# Combinatoria 2 - Basic [Tess]

Titolo nota 06/09/2014

## Tecniche combinatoriche

| ESISTENZA | | NON ESISTENZA |
|---|---|---|
| COSTRUTTIVA | NON COSTRUTTIVA | |
| • mostrando l'esempio<br>• induzione<br>• algoritmiche (+ invarianti) | • pigeonhole (+ DC)<br>• principio dell'estremale | • invarianti (vere)<br>• colorazioni<br>• DC |

## Invarianti

sono quantità associate ad un sistema che subisce delle trasformazioni
- o non variano
- oppure lo fanno in modo controllato

sono utili per descrivere il sistema

I problemi sulla non esistenza
- ho un sistema che subisce trasformazioni
- ho una config. iniz.
- " " finale

Domanda: posso arrivare in finale?
se la risposta è no
- sia $Q = \_\_\_$
- $Q$ $\boxed{\text{non varia}}$ al variare del sistema
- $Q$ all'inizio è $A$; alla fine è $B$ e $A \neq B$

# Esempio

si scrivono gli interi da 1 a n

<u>mossa</u>: scelgo a e b scritti, li cancello e scrivo al posto $|a-b|$

Domanda: per quali n alla fine si ottiene 1 numero dispari?

oss 1: il numero di interi scritti diminuisce ad ogni mossa
$\Rightarrow$ alla fine ho sempre 1 solo numero

oss 2: la richiesta è una parità
$\Rightarrow$ la Q che cerco è una parità

oss 3: provo $Q = \sum$ interi scritti (mod 2)

hope Q non varia

prima ho $a+b$, dopo $|a-b| = a-b$ se wlog $a \geq b$

Q non varia $\Leftrightarrow$ $a+b \equiv a-b \pmod 2$

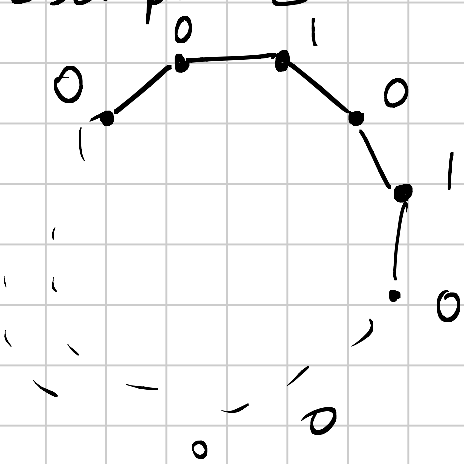
ora calcolo Q all'inizio: $1+2+\dots+n \pmod 2$

$$= \frac{n(n+1)}{2} \pmod 2 = \begin{cases} 0 & \text{se } n = 4k \vee 4k-1 \\ 1 & \text{se } n = 4k+1 \vee 4k+2 \end{cases}$$

alla fine Q è la parità dell'ultimo numero

quindi alla fine è dispari se $n = 4k+1 \vee 4k+2$

# Esempio 2



2014-agono regolare
sui vertici ci sono scritti dei numeri interi

mosse:
a) scelgo 2 vertici adiacenti e li incremento di 1
b) scelgo 2 vertici opposti e li incremento di 1

$\Downarrow$ invarianti!

Riesco ad ottenere una configurazione con i numeri sui vertici tutti uguali?

i vertici con il numero 1 sono in posto "dispari"
e gli altri vertici a distanza pari da questi sono in posto "dispari", gli altri sono in posto "pari".

$$Q = \sum_{i \text{ dispari}} a_i - \sum_{i \text{ pari}} a_i$$

per mostrare che Q non varia

a) parità diverse $\Rightarrow$ $a_i - a_{i+1}$ non varia se li incremento
b) $a_i$, $a_{i+1007}$ parità diverse : " " "

Q all'inizio è 2
Q alla fine è 0 $\qquad 2 \neq 0$

---

Esempio 3

sono date 2014 carte in fila
le carte hanno un lato bianco e uno nero
all'inizio sono tutte girate sul bianco

mossa : scelgo 50 carte consecutive t.c. quella + a SX
invarianti!! sia bianca, e le capovolgo

Dimostrare che sono possibili solo un numero finito di mosse.

L'idea di prima sulle invarianti "vere" non può funzionare

IDEA : invarianti monotone!

$$Q = \sum_{i=1}^{2014} \varepsilon_i 2^i \qquad \text{dove } \varepsilon_i = \begin{cases} 0 & \text{se la } i\text{-esima è bianca} \\ 1 & \text{se la " è nera} \end{cases}$$

è "vedere un numero in base 2 scritto nelle carte"

Voglio mostrare che $Q$ cresce sempre

sto considerando $\underbrace{\varepsilon_{i+49}}_{=0}, \varepsilon_{i+48}, \ldots, \varepsilon_i$

(p. mossa) la somma di $Q$ "ristretta" a queste 50 carte è

$$\sum_{j=0}^{48} \varepsilon_{i+j} 2^{i+j} \leq \sum_{j=0}^{48} 2^{i+j} = 2^i(2^{49}-1)$$

(d. mossa) $$\sum_{j=0}^{48} (1-\varepsilon_{i+j}) 2^{i+j} + 2^{i+49} \geqslant 2^{i+49} = 2^i \cdot 2^{49}$$

$$Q(\text{dopo}) - Q(\text{prima}) \geqslant 2^i \cdot 2^{49} - 2^i(2^{49}-1) = 2^i \geqslant 1$$

Quindi $Q$ aumenta sempre

$Q$ all'inizio vale $0$

alla fine vale $\leq 2^{2015}$ (l'importante è che ci sia un bound finito)

sono possibili solo un numero finito di mosse.

$\Leftarrow$ " " " " aumenti di $Q$.

---

## Principio dell'estremale

Vogliamo mostrare che tra tante possibilità (tanti oggetti) ce n'è 1 che soddisfa una proprietà $P$.

P.E suggerisce: sia $Q$ una quantità associata a tali oggetti, prendi quello che ha $Q$ massima e mostra che questo oggetto ha la proprietà $P$.

se per assurdo $\text{ogg}_{max}$ non ha $P$, posso variarlo di poco e mostro che la variazione ha $Q$ più grande.

Quando esiste min / max?

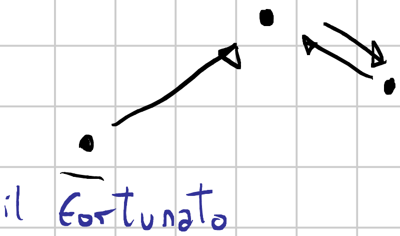
- Quando ho solo finiti oggetti (min e max)
- $A \subseteq \mathbb{N}$, $A \neq \emptyset$ allora ho il min

- $A \subseteq \mathbb{R}$ ed è limitato e chiuso allora ho min e max

---

# Esempio

alcuni cowboy si sparano e sparano al + vicino



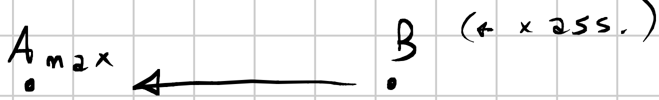

(ip: # dispari di cowboy
le distanze rec. sono
tutte distinte )

Dimostrare che almeno uno
sopravvive.

Ad ogni cowboy associo $Q =$ la lunghezza che compie il suo proiettile

Scelgo il cowboy che ha $Q$ massima
$\exists$ perché i cowboy sono finiti
$\exists!$ " le distanze sono finite

se x ass. qualcuno gli spara




$Q(A_{max}) \leq dist(A_{max}, B)$ ( def. $Q(A)$ )

$dist(A_{max}, B) \underset{\text{def. } Q}{=} Q(B) \underset{max}{<} Q(A_{max})$

$dist(A, B) < Q(A) \leq dist(A, B)$ assurdo

alternativ. $Q(A) \leq dist(A, B) = Q(B)$
ma $A$ era scelta massima!

secondo punto: dimostrate che le traiettorie dei proiettili
non formano mai linee spezzate chiuse
($\geq 3$ segmenti)

# Induzione

Dimos. sbagliata: P.B. —
P.I. suppongo sia vero per $n$
dimostro che è vero per $n+1$

Prendo una config. da $n$, ~~aggiungo~~ una cosa che mi fa passare da $n$ a $n+1$
e dimostro che la config. ampliata soddisfa la tesi.

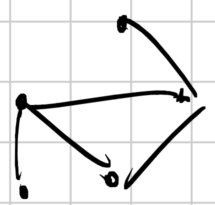
---

Dim. giusta: P.B. —
P.I. " "
Prendo una config. da $n+1$, tolgo una cosa che mi fa passare da $n+1$ a $n$ e riconduco la config. + piccola all'ip. ind. = al problema precedente

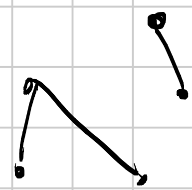
---

# Grafo $(V, E)$

Def. connesso: se comunque scelti $v_i, v_j \in V$
$\exists$ un cammino da $v_i$ a $v_j$ sul grafo



connesso

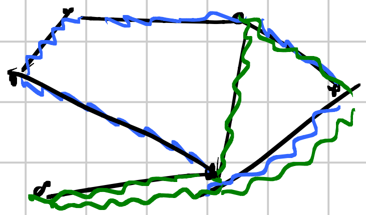


non connesso

(def: ogni classe di equivalenza si chiama "componente connessa")

Def ciclo: è un cammino chiuso che passa una sola volta per alcuni vertici

$$v_1 \to v_2 \to v_3 - - - - \to v_n \to v_1$$




(def.: se passo più volte su un vertice si chiama "circuito")

Def Albero: grafo
- connesso
- non ha cicli

Albero

Problema: mostrare che in un albero $|V| = |E| + 1$

IDEA da casa: se devo dimostrare che un grafo ha una certa proprietà, lo dimostro per induzione

provo induzione su $|V|$

P.B. $|V| = 1$, $|V| = |E| + 1$ sì

P.I. vero per $|V| = n$

voglio mostrarlo per $n+1$

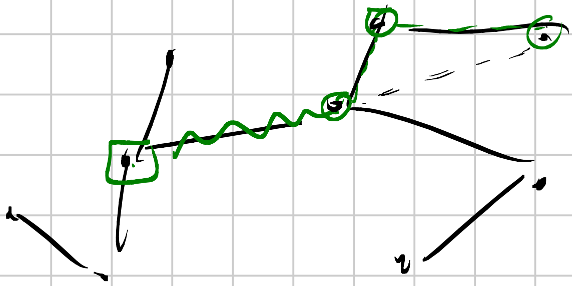
se trovo un vertice con un solo arco, lo tolgo

e ottengo un grafo, $|V| = n$, chiaramente non sono spuntati cicli, per mostrare che è connesso prendo $v_i, v_j$ nel nuovo grafo, esisteva il percorso nel grafo più grande $v_i \to \underbrace{v_{i+1} - - - \to}_{} v_j$

se non ho tolto nessuno di ... ho vinto

non li ho tolti perché ciascuno ha grado $\geq 2$

Per mostrare che un vertice ha grado $=1$, cammino a caso da un vertice (scelto a caso) senza ritoccare 2 volte lo stesso vertice



mi fermo x 2 motivi:
- non ci sono altri archi (ho vinto)
- tutti gli altri li ho già visitati
però così ho un ciclo

quindi mi fermo in un vertice che posso togliere.

quindi $|V| \stackrel{?}{=} |E| + 1$

so che $|V_-| = |E_-| + 1$ $\quad (V_-, E_-)$ è il grafo a cui mi sono ricondotto

quando ho tolto il vertice, ho anche rimosso un solo arco, cioè $|V| = |V_-| + 1$ e $|E| = |E_-| + 1$.

---

# Algoritmi "Greedy"

ad ogni passaggio scelgo la cosa migliore in quel momento

## Esempio

$$P_n = \{ 2^n, 2^{n-1} \cdot 3, \ldots, 3^n \}$$

se $Y \subseteq P_n$, $S_Y$ è la somma degli elementi in $Y$
(se $Y = \emptyset$, $S_Y = 0$)

Dimostrare che $\forall r \in \mathbb{R}$ $\quad 0 \leq r \leq 3^{n+1} - 2^{n+1}$
lo posso "approssimare" con una qualche $S_Y$, in modo che $0 \leq r - S_Y < 2^n$

IDEA : Alg. Greedy

considero $Y = \emptyset$, ad ogni passo scelgo il più grande elemento $x \in P_n$ t.c. $S_{Y \cup \{x\}} < r$

voglio mostrare che quando mi fermo ottengo $Y$ giusto

se mi fermo, non ho più elementi in $P_n$ tra 0 e $r - S_Y$
in particolare se non ho già preso $2^n$

$$2^n \notin [0, r - S_Y] \Rightarrow r - S_Y < 2^n$$

se invece $2^n \in Y$
sia $x$ il + piccolo elemento rimanente, se esiste
allora $x \notin [0, r - S_Y] \Rightarrow r - S_Y < x$

→ se $r - S_Y \geq 2^n$
al posto di $Y$ aggiungo $x$ e tolgo tutti gli elementi in $P_n$ e in $Y$ $< x$

$$[\underbrace{2^n, 2^{n-1}3, \dots,}_{\text{li ho presi}} \ \underset{\text{no}}{x} \ \dots \ 3^n]$$

$$\Sigma = 2^{n-i}\left(\frac{3^i - 2^i}{3-2}\right) = 2^{n-i}3^i - 2^n = x - 2^n \qquad x = 2^{n-i}3^i$$

$$S_{Y'} = S_Y + x - (x - 2^n) = S_Y + 2^n$$

$0 \leq r - S_{Y'} < r - S_Y$ (x costr.), quindi non avevo seguito il greedy.

se $\nexists\, x$, allora $Y = P_n$ e viene subito.

---

Esercizi

P. 19 115, 117
119, 120
121

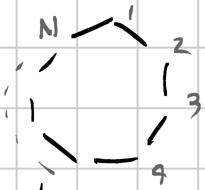
P. 30 5, 13, 14, 16
P.E., P.E. Ind., Gre., Inv.

- Alcuni pesetti hanno somma $= n$ e sono tutti $\leq 1$

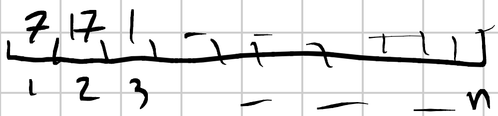
Gre. Quante scatole servono al min. se vogliamo distribuirli in modo che nessuna scatola contenga peso $> 1$ ?

# Correzione

115 $\quad a^2+b^2+c^2$ è invariante

117 
$\sum_{i=1}^{N} i\, m_i \pmod N$ esclude $N$ pari

$N$ dispari si mostra la seq. di mosse

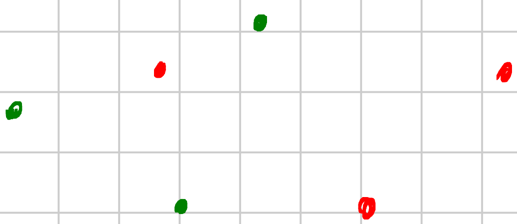
119 

$\sum_{i=1}^{n} i\, a_i \nearrow$ $\qquad \max_{1\leq i\leq n} \{a_i\} = M$

$\sum_{i=1}^{n} i\, a_i \leq \sum_{i=1}^{n} i\, M = \underline{\text{finito}}$

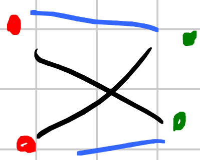
120 $\quad 2\,\#\text{monete} - \#\text{pile} \searrow$

121 mancava l'ip. che i punti sono a 3 a 3 non allineati



Ad ogni bigezione rosso $\leftrightarrow$ verde associo i segmenti
associo $Q = \sum_{1\leq i\leq n} \text{lung. segmenti}$

Allora la minima $Q$ non ha intersezioni

x assurdo  se — si incrociano, — hanno somma $<$

5. Grafo $\forall (a,b)\ \exists\ a \to b \lor b \to a$
percorsi anche non diretti

Sia $Q(a) = \#$ città raggiungibili da $a$

Prendo una città con $Q$ massimo (sulla città $c$

se $Q(c) < n$

$\exists$ $d$ città t.c. $\nexists$ $c \to d$

$\Rightarrow$ $\exists$ $d \to c$ $\Rightarrow$ $Q(d) \geq Q(c)+1$ assurdo.

14. 100 kg sono ripartiti in 50 sacchi (non vuoti)

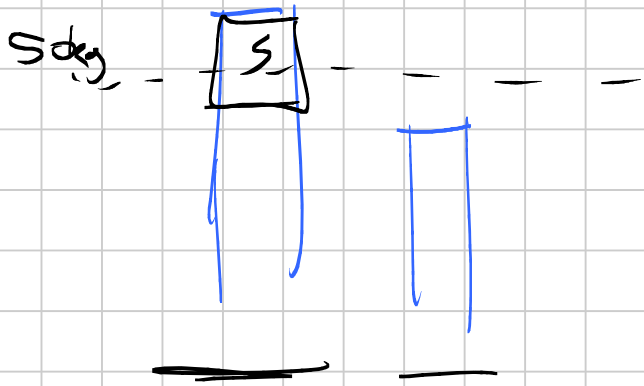
voglio smezzare il carico 50kg - 50kg

(nessun sacco $\geq 51$ kg)

Greedy: prendo il sacco + pesante

e lo piazzo nel carico + leggere

Se per assurdo non concludo 50kg - 50kg




sia S l'ultimo sacco che ho messo nel carico + pesante alla fine

$S \geq 2$

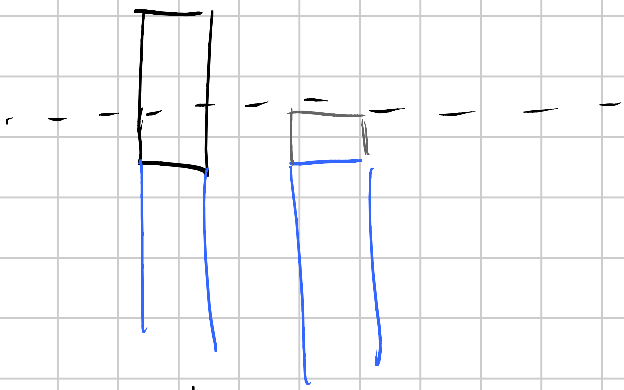
se $S = 2$ S è l'ultimo sacco

$\Rightarrow$ tutti i sacchi pesano $\geq 2$

$\Rightarrow$ " " esattamente 2

allora concludevo

$S \geq 3$



Quanto vale ⊓ ⊓ ?

$100 - S$

Però ⊓ sono fatti da sacchi che pesano almeno quanto S, supponiamo che siano n

quindi: ⊓ $\geq n \cdot S$

⊓ $\leq 100 - S$

$(n+1)S \leq 100$