Combinatoria 1 - Basic [Tess]

Titolo nota 04/09/2014

1 - Tecniche di conteggio
2 - Double - Counting

i) Regola della somma — Chiave = "Disgiunti"
ii) Regola del prodotto — Chiave = "Indipendenti"

$$A = \bigsqcup_{i=1}^{n} A_i$$ unione disgiunta

$$|A| = \sum_{i=1}^{n} |A_i|$$

$$A = A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$$
$$|A| = \prod_{i=1}^{n} |A_i|$$

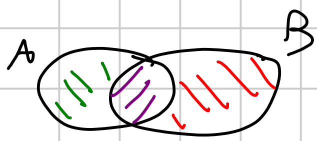
Esempi

10 atleti fanno una gara: quanti sono i podi?

Scelgo 1° in 10 modi
indip. 2° in 9 modi
indip. 3° in 8 modi

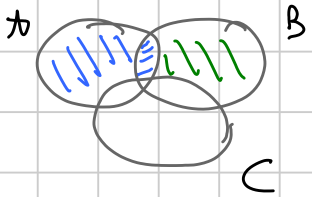
Permutazioni sono $n!$
Combinazioni sono $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

P.I.E.



$$|A \cup B| \neq |A| + |B|$$
$$A \cup B = (A \setminus B) \cup (A \cap B) \cup (B \setminus A)$$

R. Σ : $|A \cup B| = |A \setminus B| + |A \cap B| + |B \setminus A|$
$\overset{!}{=} |A| - \cancel{|A \cap B|} + \cancel{|A \cap B|} + |B| - |A \cap B|$
$\overset{!}{=} |A| + |B| - |A \cap B|$

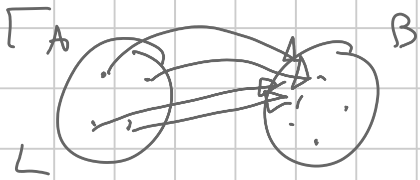


$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |C \cap A| + |A \cap B \cap C|$$

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{i<j} |A_i \cap A_j| + \sum_{i<j<k} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \dots \dots (-1)^{n+1} \left|\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right|$$

---

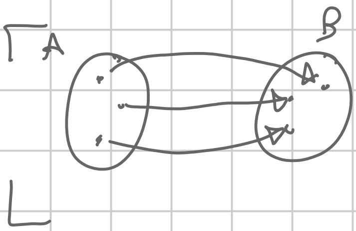
iii Bigezione



f qualsiasi

Se A, B insiemi e $f: A \to B$ t.c. f bigettiva = iniettiva + suriettiva

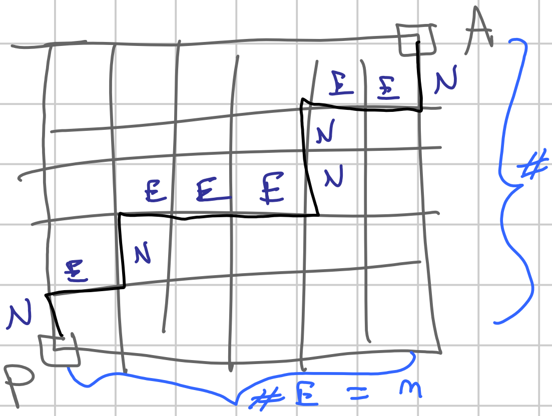
$\Rightarrow |A| = |B|$



f bigettiva

Come si usa?

Se so contare $|A|$ e so che $\exists$ bigezione $f: A \to B$ allora so contare $|B|$ e $|A| = |B|$

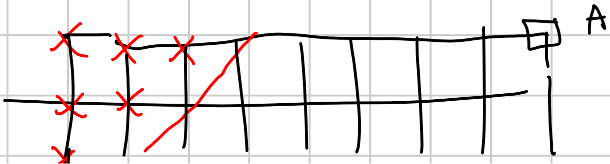


Percorsi monotoni
posso andare solo a N o a E

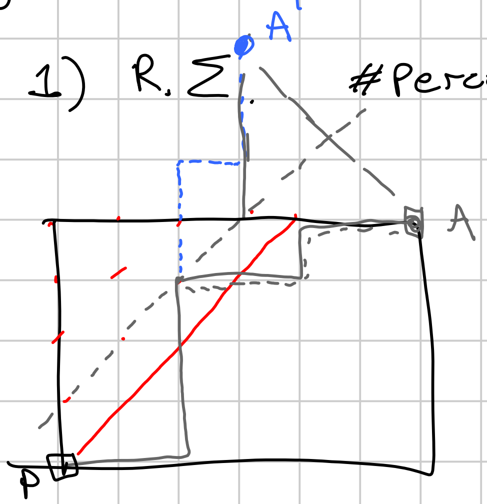
N E N E E E N N E E N è equiv. al percorso tracciato

R. Big. # perc. = # permutazioni di m "E" e n "N" $\overset{!}{=} \binom{m+n}{n}$

Percorsi monotoni sotto la diagonale



1) R. Σ.



#Percorsi sotto d. = # tutti i percorsi
— # percorsi sbagliati

faccio una riflessione rispetto
del percorso non appena
tocca

è la bigezione

p. sbagl. = # p. da P a A'

R. Big.

$$L_\phi = \binom{m+n}{m-1}$$

se $m < n$
e $A = (n, m)$

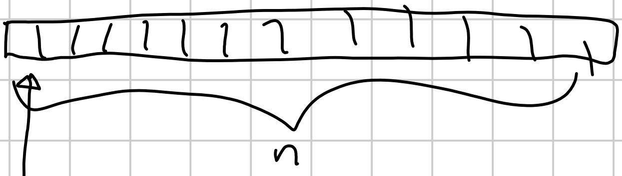
$$\# \text{perc. s. l. d.} = \binom{m+n}{m} - \binom{m+n}{m-1}$$

Ricorsione

$A_n \in \mathbb{N}$
cerco di calcolare A_n sfruttando A_k con $k < n$

Esempio
Quante sono le stringhe di "A" e "B" che NON hanno 2 "A" consecutive. (di n caratteri) $(= A_n)$

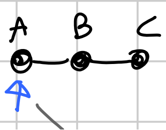
$A_1 = 2$; $A_2 = 3$; $A_3 = 5$; $A_4 = \ldots$



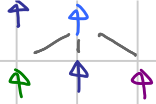
"A" → dopo viene una "B" → una parola con n-2 lettere
"B" → parola con n-1 lettere

$$A_n = A_{n-2} + A_{n-1}$$

Esempio



ad ogni "mossa" posso spostare la ↑
di al più 1



Contare il # di "percorsi" della ↑ che impiegano n "mosse".

Costruisco + successioni

A_n = # percorsi che finiscono in A

B_n = " " B

C_n = " " C

(La risposta sarà $A_n + B_n + C_n = S_n$)

$A_n = A_{n-1} + B_{n-1}$

$B_n = A_{n-1} + B_{n-1} + C_{n-1}$

$C_n = C_{n-1} + B_{n-1}$

voglio ricorsione su S_n

sommando ...

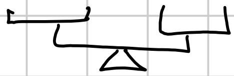
$$S_n = 2A_{n-1} + 3B_{n-1} + 2C_{n-1} = 2S_{n-1} + B_{n-1}$$

ma $B_n = S_{n-1}$; $S_n = 2S_{n-1} + S_{n-2}$

A mano S_0 e S_1.

IMO 2011 4

n pesi: $2^0, \dots, 2^{n-1}$



devo avere in ogni momento più peso a SX che a DX

In quanti modi posso disporli?

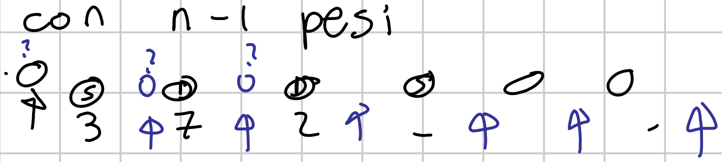
D_n = # ↑

voglio ricondurmi a D_{n-1}

IDEA "sistemo" 2^0, mi rimangono i pesi

$2^1, \dots, 2^{n-1} = 2(2^0, \dots, 2^{n-2})$

Data una disposizione degli n pesi, tolgo il peso più piccolo (2^0) e quello che mi rimane è una disposizione di n-1 pesi equivalenti al problema con n-1 pesi



1 poss.: a SX $\emptyset$ 2 poss. per ciascuno degli n-1 ↑ ho la scelta DX e SX

$$D_n = (1 + 2(n-1))\, D_{n-1}$$

Double Counting

Tecnica che usa i conteggi

Esempio

calcolare $1+2+\dots+n$

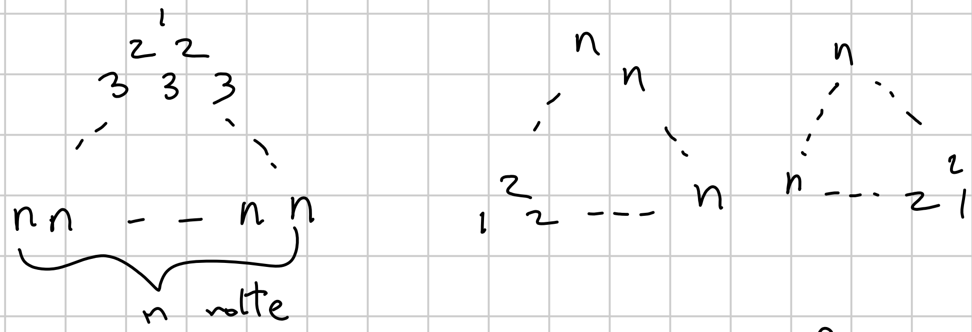
sol con D-C :

1	2	3	4	---		n
n	n-1	-	-	-	2	1

$$n \cdot (n+1) \underset{\text{per colonna}}{=} \text{Somma nella tabella} \overset{\text{per riga}}{=} 2 \sum_{i=1}^{n} i$$

Es 1.5 calcolare $1^2+2^2+\dots+n^2$

sol con D-C



Piano 1 P. 2 P. 3

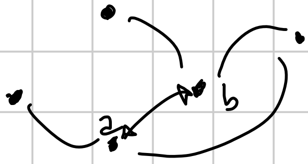
$$3 \sum_{i=1}^{n} i^2 \overset{\times \text{ piani}}{=} \text{Somma dei numeri scritti ?} = \underbrace{(2n+1)}_{\#\ \cancel{\text{po}}\ \text{colonna}} \ \underbrace{\frac{n(n+1)}{2}}_{\#\ \text{colonne}}$$

Grafo $= (V, E)$

V insieme dei vertici

$E \subseteq V \times V$ simmetrico (se $(a,b) \in E$, $(b,a) \in E$)

insieme dei lati / archi



$\deg(v)$ con $v \in V$

$\overset{!}{=}$ # archi che partono da v

$|E| = \#\sum_{\text{vertice}}$ archi per vertice $= \sum_{v \in V} \deg(v)$

è pari

$= 2\,\#$ tratti disegnati

$$\sum_{v \in V} \deg(v) \equiv 0 \pmod 2$$

$\Rightarrow$ # vertici con $\deg \equiv 1 \ (2)$ è pari

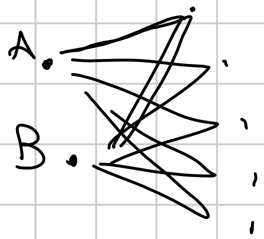
Senior 2002 – C1 n° 10

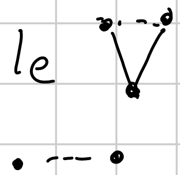
$12k$ persone

$3k+6$ strette d. m. per persona

$\exists\, N$ t.c. $\forall\, A, B$ persone $\exists\, N$ altri invitati t.c. A e B hanno stretto la mano a esatt. Δ

Per quali k è possibile?



IDEA D-C: contiamo le 

- se fissiamo gli apici ci sono $\binom{12k}{2} \cdot N$ di "V"
  (coppie)

- se fissiamo il centro V
  per ogni vertice $\binom{3k+6}{2}$ modi
  ci sono $12k \binom{3k+6}{2}$ di "V"

Quindi $\dfrac{\cancel{12k} \cdot (12k-1)}{\cancel{2}} N = \cancel{12k} \dfrac{(3k+6)(3k+5)}{\cancel{2}}$

$12k-1 \mid 9k^2+33k+30$

$$\frac{9k^2+33k+30}{12k-1} = Ak + B + \frac{C}{12k-1}$$

(Lezione N1)

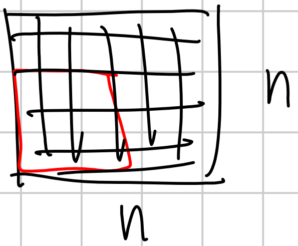
$\rightarrow$ solo un numero finito di k

forse c'è solo $k=3$

per ora se $k \neq 3$ allora N non è intero, quindi non si può fare

---

IMO 2014 - 2



n torri sulla griglia in modo che non si mangino a vicenda

rimarranno dei $\square$ senza torri *

Al variare della config. di torri quant'è al minimo la grandezza del massimo $\square$ di cui * ?

DC + Pigeonhole

Quanti sono i $\square$ di lato k? $= A$

Quanti $\square$ blocca 1 torre? $= B$

se $A > nB$ allora $\exists$ un $\square$ scoperto di lato k

$A = (n-k+1)^2$

$B = k^2$

da questa dis. in k si ottiene che se $k < \sqrt{n} - 1$ allora rimane un $\square$

La risposta era $\underbrace{k \leq \sqrt{n} \text{ si fa}}_{\text{DC migliorato}}$, $\underbrace{\text{di più no}}_{\text{mostrare un esempio}}$

riuscite a trovare il DC migl. che vi dà questa stima? ($k \leq \sqrt{n}$)

Esercizi

p. 18 – Es 100, 101, 102, 105
– Es 111, 112

p. 28 – Es 2

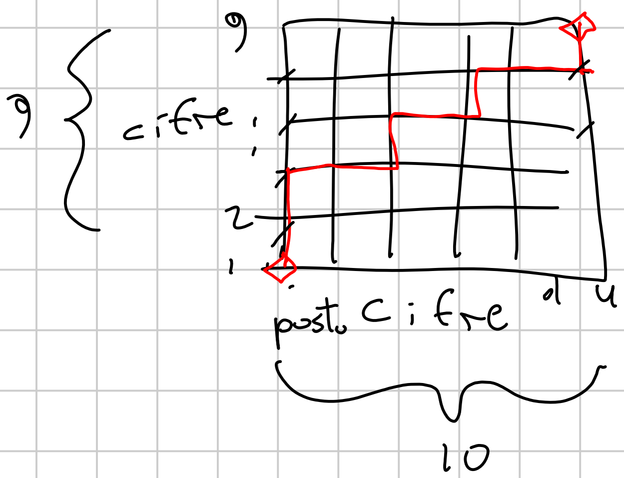
– Ricorsione
Quante stringhe di A,B senza 2A e senza 3B cons.?

DC – Scacchiera 8×8 suddivisa in n rettangoli; ogni rettangolo ha tante bianche quante nere e tutti i rettangoli hanno aree diverse.
Quant'è al max n?
– Divido alcuni interi da 1 a n in k coppie disgiunte, tali che le somme in ogni coppia siano diverse e $\leq n$.
max k = ?

Correzione Esercizi

Es 100   2 2 3 5 5 5 7 9 9 9
quanti sono?

Bigezione



Percorsi monotoni
$\updownarrow$ f big.
numeri crescent.

Ricorsione

stringhe senza 2A e senza 3B

+ ricorsioni !

$A_n = \#$ finiscono in A

$B_n = \#$ " in AB

$C_n =$ " in BB

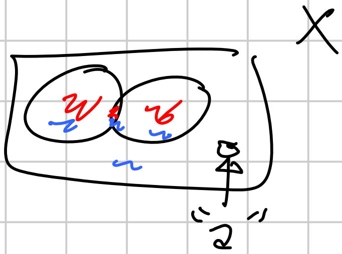
$$A_n = B_{n-1} + C_{n-1}$$
$$B_n = A_{n-1}$$
$$C_n = B_{n-1}$$

$$S_n = A_n + B_n + C_n$$
$$S_n = S_{n-1} + B_{n-1}$$
$$S_n = S_{n-1} + A_{n-2}$$
$$S_n = S_{n-1} + C_n$$

$$A_n = S_{n-1} - A_{n-1}$$
$$A_n + A_{n-1} = S_{n-1}$$
$$A_n + B_n = S_{n-1}$$
$$S_n = S_{n-1} + C_n$$

$$S_{n+2} - S_{n+1} = S_n - \cancel{S_{n-1}} + \cancel{S_{n-1}} - S_{n-2}$$
$$S_{n+2} = S_{n+1} + S_n - S_{n-2}$$

DC ES 112



$$\cdot \sum_{(A,B) \in \mathcal{P}(X)} |A \cup B|$$
$$= n \cdot 3 \cdot 4^{n-1}$$

conto sugli elementi

Scacchiera IMO '74, 4

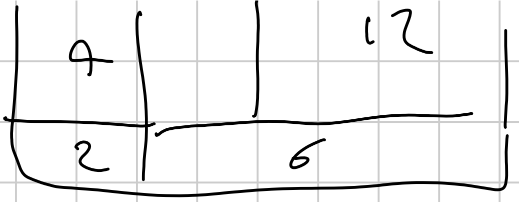
quanti rettangoli in una 8×8 ?

$$8 \times 8 = \text{Area} = a_1 + a_2 + \ldots + a_n \geq 2 + 4 + \ldots + 2n = n(n+1)$$

$$n \leq 7$$

← L'esempio

Un



TST 2013, 5

$1, \dots, n$

k coppie disgiunte
le somme delle coppie sono diverse e $\leq n$

$$\binom{2k+1}{2} \overset{\text{c. x numero}}{\leq} \text{Somma degli interi presi nelle coppie} \overset{\text{c. x le coppie}}{\leq} n + (n-1) + \dots + (n-k+1) = kn - \binom{k}{2}$$

almeno i primi $2k$

$$k(2k+1) \leq kn - \frac{k(k-1)}{2}$$
$$4k^2 + 2k \leq 2kn - k^2 + k$$
$$5k^2 + k \leq 2kn$$
$$5k + 1 \leq 2n$$
$$k \leq \frac{2n-1}{5}$$
$$k \leq \left\lfloor \frac{2n-1}{5} \right\rfloor$$

Euristica: per mostrare l'esempio sto attento ai casi di uguaglianza

"=" quando $2n \equiv 1 \mod 5$.