2+q)$$

2 casi: $\begin{cases} r^2 - q = 1 \\ r^2 + q = p^3 \end{cases}$ oppure $\begin{cases} r^2 - q = p \\ r^2 + q = p^2 \end{cases}$

1) $2r^2 = 1 + p^3$ $\quad q = r^2 - 1 = (r-1)(r+1)$

$\cancel{2q = p^3 - 1}$

$\Downarrow$

$r = 2$

$\Downarrow$

$q = 3$, $p = \underline{\text{no}}$.

$p^2 - r^2 = q \Rightarrow (p-r)(p+r) = q \Rightarrow p - r = 1$

$p = 3$, $r = 2$ che non funziona.

(Forse) Abbiamo trovato le sol. con q ed r primi. $\square$

Seconda soluzione $\quad p, q, r = 2 \quad$ no (non va)

$p^3 + q^2 = r^4 \Rightarrow$ ce n'è ~~almeno~~ 1 pari

$p = 2$ non funziona: $\quad 8 = (r^2 - q)(r^2 + q)$

$\begin{cases} r^2 - q = 2 \\ r^2 + q = 4 \end{cases}$

$q = 2$ non funziona

$r = 2$ $\quad p^3 + q^2 = 16$ non funziona. $\square$

TDN
~~Combinatoria~~ 2 me_go

Titolo nota 04/09/2014

~~domanda~~ Abbiamo perle di q colori distinti.

Quante collane possiamo fare con p perle di questi q colori?

Supponiamo di voler risolvere la diofantea

$$ax + by = c \qquad (*)$$

$$1227x \mp 4721y = 3737$$

$(*)$ è risolubile se e solo se $MCD(a,b) \mid c$.

$(\Rightarrow)$ $d = MCD(a,b)$, $ax+by$ è div. per d.

$(\Leftarrow)$ Bézout.

Tutte le soluzioni sono della forma $\left(x_0+\frac{b}{d}k,\ y_0-\frac{a}{d}k\right)$

con $k \in \mathbb{Z}$, (x_0, y_0) $\cancel{[k \ d=1]}$

Qual è la cifra delle unità di $N = 37^{2529}$ nella scrittura in base 13?

= il resto della divisione di N per 13.

Trovare il più piccolo $n \geq 0$ t.c. $N \equiv n \pmod{13}$

$37 \equiv (-2) \mod 13$

k	37^k
0	1
1	-2
2	4
3	-8
4	$16 \equiv 3$
5	-6
6	$12 \equiv -1$

7	2
8	-4
$\boxed{9}$	$\boxed{8}$
10	-3
11	6
12	1

$37^{12} \equiv 1 \pmod{13}$ $\qquad N = 37^{2529}$

$2529 \equiv 9 \pmod{12}$

l'ultima cifra ... è 9

Consideriamo $a \in \mathbb{Z}$ e p un primo.

$$\underbrace{a^0 \equiv 1, \quad a^1 \equiv a, \quad \dots, \quad a^{p-1}}_{\text{quante classi di resto? } p \text{ classi di resto.}}$$

$(a,p) = 1 \qquad a^k \not\equiv 0 \mod p$

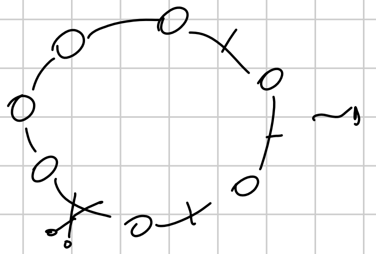
Per i cassetti, esistono $h,k \leq p-1$ t.c. $\boxed{a^h \equiv a^k.}$

$\Rightarrow$ La succ. dei resti è def. periodica.

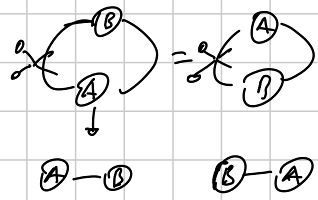
Se b è l'inv. di a mod p, $\quad a \cdot b \equiv 1 \Rightarrow a^h \cdot b^h \equiv 1$

$$1 \equiv a^h \cdot b^h \equiv a^k \cdot b^h = a^{k-h} \cdot (a^h \cdot b^h) \equiv a^{k-h}$$

$\exists$ un intero $\ell \leq p-1$ t.c. $a^\ell \equiv 1 \pmod p$



a^p modi di fare una collana.



a collane monocromatiche

$a^p - a$ " non monocromatiche

↳ ciascuna contata p volte!

quante sono le collane non mono? $\frac{a^p-a}{p}$!

$$\frac{a^p-a}{p} \in \mathbb{Z} \Rightarrow a^p - a \equiv 0 \pmod p$$

<u>Thm</u> b inv. di a $\Rightarrow$ $a^{p-1} \equiv 1 \pmod p$

(Piccolo teorema di Fermat)

<u>es</u> <u>IMO 2005/4</u> | Determinare tutti gli interi coprimi con tutti i numeri della forma

$$x_n = \underbrace{6^n + 3^n} + 2^n - 1 \qquad \text{per } n \geq 0$$

<u>oss</u> Basta lavorare con i primi.

Lavoriamo modulo p.

$$x_n = (3^n+1)(2^n+1) - 2$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 1$$

se $p \neq 2, 3$, $\quad 2, 3, 6$ sono invertibili

$\frac{1}{2}$ = inv. di 2, $\quad \frac{1}{3}$ = inv. di 3, $\quad \frac{1}{6}$ = inv di 6.

$$2^{p-1} \equiv 1 \pmod p$$

$$2 \cdot 2^{p-2} \equiv 1 \pmod p$$

inv di $2 = 2^{p-2}$.

$$X_{p-2} = 2^{p-2} + 3^{p-2} + 6^{p-2} - 1$$

$$6X_{p-2} = 6 \cdot 2^{p-2} + 6 \cdot 3^{p-2} + 6^{p-1} - 6$$

$$3 \cdot \cancel{2^{p-1}} + 2 \cdot \cancel{3^{p-1}} + 1 - 6 \equiv 0!$$

$\Rightarrow$ c'è solo 1!

---

thm (Eulero-Fermat) $\quad a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod m$

se $(a, m) = 1$

def $\quad \varphi(m) = \#\{$interi k, $1 \le k \le m$, coprimi con $m\}$

$\varphi(1) = 1 \qquad \varphi(6) = 2$

$\varphi(2) = 1 \qquad \varphi(37) = 36$

$\varphi(3) = 2$

$$\varphi(4721^{35} \cdot 65537^{12}) = 4721^{34}(4720) \cdot 65537^{11} \cdot 65536$$

$65536 = 2^{16} = 2^{2^4}$

$F_n := 2^{2^n}+1$ se è primo, si chiama primo di Fermat.

es F_5 è div. per 641.

in generale $\varphi(p^\alpha) = p^\alpha - p^{\alpha-1} = p^{\alpha-1}(p-1)$

$\varphi(m \cdot n) = \varphi(m)\cdot\varphi(n)$ se $MCD(m,n)=1$.

fatto Prima abbiamo visto che -2 è ~~un~~ tale che

12 è il più piccolo esponente $k>0$ t.c. $(-2)^k \equiv 1 \pmod{13}$

$(-2)^0, (-2)^1, \ldots, (-2)^{11}$ sono classi distinte.

Per ogni p esiste g t.c. $g^0, g^1, \ldots, g^{p-2}$ sono

tutte distinte, e questo g si chiama generatore mod p.

Achtung! Esiste un generatore mod m se e solo se

m è ~~A~~ $\{2, 4, p^\alpha, 2p^\alpha\}$

no 2^{k+2} perché $a^2 \equiv 1 \pmod 8$ se $a \equiv 1\ (2)$.

no $p \cdot q$: perché?

Se g genera mod $p^\alpha \Rightarrow g$ o $g+p$ genera mod $p^{\alpha+1}$

es IMO 75/4 Dato n scrivo $S(n)$ = somma delle cifre.

$S(S(S(4444^{4444}))) = ?$

Facciamo mod 9! $\varphi(9)=6$

$$4444^{4444} \overset{?}{\equiv} 7^{4444} \equiv 7^4 \equiv (-2)^4 \equiv 16 \equiv 7$$

$$A = S(4444^{4444}) \leq (4 \cdot 4444 - 1) \cdot 9 \leq 180'000$$

↳ ha meno di $4 \cdot 4444 - 1$ cifre

$$B = S(A) \leq 4 \cdot 9 = 36$$

$S(B) \leq \cancel{20}\ 11$. quanti interi ≤ 11 sono $\equiv 7$ mod 9? Solo 7!

$$S(S(S(4444^{4444}))) = 7$$

es $\cancel{1^{135}} + \cancel{2^{135}} + 3^{135} + \ldots + \cancel{65536^{135}}$

è divisibile per 65537?

sol 1 $\quad k^{135} + (-k)^{135} \equiv 0 \pmod{65537}\ \forall k$

sol $\quad \exists g$ gen. tale che $\forall a \in \{1, \ldots, p-1\}\ \exists k$ t.c. $a = g^k$

$$= (g^{k_1})^{135} + (g^{k_2})^{135} + \ldots + (g^{k_{p-1}})^{135} =$$

$$= (g^1)^{135} + (g^2)^{135} + \ldots + (g^{p-1})^{135} =$$

$$= (g^{135})^0 + \ldots + (g^{135})^{p-2} =$$

$$= \frac{(g^{135})^{p-1} - 1}{g^{135} - 1} \equiv \frac{1-1}{g^{135}-1} \equiv 0\ (p).$$

$$1^2 + \dots + 65536^2$$

$$= \frac{(g^2)^{p-1} - 1}{g^2 - 1} \equiv \frac{1-1}{g^2-1} \pmod p$$

deve esistere l'inverso!

ovvero $g^2 \not\equiv 1 \pmod p$

$p=2$ $\qquad 1 \equiv 1 \not\equiv 0 \pmod 2$

$p=3$ $\qquad 1+4 = 5 \not\equiv 0 \pmod 3$

thm Teorema cinese del resto

Se m_1, m_2 sono coprimi, allora le congruenze

$$\begin{cases} x \equiv a_1 \pmod{m_1} \\ x \equiv a_2 \pmod{m_2} \end{cases}$$

ha una ed una sola soluzione $(\text{mod } m_1 \cdot m_2)$.

$$x \equiv a_1 \pmod{m_1} \Longleftrightarrow x = a_1 + k_1 m_1$$

$$\Longleftrightarrow x = a_2 + k_2 m_2$$

stiamo cercando sol. (in k_1, k_2) dell'equazione

$$a_1 + k_1 m_1 = a_2 + k_2 m_2$$

$$m_1 k_1 - m_2 k_2 = (a_2 - a_1) \overset{\text{Bézout}}{\Longrightarrow} \text{ha sol.}$$

se ho due sol., $k_1' - k_1$ multiplo di m_2

$$\left.\begin{aligned} x &= a_1 + k_1 \cdot m_1 \\ x' &= a_1 + k_1' \cdot m_1 \end{aligned}\right| \Rightarrow x - x' = m_1 \underbrace{(k_1 - k_1')}_{\text{div. per } m_2}$$

$$\Rightarrow x \equiv x' \pmod{m_1 \cdot m_2}$$

$$x + m_1 m_2 \equiv a_1 \mod m_1$$
$$\equiv a_2 \mod m_2$$

<u>es</u> Dimostrare che $\forall p \; \exists n \quad 2^n \equiv n \pmod p$

Se n è multiplo di $p-1 \Rightarrow 2^n \equiv (2^{p-1})^k \equiv 1$

Se $n \equiv 0 \;\; (p-1) \Rightarrow 2^n \equiv 1 \pmod p$

Cerchiamo n come sopra, in più $n \equiv 1 \pmod p$

$p, p-1$ sono coprimi? $(p - (p-1) = 1!)$

$$\begin{cases} n \equiv 0 \pmod{p-1} \\ n \equiv 1 \pmod p \end{cases} \Rightarrow \exists! \text{ sol. mod } p(p-1).$$

$$n = (p-1)^2 \qquad \begin{aligned} n &\equiv 1 \pmod p \\ n &\equiv 0 \pmod{p-1} \end{aligned}$$

(es 10, p 39) $D = \{ n \text{ t.c. } n \mid 2^n + 1 \}$

a) Quali sono i primi in D?

p. Allora $2^p + 1 \equiv 2+1 \equiv 3 \pmod p$

$\equiv 0$ mod p se e solo se $p = 3$:)

$2^3 + 1 = 9 \equiv 0 \pmod p$.

$\Rightarrow$ L'unico primo in D è 3.

b) Quali sono le potenze di primi in D?

p^k. (mod p) $2^{p^k} + 1 \equiv (\underbrace{2^{p^{k-1}}}_{\text{per induzione}})^p + 1 \equiv 2 + 1 \equiv 3$

$\Rightarrow p = 3$.

$3 \mid 2^3 + 1$

$3^\alpha \parallel 2^{3^2} + 1 = (2^3)^3 + 1 = \underbrace{(2^3+1)}_{\text{è div. per 3}} \cdot \underbrace{((2^3)^2 - 2^3 + 1)}$

divide esattam.

$2^3 \equiv -1 \pmod 3$ $\qquad (2^3)^2 - 2^3 + 1$

$\qquad (-1)^2 - (-1) + 1 \equiv 0 \ (3)$

Se $3^\alpha \parallel 2^3 + 1 \Rightarrow 3^{\alpha+1} \parallel 2^{3^2} + 1$

$3^\alpha \parallel \underbrace{2^{3^k} + 1}_{N} \Rightarrow 2^{3^{k+1}} + 1 = N \cdot ((N-1)^2 - (N-1) + 1)$

$N \equiv 0 \pmod 3 \Rightarrow (-1)^2 + 1 + 1$

$N - 1 \equiv -1 \pmod 3$

$3 \mid 2^3 + 1 \Rightarrow 3^k \mid 2^{3^k} + 1$

in realtà : $3^{k+1} \| 2^{3^k}+1$ (LTE)

(c) $p \cdot q$

Digressione Se a è coprimo con p, allora $a^{p-1} \equiv 1 (p)$

$\mathrm{ord}_p(a)$ = ordine molt. di a mod p =

$= \min\{k>0 \mid a^k \equiv 1 \mod p\}$

in realtà $\mathrm{ord}_p(a) \mid p-1$ $\qquad \mathrm{ord}_a(p) = x$

$a^{p-1} \equiv a^x \equiv 1 \Rightarrow a^{h(p-1)+kx} \equiv 1 \pmod p$

$\Rightarrow x = \mathrm{MCD}(x, p-1) \Rightarrow x \mid p-1.$

$pq \mid 2^{pq}+1$?

$\Downarrow$

$p \mid 2^{pq}+1 \Rightarrow 2^{pq}+1 \equiv 0 \ (p)$

$2^{pq}+1 \equiv 0 \ (q)$

$2^{pq}+1 \equiv (2^q)^p + 1 \equiv 2^q + 1 \equiv 0 \ (p)$

$2^p + 1 \equiv 0 \ (q)$

$\Rightarrow 2^q \equiv -1 \ (p) \Rightarrow 2^{2q} \equiv (-1)^2 \equiv 1 \ (p)$

$2q = k \cdot \mathrm{ord}_p(2)$

divisore di $p-1$

$\Rightarrow \mathrm{ord}_p(2) \in \{1, 2, q, 2q\}$

$\mathrm{ord}_p(2) = 1 \Rightarrow 2^1 \equiv 1 \quad (p)$ no

$\mathrm{ord}_p(2) = 2 \Rightarrow 2^2 \equiv 1 \quad (p) \Rightarrow p = 3$

$\Rightarrow \underbrace{\mathrm{ord}_p(2)}_{\text{divide } p-1} \geq q \Rightarrow \quad q \leq p-1$

$p \leq q-1 \quad (\text{se } q \neq 3)$

non può succedere a meno che $p=3$

se $p=3$: $\quad q$ t.c. $\underbrace{2^{3q}+1}_{9 \pmod q} \equiv 0 \quad (q)$

$\Rightarrow q = 3. \quad \Rightarrow$ non ci sono prodotti

$p \cdot q$ in D se p, q primi distinti.

TST '00, 01, 02 ? | n intero positivo, a intero positivo

$a, \quad a^a, \quad a^{a^a}, \quad a^{a^{a^a}} \ldots$

Questa successione è definitivamente periodica mod n?

$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$

$$\begin{cases} x_1 = a \\ x_{n+1} = \cancel{x_n^a} = a^{x_n} \end{cases}$$

Dovrebbe essere vero che $\quad a^k$ è periodica (in k)

di periodo $\ell \mid \varphi(m)$ mod m da un certo punto in poi. (perché φ è moltiplicativa)

[una tec. cinese e un po' di malizia].

E' vero che x_{n+1} è def. periodica mod m
se x_n è " " mod $\varphi(m)$.

MA $\varphi(m) < m$ (se $m>1$).

ind. estesa! $\Longrightarrow$ x_n è periodica (da un certo punto in poi)

$x^2 \equiv 0, 1 \quad (3)$

$x^2 \equiv 0, 1, 4 \quad (8)$

$x^2 \equiv 0, 1 \quad (4)$

$x^2 \equiv 0, 1, -1 \quad (5)$

dom Quanti sono i residui quadratici mod p?
cubici ?
k-esimi ?

$\longrightarrow \frac{p+1}{2}$.

Sono al più $\frac{p+1}{2}$: facile: $\{0\}$ sta per conto suo
$\{1, -1\} \leftarrow$
$\{2, -2\} \leftarrow$
$\vdots$
$\left\{\frac{p-1}{2}, -\frac{p-1}{2}\right\} \leftarrow$

$a^2 \equiv b^2 \pmod p$, $0 \le a, b \le \frac{p-1}{2}$

$(a-b)(a+b) \equiv 0 \ (p)$ $0 \le a+b \le p-1$

o $a=b=0$,

oppure $p \mid a-b$

$\Rightarrow a=b$.

$\Rightarrow$ ci sono esattam. $\frac{p+1}{2}$ residui quad. mod p.

per $p=2$ ce ne sono 2.

Tutte le classi di resto $\not\equiv 0$ sono potenze di un generatore.

$(g^0)^2, (g^1)^2, \dots, (g^{p-1})^2$

Se $p>2$

$p-1$ è pari

$p-1 = \frac{p-1}{2} \cdot 2$

$g^0, g^2, \dots, g^{2(p-1)}$

c'è g^{p-1}

$\longrightarrow$ + lo 0 :)

$\overbrace{g^0, g^2, \dots, g^{p-3}}^{\frac{p-1}{2}}, g^{p-1}$ poi si ripetono.

$g^0, g^k, g^{2k}, \dots, g^{k(p-1)}$

Quando $d = MCD(k, p-1) \cancel{\ne 1}$, ci sono ripetizioni!

La prima rip. è quando $k \cdot x$ è multiplo di $p-1$

Quando $x = \frac{p-1}{d}$

Ne abbiamo beccati $\frac{p-1}{d}$ distinti

e poi c'è lo 0 :)

Come si fa a capire se h è un residuo quadratico mod p? es $h=-1$.

$\exists x$ t.c. $x^2 \equiv -1 \pmod p$

$x \not\equiv 0 \ (p) \Rightarrow x \equiv g^y$ per qualche y

$x^2 \equiv (g^y)^2 \equiv g^{2y}$.

$(x^2)^{\frac{p-1}{2}} = x^{p-1} \equiv 1$

se $a^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \Rightarrow a$ è un res. quadratico.

$\overset{\shortparallel}{g^b}$ per qualche b. Se b è pari $\Rightarrow$:)

$\Rightarrow a \equiv (g^{b/2})^2$.

se b è dispari? $b = 2c+1$

$g^{(2c+1)\frac{p-1}{2}} = \cancel{(g^{p-1})^c} \cdot g^{\frac{p-1}{2}} \not\equiv 1$ perché

g è un generatore (se $p>2$)

$\Rightarrow$ a è un res. quad. mod $p \Leftrightarrow a^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \ (p)$.

a è un res. k-esimo mod $p \Leftrightarrow a^{\frac{p-1}{d}} \equiv 1 \ (p)$

dove $d = MCD(k, p-1)$.

(-1) è res. quadratico $\Leftrightarrow$ $(-1)^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \pmod p$

$\frac{p-1}{2}$ è pari, $(-1)^{pari} \equiv 1$ ✓

$\frac{p-1}{2}$ è dispari, $(-1)^{disp} \equiv -1$ ✗

- (-1) è res. quad. mod. p se e solo se

$p=2$ oppure $p \equiv 1 \pmod 4$

folklore — se $p \equiv 1 \pmod 4$ allora $p = x^2+y^2$

es ~~4~~, 56, 57, 58 pag. 11

es 4, 9 pag. 39 | es. 8, 10 p. 38

es Dimostrare che $\forall p \neq 2,5$ $\exists$ $\underbrace{11\ldots11}_{m \text{ cifre}} \equiv 0 \pmod p$

es Sia $\mathcal{P}$ l'insieme dei primi che dividono almeno un numero della forma

$$2^{n^3+1} - 3^{n^2+1} + 5^{n+1}$$

Allora $\mathcal{P}$ è infinito.

es 57 | $A_n = 5^n + 3^n + 1$ è primo $\Rightarrow$ n è div per 12

sol $p \neq 3$ $p \neq 5$, poi si vede:

mod 3, $3^n \equiv 0 \pmod 3$ se $n \neq 0$.

$n=0$, li ho a posto $1+1+1$ primo ~~ok~~, ma n è div. per 12.

$\hookrightarrow \quad 5^n + 1^n \equiv (-1)^n + 1 \equiv 0$ se n è dispari.

se n disp., A_n è div. per 3, $A_n > 3$. ✓

• $5^n \equiv 0 \pmod 5$

$$A_n \equiv 3^n + 1 \quad \left.\begin{matrix} 1 \\ 3 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{matrix}\right\} +1 \quad . \text{ se } n \equiv 2\ (4)$$

A_n è div per 5. $A_n > 5$ ⇝ non è primo.

$n = 1$ ⇝ $A_1 = 5+3+1 = 3^2$

$n = 2$ ⇝ $A_2 = 35 = 5 \cdot 7$

$A_n \equiv 5^n + 3^n + 1 \pmod 7$

5^n	3^n	1	
1	1	1	→ 3
−2	3	1	→ 2
4	2	1	→ 0
−1	−1	1	→ 1
2	−3	1	→ 0
−4	−2	1	→ 2
1	1	1	→ 3

se $n \equiv 2, 4 \pmod 6$

$\Downarrow$

$7 \mid 5^n + 3^n + 1$ ✓

$\Rightarrow 12 \nmid n$. ☺.

es. 8) max d_n, $d_n = MCD(100 + n^2, 100 + (n+1)^2)$.

$MCD(a,b) \mid a - kb \quad \forall k \in \mathbb{Z}$.

$d_n \mid \left(100 + (n+1)^2\right) - \left(100 + n^2\right) = \underline{2n+1}$ → dispari

$d_n \mid MCD(200 + 2n^2, 2n+1) \mid 200 + 2n^2 - n(2n+1)$

$$d_n \mid 200-n \mid 400-2n$$

$$d_n \mid (400-2n)+(2n+1) = 401$$

$n = 200$? $\quad 100+200^2 = 401 \cdot 100$

$\qquad 100+201^2 = 100+200^2+401$:)

es 10 **idea**: non ci sono sol!

Cerchiamo p tale che ci siano pochi residui quad. e 5-upli mod p.

$\rightsquigarrow 5 \mid p-1 \rightsquigarrow p = 11$?

ex.

es 9) Dati d, m, n interi positivi, dimostrare che esiste una prog. aritm. lunga $m+1$ di rag. d t.c. ogni elem. è divisibile per una pot. n-ma

sol Prendiamo $m+1$ primi $p_1, \dots, p_{m+1}$ che non dividono d.

$$x,\ x+d,\ x+2d,\ \dots,\ x+md$$

$$\begin{cases} x \equiv 0 \pmod{p_1^n} \\ x+d \equiv 0 \pmod{p_2^n} \\ \vdots \\ x+md \equiv 0 \pmod{p_{m+1}^n} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \equiv 0 & (\text{mod } p_1^n) \\ x \equiv -d & (\text{mod } p_2^n) \\ \vdots & \\ x \equiv -md & (p_{m}^n) \end{cases} \Rightarrow \exists \text{ sol. (teo. cinese).}$$

es ultimo) $B_n = 2^{n^3+1} \underbrace{- 3^{n^2+1} + 5^{n+1}}_{\text{se } n \gg 0}$, $B_n - 2^{n^3+1} \ll 2^{n^3+1}$

supp. $\mathcal{P}$ finito: $p_1, \dots, p_N$ $B_n - 2^{n^3+1} \leq 2^{n^3}$ es

idea: trovo n t.c. B_n non sia div. per nessuno di questi primi.

se $(p_1 - 1) \mid n \Rightarrow B_n = 2^{(p_1-1)\cdot k+1} - 3^{(p_1-1)k'+1} + 5^{(p_1-1)\cdot k''+1}$

$\Rightarrow B_n \equiv (2^k)^{p_1-1} \cdot 2 - (\,-\,-\,)^{p_1-1} \cdot 3 + (\,-\,-\,)^{p_1-1} \cdot 5$

se $p \neq 2, 3, 5$ abbiamo vinto

$B_n \equiv 4 \pmod{p_1} \Rightarrow B_n \not\equiv 0 \pmod{p_1}$

$n := (p_1 - 1)(p_2 - 1) \cdots (p_N - 1)$

ho quasi finito:

$5 \mid B_n$?

no, $2^{n^3+1} \equiv 2 \pmod 5$ (se $N \geq 3$)

$3^{n^2+1} \equiv 3 \pmod 5$

idem per 3.

escludere che $B_n = 2^x$ per qualche x.