P-BASIC: Induzione & Pigeonhole - Sem

Titolo nota 01/09/2014

Ingredienti: proposizione a proposito di un generico intero.

↳ di solito: per tutti gli interi da un certo punto in poi

Scopo: dimostrare la proposizione per un generico intero

Ricetta:
- Passo base: la propos. contiene $\forall n \geq n_0$
- Passo induttivo

↓

Dimostro che SE la propos. è vera per un qualche n allora è vera anche per $n+1$.

Risultato: La propos. è vera $\forall n \geq n_0$

Oss: Si può fare anche all'indietro!!

Es: $0 + 1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

passo base: $n = 1$ $\qquad 1 = \frac{1 \cdot 2}{2}$ ok.

passo induttivo: Voglio dim che $\underbrace{1 + 2 + \ldots + n}_{= \frac{n(n+1)}{2}} + (n+1) \overset{?}{=} \frac{(n+1)(n+2)}{2}$

$\Leftarrow$ per ipotesi induttiva

$$\Rightarrow \quad \frac{n(n+1)}{2} + n+1 \overset{?}{=} \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

che è vera, basta fare il conto!!

Es: $1 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(2n+1)(n+1)}{6}$

Es: $1+2^3+3^3+\dots+n^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$

Es (disug. di BERNOULLI) $x > -1$ reale, $n \in \mathbb{N}$ $(\forall n \geq 0)$

allora $(1+x)^n \geq 1+nx$

dim: $\boxed{\text{induz. su } n}$ PB: $n=0$ $(1+x)^0 = 1 \geq 1+0=1$ ok.

PI: Voglio dim $(1+x)^{n+1} \overset{?}{\underset{H}{\geq}} 1+(n+1)x$

$$\begin{array}{c} \| \\ \underbrace{(1+x)^n}_{\substack{\vee\!/ \\ 1+nx}} \cdot (1+x) \end{array}$$

per ip. ind.

$$(1+x)^{n+1} \underset{(=)}{\geq} (1+x)^n \cdot (1+x) \geq (1+nx)(1+x) = 1+nx+x+nx^2 =$$

$$= 1+(n+1)x + \underbrace{nx^2}_{\geq 0} \geq 1+(n+1)x. \text{ ok.}$$

Es: $n^2 \leq 2^n$ $n=0 \to 0 \leq 1$ ok

$n=1 \to 1 \leq 2$ ok $3^2 = 9 \leq 2^3 = 8$

PI: Voglio $(n+1)^2 \overset{?}{\leq} 2^{n+1}$

$$\begin{array}{l} \| \\ n^2+2n+1 \leq 2^n + \underbrace{2n+1}_{\substack{/\!\wedge \\ 2^n}} \leq 2\cdot 2^n = 2^{n+1} \\ /\!\wedge \\ 2^n \end{array}$$

$\leftarrow$ ip. ind. $\leftarrow$ no! $\leftarrow$ FALSA se la voglio $\forall n$

$$\boxed{2n+1 \underset{\boxed{n \geq 3}}{\leq} (n-1)n+1 = n^2-n+1 \leq n^2}$$

$$n^2+2n+1 \underset{\text{ip. ind.}}{\leq} 2^n + 2n+1 \underset{n\geq 3}{\leq} 2^n + n^2 \underset{\text{ip. ind.}}{\leq} 2^n+2^n \quad \text{se } n \geq 3$$

PI è vero per $n \geq 3$

però come PB devo prendere $n_0 \geq 4$ $\quad$ $n_0 = 4$ funziona

2^n, n^2

$1 \quad 2 \quad 4 \quad 8 \quad 16$

$0 \quad 1 \quad 4 \quad 9 \quad 16$

$16 \leq 2^4 = 16.$

Definizioni ricorsive

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} i} = \boxed{\frac{n(n+1)}{2}}$$

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n = \prod_{i=1}^{n} i$$

$[0! = 1]$

$1! = 1 \leftarrow$ "PB"

$n! = n \cdot (n-1)! \leftarrow$ "PI"

Es: $\dfrac{(2n)!}{n!\,n!} \leq 4^n$ $\qquad$ PB: $n = 1$ $\quad 2 \leq 4$

PI:
$$\frac{(2n+2)!}{(n+1)!\,(n+1)!} = \frac{(2n)!}{n!\,n!} \cdot \frac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1)^2} \underset{\text{ip. ind.}}{\leq} 4^n \cdot \frac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1)^2} =$$

$$= 4^n \, \frac{2n+1}{n+1} \cdot 2 = 4^n \left(2 - \frac{1}{n+1}\right) \cdot 2 \leq 4^n \cdot 2 \cdot 2 = 4^{n+1} \quad \text{ok.}$$

$\frac{1}{n+1} \geq 0$

Es che non viene per induzione: $\dfrac{(2n)!}{n!\,n!} \leq \dfrac{4^n}{\sqrt{3n}}$ $\quad \forall n \geq 1$

Quello che funziona: $\dfrac{(2n)!}{n!\,n!} \leq \dfrac{4^n}{\sqrt{3n+1}}$ $\quad \forall n \geq 1$

Quello figo: $\dfrac{(2n)!}{n!\,n!} \leq \dfrac{4^n}{\sqrt{\pi n + 1}}$

$$= \binom{2n}{n}$$

Fibonacci: 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55

$$\begin{cases} a_0 = 0 \\ a_1 = 1 \\ a_2 = 1 \\ a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \quad \forall n \geq 3 \end{cases}$$

$a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_2 = 1$ ← PB

$\forall n \geq 3$ ← PI

Se la propos. è vera per $n-1$ e n, allora è vera per $n+1$

Es falso: Tutti i fibonacci (a_n, $n \geq 0$) sono pari

$a_0 = 0$ è pari ← Passo (base) troppo corto.

Se a_{n-1}, a_n sono pari, allora $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$ è pari.

Induzione estesa:
(Induzione forte)

- Passo base: $n = n_0$
- Passo induttivo: se la propos. è vera per $n_0, n_0+1, \dots, n$ allora è vera per $n+1$.

Es: Fattorizzazione in fattori primi
(esistenza)

Es: Ogni numero naturale si può scrivere come somma di Fibonacci non consecutivi

37 il + grande Fib ≤ 37 è 34
$\Rightarrow 37 = 34 + 3$

38 $\longrightarrow$ 34 $\quad 38 - 34 = 4 \longrightarrow 3 \longrightarrow 4 - 3 = 1$

$34 + 3 + 1$

dim: Suppongo di saperlo fare per $1, 2, \dots, n$.

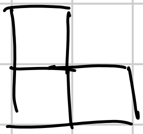
Prendo $n+1$ e sia F il più grande Fib. $\leq n+1$.

Ora $m = n+1-F \leq n \Rightarrow$ lo so scrivere come somma di Fib. non consec.

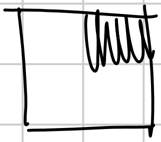
$m = F' + \dots$ Voglio escludere che F e F' siano Fib. consec., se lo fossero $F+F' =$ fib.

e $F+F' \leq n+1 \Rightarrow F' = 0 \Rightarrow m = 0$

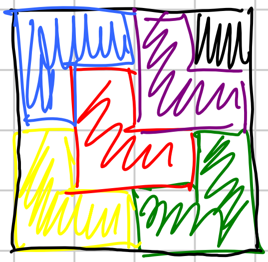
Es: Ogni scacchiera $2^n \times 2^n$ senza un angolo si tassella con trimini a L



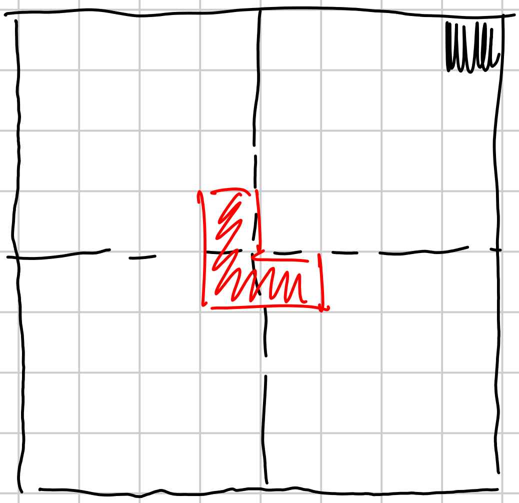
$n=1$



$n=2$



$n=3$

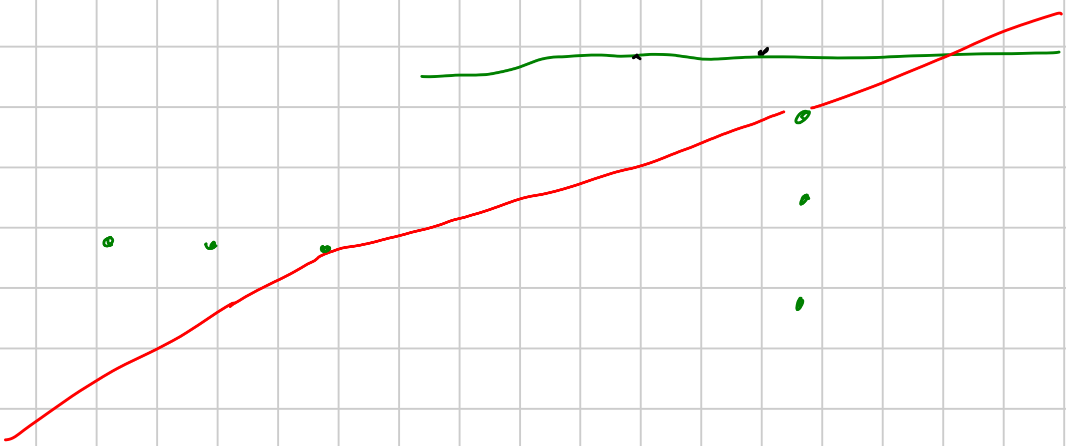


Es: $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$

$$f(f(x)) = \frac{x}{2x+1}$$

$$\underbrace{f(f(\cdots f}_{n}(x)\cdots)) = \frac{x}{nx+1}$$

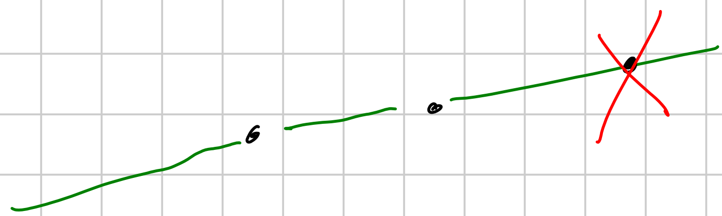
Es: Dati n punti nel piano tali che comunque presine 2, la retta che vi passa contiene un terzo punto (degli n), dimostrare che sono tutti allineati



Dim (SBAGLIATA): PB $n=3$ ovvio.

PI: Prendo $n+1$ punti, ne levo 1, gli n che restano stanno su una retta per ip. ind.
Ma allora l'$n+1$-esimo sta pure lui sulla retta.

Problema: Non è detto che togliendo 1 punto i restanti n soddisfino ancora l'ipotesi del Teorema.



Pigeonhole: Se ho $n+1$ oggetti e n cassetti allora c'è almeno 1 cassetto con almeno 2 oggetti.

•) Tra di voi (23) ci sono almeno 2 persone nate nello stesso mese.

•) Tra di voi ci sono almeno 2 persone che qui hanno lo stesso numero di conoscenti.

$0, 1, \dots, \cancel{23}$ ← nessuno conosce davvero se stesso.
22

non ci possono essere contemp$^{\text{te}}$ 0 e 22 o c'è un solitario o c'è un popolare

$\Rightarrow$ ho 22 possibilità e 23 persone
$\Rightarrow$ ok.

Es: Comunque presi $n+1$ interi tra 1 e $2n$, ce ne sono 2 di cui uno divide l'altro.

$2^a \cdot d$ ← dispari

Cassetto = { numeri della forma $2^a \cdot d$ per un certo fissato d }

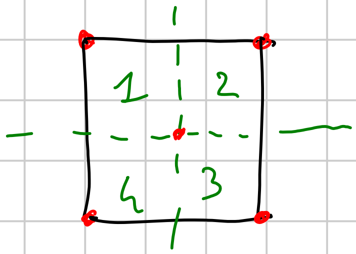
1	3 5 7 9
2	6
4	12
8	⋮
16	
32	
64	

← n cassetti

ho $n+1$ numeri
⇒ 2 sono della forma

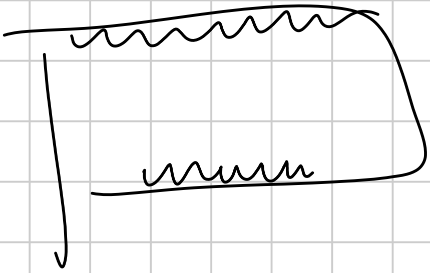
$2^a \cdot d$, $2^b \cdot d$

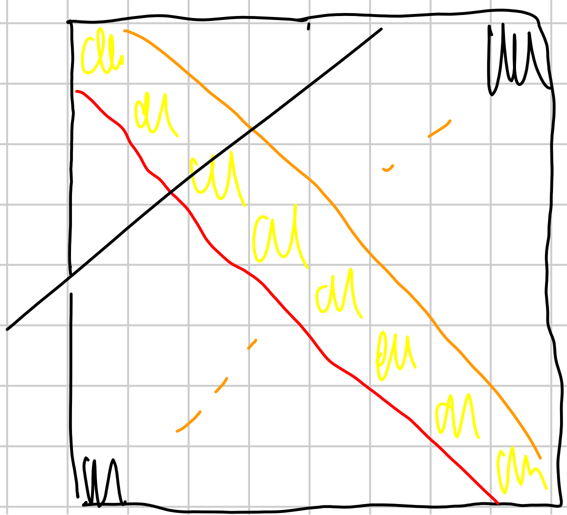
ES: Dati 5 pti nel quadrato di lato 1 ce ne sono 2 che distano meno di $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ($\leq$)



ES. Quanti alfieri posso mettere al massimo su una scacchiera (8×8) senza che siano in presa tra di loro.

Fino a 14 (8 su un lato, 6 sull'altro) so fa





≤ 14