Algebra 2 - Medium [Tess]

Approccio contoso

$$\sum_{cyc} \frac{a}{b+c} \geq \frac{3}{2}$$

$$\sum_{cyc} a(a+b)(a+c) \geq \frac{3}{2}(a+b)(b+c)(c+a)$$

$$\sum_{cyc} a^3 + \sum_{sym} a^2b + 3abc \geq \frac{3}{2}\sum_{sym} a^2b + 3abc$$

$$2\sum_{cyc} a^3 \geq \sum_{sym} a^2b$$

Ho vinto per bunching

- Polinomi
- Grado omogeneo
- sommatorie simmetriche

Th: $\sum_{sym} a_1^{t_1} a_2^{t_2} \cdot \ldots a_n^{t_n} \geq \sum_{sym} a_1^{u_1} \ldots a_n^{u_n}$ è vera se

$a_i \geq 0 \quad \forall i$

(wlog $t_1 \geq t_2 \geq \ldots \geq t_n$, $u_1 \geq \ldots \geq u_n$)

$$\left.\begin{array}{l} \cdot\ t_1 \geq u_1 \\ \cdot\ t_1+t_2 \geq u_1+u_2 \\ \quad\vdots \end{array}\right] \geq$$

$$\cdot\ t_1+\ldots+t_n = u_1+\ldots+u_n \quad \Big] =$$

Vettori non confrontabili per bunching

$(3,3,0) \qquad (4,1,1)$

$\Rightarrow$ non è sempre vero che $\sum_{sym} a^3b^3 \geq \sum_{sym} a^4bc$

né $\sum_{sym} a^3b^3 \leq \sum_{sym} a^4bc$

Esempio

$a, b, c > 0 \quad a+b+c = 3$

$$\sum_c \frac{1}{a^2} \geq \sum_c a^2$$

$$\sum_c a^2b^2 \geq \sum_c a^4b^2c^2$$

$$\sum_c a^2b^2 \left(\sum a\right)^4 \geq 81 \sum_c a^4b^2c^2$$

$$\sum_c a^2b^2 \cdot \left(\sum a^2 + 2\sum ab\right)^2 \geq 81 \sum_c a^4b^2c^2$$

$$\sum_c a^2b^2 \cdot \left(\left(\sum a^2\right)^2 + 4\sum a^2 \sum ab + 4\left(\sum ab\right)^2\right) \geq 81 \sum_c a^4b^2c^2$$

$$\sum a^4 + 2\sum a^2b^2 + 4\sum\left(a^3b + a^2bc + a^3c\right)$$
$$+ 4\left(\sum a^2b^2 + 2\sum a^2bc\right)$$
$$\left(\sum_c a^4 + 6\sum a^2b^2 + 4\sum_s a^3b + 12\sum a^2bc\right)$$

$$\left\{\begin{aligned} &\sum_s a^6b^2 + \sum_c a^4b^2c^2 + 6\sum a^4b^4 + 12\sum a^4b^2c^2 \\ &4\sum_s a^5b^3 + 4\sum_s a^3b^3c^2 + 4\sum_s a^5b^2c \\ &12\sum_s a^4b^3c + 12\sum a^3b^3c^2 \end{aligned}\right.$$

$$\geq 81 \sum_c a^4b^2c^2$$

Bunching da solo non basta!!

$$\sum_s a^3 + \sum_s abc \geq 2 \sum_s a^2 b$$

forte + scarso $\geq$ 2 medio

è equivalente a Schur:

$$\sum_c a(a-b)(a-c) \geq 0$$

Data la simmetria posso supporre $a \geq b \geq c$

$$\sum \;\; '' \;\; \geq a(a-b)(a-c) + b(b-a)(b-c) =$$

$$\quad \geq 0 \quad \geq 0 \qquad \leq 0 \quad \geq 0$$

$$=(a-b)[a^2 - ac - b^2 + bc]$$

$$=(a-b)^2(a+b-c)$$

$$\geq 0 \qquad \geq 0$$

Lo stesso risultato si ha per

$$\sum_c a^m (a^n - b^n)(a^n - c^n) \geq 0$$

$$m, n \geq 0$$

altre varianti si ottengono ponendo al posto di a, b, c, ab, bc, ca.

Esempio asimmetrico

$$\sum_c a^4 b \geq \sum_c a^2 b^2 c$$

$$a^4 b + b^4 c + c^4 a \geq a^2 b^2 c + a^2 b c^2 + a b^2 c^2$$

si fa con

$\to$ AM-GM pesata

$$\frac{x\, a^4 b + y\, b^4 c + z\, c^4 a}{x+y+z} \geq \sqrt[x+y+z]{(a^4 b)^x (b^4 c)^y (c^4 a)^z}$$

sommo le cicliche di questa disug.
e ottengo la tesi

voglio capire chi sono x, y, z

Se scelgo x, y, z $\qquad a^2 b^2 c$
chi ottengo sotto la radice?

a) $\dfrac{4x+z}{x+y+z} = 2$

b) $x + 4y = 2(x+y+z)$

c) - - - - - $\qquad$ omogeneo

$$2x = 2y + z \qquad 2x = x + 2z + z$$
$$2y = x + 2z \qquad x = 3z$$
$$2y = 5z$$

Una scelta è $z=2 \quad y=5 \quad x=6$

Ho trovato dei pesi positivi, e sono felice :)

Disuguaglianze con frazioni

Esempio 1

$$\sum_{c} \frac{a}{b+2c+d} \geq 1$$

$$C-S: \left(\sum_i a_i^2\right)\left(\sum_i b_i^2\right) \geq \left(\sum_i a_i b_i\right)^2$$

$$\left(\sum_i a_i^2\right) \geq \frac{\left(\sum a_i b_i\right)^2}{\sum_i b_i^2}$$

$$a_i = \frac{c_i}{b_i} \Rightarrow$$

$$\sum_i \frac{c_i^2}{b_i^2} \geq \frac{\left(\sum c_i\right)^2}{\sum b_i^2}$$

$$d_i = \sqrt{b_i}$$

$$\sum_i \frac{c_i^2}{d_i} \geq \frac{\left(\sum c_i\right)^2}{\sum d_i}$$

Lemma di Titu

vale per $d_i > 0$

$$\sum_{c} \frac{a}{b+2c+d} \geq \frac{\left(\sum_c \sqrt{a}\right)^2}{4\sum_c a} \geq 1$$

$c_i = \sqrt{a}$

$d_i = b+2c+d$

hope!

Però le nostre sono vane speranze

Proviamo così:

$$\sum_c \frac{a^2}{(b+2c+d)a} \geq \frac{\left(\sum a\right)^2}{\frac{1}{2}\sum_s ab+2ac+2bd} \geq 1$$

$c_i = a$

$d_i = \text{den}$

hope

$$\left(\sum a\right)^2 = \sum a^2 + \frac{1}{2}\cancel{\sum_s} ab \geq \frac{1}{2}\cancel{\sum_s} ab + 2ac + 2bd$$

$\Updownarrow$

$\rightarrow$ ora sono felice: $(a-c)^2+(b-d)^2 \geq 0$

Esempio 2

$xyz = 3(x+y+z)$

$$\sum_c \frac{1}{x^2\underbrace{(y+1)}} \geq \frac{3}{4(x+y+z)}$$

non è omogeneo!

piccola sostituzione

$x \to \frac{1}{a}$ e cyc

la cond. è $1 = 3\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)abc$

$$\frac{1}{3} = ab+bc+ca$$

la dis. è

$$\sum_c \frac{a^2 b}{b+1} \geq \frac{3abc}{4(ab+bc+ca)}$$

$$\sum_c \frac{a^2 b}{b+1} = \sum_c \frac{a^2}{\left(\frac{b+1}{b}\right)} \underset{\text{Titu}}{\geq} \frac{\left(\sum a\right)^2}{3+\sum \frac{1}{a}}$$

hope:

$$\left(\sum a\right)^2 4 \sum ab \geq 9abc + 3\sum ab$$

$$\left(\sum a\right)^2 \frac{4}{3} \geq 9abc + 3\sum ab$$

$$\frac{4}{3}\sum a^2 + \frac{8}{3}\sum ab \geq 9abc + \frac{9}{3}\sum ab$$

$$4\sum a^2 \geq 27abc + \sum ab$$

$$\sum a^2 \geq \sum ab \qquad \sum a^2 \underset{\text{hope}}{\geq} 9abc$$

$$\sum a^2 \geq \sum ab = \frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{3} \geq 9abc \implies \left(\sum ab\right)^2 \cdot 3 \geq 81 a^2 b^2 c^2$$

per AM-GM su tutti i termini

Esempio 3

$$\sum_{c} \frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}} \geq 1$$

variante di C-S

$$\left(\sum a_i^3\right)\left(\sum b_i^3\right)\left(\sum c_i^3\right) \geq \left(\sum a_i b_i c_i\right)^3$$

$$\Updownarrow$$

$$\left(\sum a_i\right)\left(\sum b_i\right)\left(\sum c_i\right) \geq \left(\sum \sqrt[3]{a_i b_i c_i}\right)^3$$

l'idea per applicarla è far sparire le $\sqrt[3]{\ }$

$$a_1 = \frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}$$

come scelgo b_1 e c_1?

potrei fare $b_1 = \sqrt{a^2+8bc}$ e $c_1 = a^2$

invece

potrei fare $b_1 = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}$ $c_1 = a(a^2+8bc)$

cosa ottengo

$$\left(\sum \text{testo}\right)^2 \left(\sum_c (a^3+8abc)\right) \geq \left(\sum a\right)^3$$

hope:

$$\left(\sum a\right)^3 \geq \sum_c (a^3+8abc)$$

$$\cancel{\sum a^3} + 3\sum_s a^2b + 6abc \geq \cancel{\sum a^3} + 24abc$$

(IMO 2001, 2)

Esempio 4 (SL A7, 2009 o 2010)

$a^2+b^2+c^2=3$; $a+b,\ b+c,\ c+a > \sqrt{2}$

$$\Rightarrow \quad \sum_c \frac{a}{(b+c-a)^2} \geq \frac{3}{(abc)^2}$$

con C-S (Titu)

$$\sum \frac{a^2}{a(b+c-a)^2} \geq \frac{(\sum a)^2}{\sum a(b+c-a)^2} \overset{\text{hope}}{\geq} \frac{3}{(abc)^2}$$

$a+b > \sqrt{2}$

$a^2+b^2 \geq \frac{(a+b)^2}{2} > 1$

$\Rightarrow \quad c^2 = 3-a^2-b^2 < 2$

$c < \sqrt{2} < a+b$

$$\left(\sum_c \frac{a}{(b+c-a)^2}\right)\left(\sum (b+c-a)a\right)\left(\sum (b+c-a)a\right) \underset{\text{C-S a 3}}{\geq} \left(\sum a\right)^3$$

uno adesso cambia un poco le terne

$$\sum \frac{a}{(b+c-a)^2} \cdot \sum (b+c-a)a^2 \cdot \sum (b+c-a)a^3 \geq \left(\sum a^2\right)^3$$

$$\cancel{27}_{9}\,(abc)^2 \geq \cancel{3} \sum (b+c-a)a^2 \cdot \sum (b+c-a)a^3$$

($a=b=c=1$ è l'= ; 3 termi 3 termi)

vorrei ?

$$3abc \overset{?}{\geq} \sum (b+c-a)a^2 \quad \otimes$$

$$3abc \overset{?}{\geq} \sum (b+c-a)a^3 \quad \circledast$$

$\otimes$ è schur ! :)

$\circledast$ $\sum a^4 - \sum_s a^3 b + 3abc \overset{?}{\geq} 0$

schur con $m=2$, $n=1$ è

$$\sum a^4 - \sum_s a^3 b + \sum_s a^2 bc \geq 0$$

$$\sum a \overset{?}{\leq} 3 \quad \text{vera per AM-QM}.$$

Esempio 5

$$\sum_c \frac{1}{a^3+b^3+abc} \leq \frac{1}{abc}$$

(viene con bunching)

idea per risparmiare i conti:

lavoro sulla singola frazione

vorrei $X(a,b,c) \leq a^3+b^3+abc$

$$ab(a+b+c) = a^2b + ab^2 + abc \leq a^3+b^3+abc$$

allora mi rimane $\sum_c \frac{1}{ab(a+b+c)} \leq \frac{1}{abc}$

questa è un = !!!

Esempio 6

$abc=1$ $\qquad \sum_c \frac{1}{a+b^{20}+c^{12}} \le 1$

$$\frac{1}{a+b^{20}+c^{12}} \le \;?$$

C-S !

$$\left(\sum a_i\right)\left(\sum b_i\right) \ge \left(\sum \sqrt{a_i b_i}\right)^2$$

$$(a+b^{20}+c^{12})\left(a^{2t-1}+b^{2t-20}+c^{2t-12}\right) \ge \left(a^t+b^t+c^t\right)^2$$

(t reale generico)

mi rimane

$$\sum_c \frac{a^{2t-1}+b^{2t-20}+c^{2t-12}}{(a^t+b^t+c^t)^2} \le 1$$

$$\sum_c a^{2t-1} + \sum_c a^{2t-20} + \sum_c a^{2t-12} \le \sum_c a^{2t} + 2\sum_c a^t b^t$$

$(abc)^{\frac{1}{3}}$ $\qquad (abc)^{\frac{20}{3}}$

$$\left(2t-20+\tfrac{20}{3},\ \tfrac{20}{3},\ \tfrac{20}{3}\right) \le (t,t,0)$$

basta che $t \ge \frac{20}{3}$ e $t \le 20-\frac{20}{3} = \frac{40}{3}$

$$(2t-12+4,\ 4,\ 4) \le (t,t,0)$$

basta $t \geq 4$; $t \leq 8$

basta che $t = 7$ va bene!

Disuguaglianze con Radici

Tecniche

1) tra RHS e LHS $\exists$ 1 numero

2) fondere le radici con tecniche tipo AM - QM , C-S

3) ridurre la disuguaglianza termine a termine

Esempio 1

$a+b+c = 1$

$$\sum_c \sqrt{1-a} \leq \sqrt{2}\left(\sqrt{\sum_c ab} + 2\sqrt{\sum a^2}\right)$$

① $\exists$ un numero? sì

$$\sum_c \sqrt{1-a} \leq \sqrt{6}$$

$\sqrt{A} + \sqrt{B} + \sqrt{C} \leq \sqrt{3}\sqrt{A+B+C}$

② : $LHS \leq \sqrt{3}\sqrt{3-(a+b+c)} = \sqrt{6}$

mi manca $\sqrt{6} \leq \sqrt{2}\left(\sqrt{\sum_c ab} + 2\sqrt{\sum_c a^2}\right)$

al quadrato ...

$$3 \leq \sum_c ab + 4\sum_c a^2 + 4\sqrt{\sum ab \sum a^2}$$

$$3\left(\sum a\right)^2 \leq \quad ''$$

$$3\sum a^2 + 6\sum ab \leq \sum ab + 4\sum_c a^2 + 4\sqrt{\sum ab \sum a^2}$$

$$\sum a^2 \geq \sum ab$$

$$\geq 3\sum_c a^2 + \sum ab$$

$$\geq 4\sqrt{\sum ab \sum ab}$$

Esempio 2

$$\sum_c \frac{a}{\sqrt{a+b}\,\sqrt{a+c}} \leq \frac{3}{2}$$

$$\sum_c a\sqrt{b+c} \leq \frac{3}{2}\left((a+b)(b+c)(c+a)\right)^{\frac{1}{2}}$$

2 modi:

- Jensen sulla $f(x) = \sqrt{x}$ (concava) sui termini: $b+c$, $c+a$, $a+b$ e con pesi: $\frac{a}{\sum a}$, $\frac{b}{\sum b}$, $\frac{c}{\sum c}$

- C-S

  $a\sqrt{b+c} = A_1 B_1$

  se $A_1 = a$ $B_1 = \sqrt{b+c}$

  otterrei: $\sum a\sqrt{b+c} \leq \sqrt{a^2+b^2+c^2}\,\sqrt{2(a+b+c)}$

  invece, $A_1 = \sqrt{a}$, $B_1 = \sqrt{ab+ac}$

Ora rimane $\sqrt{\sum a} \cdot \sqrt{2\sum ab} \leq \frac{3}{2}\left(\quad '' \quad \right)^{\frac{1}{2}}$

$$8 \sum a \sum ab \leq 9(a+b)(b+c)(c+a)$$

$$8\left(\sum_s a^2b + 3abc\right) \leq 9\left(\sum_s a^2b + 2abc\right)$$

AM - GM

Esempio 3

$ab+bc+ca \leq 3abc$

$$\sum_c \sqrt{\frac{a^2+b^2}{a+b}} + 3 \leq \sqrt{2} \sum_c \sqrt{a+b}$$

(1) NO! per omogeneità

(2) NO! per problemi con le radici a DX

(3) Term. a term:

$$\sqrt{2}\sqrt{a+b} \overset{?}{\geq} \sqrt{\frac{a^2+b^2}{a+b}} + ?$$

$\sqrt{2}\sqrt{A+B} \geq \sqrt{A}+\sqrt{B}$

$$\sqrt{2}\sqrt{\frac{(a+b)^2}{a+b}} = \sqrt{2}\sqrt{\frac{a^2+b^2}{a+b}+\frac{2ab}{a+b}} \geq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{a+b}} + \sqrt{\frac{2ab}{a+b}}$$

mi rimane

$$\sum_c \sqrt{\frac{2ab}{a+b}} \geq 3$$

$(ab+bc+ca \leq 3abc)$

$$\sum_c \sqrt{\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}} \geq 3$$

$\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \leq 3\right)$

sostituisco $x = \frac{1}{a}$ e cyc

$$\sum_c \sqrt{\frac{2}{x+y}} \geq 3 \qquad x+y+z \leq 3$$

$$\sqrt{2} \sum_c \sqrt{x+y}\sqrt{x+z} \geq 3\sqrt{x+y}\sqrt{y+z}\sqrt{z+x}$$

al quadrato

$$2\left(\sum_c x^2 + 3\sum xy\right) + 4\sqrt{x+y}\sqrt{x+z}\sqrt{y+z}\sum\sqrt{x+y}$$

$$\geq$$

$$9\,(x+y)(y+z)(z+x)$$

omogeneizzo molt. sopra per $\frac{x+y+z}{3}$

separatamente

$$2\sum x^2\sum x + 6\sum xy\sum x \geq 9\left(\sum_s x^2y + 2xyz\right)$$

$$2\sum x^3 + 2\sum_s x^2y + 6\sum_s x^2y + 6\sum xyz \geq 9\sum_s x^2y + 18xyz$$

$$2\sum x^3 \geq \sum_s x^2y \quad \checkmark \text{ Bunching}$$

$$4\sum\sqrt{x+y}\sum x \geq 18\left(\sum_s x^2y + 2xyz\right)^{\frac{1}{2}}$$

elev. al ^{2} viene ....

Ex per casa

$$\sum_c \sqrt{a^4+a^2b^2+b^4} \geq \sum_c a\sqrt{2a^2+bc}$$

$(a, b, c \geq 0)$