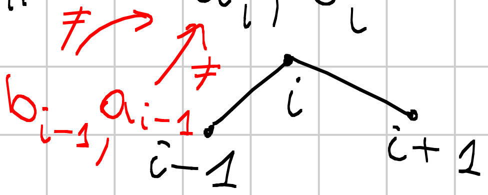
Combinatoria 1 MEDIUM

Titolo nota 04/09/2014

RUSS '07/5 — 100-agono regolare (è pari)
in ogni vertice ho
2 # a_i, b_i $\qquad a_i \neq b_i$



Esiste un modo di scegliere $c_i \in \{a_i, b_i\}$ per ogni vertice in modo che vertici adiacenti abbiano $c_i \neq$.

COMBINATORIAL NULLSTELLENSATZ

gli zeri

Fatto "ovvio". $p \in F[x]$ (campo $\mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$) $\quad \deg p = n$

$A \subseteq F \quad |A| \geq n+1 \quad \exists\, a \in A \quad p(a) \neq 0.$

CN $\quad p \in F[x_1 \dots x_n] \quad x_1^{t_1} \dots x_n^{t_n}$
che compare con coeff. $\neq 0$ ed è di grado max in p.
$A_1, \dots, A_n \subseteq F \quad |A_1| \geq t_1 + 1$
$\dots$ $|A_n| \geq t_n + 1$, allora
$\exists\, \underline{a}\ (a_1, \dots, a_n) \in A_1 \times \dots \times A_n$
tc $p(a_1 \dots a_n) \neq 0$.

Sol di RUS'07. $\quad p \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_{100}]$

$A_i = \{a_i, b_i\} \mid i = 1, \dots, 100$

$$p(x_1, \dots, x_n) = \prod_{cyc} (x_{i+1} - x_i)$$

$$\qquad\qquad\qquad \shortparallel$$

$c_1 \dots c_n$
$\in A_1 \times \dots \times A_n$ $\qquad (x_2 - x_1) \cdots (x_n - x_{n-1})(x_1 - x_n)$

$p(c_1, \dots, c_n) = 0 \iff \exists \ i, i+1$
($n+1$ inteso come 1) $\mid c_i = c_{i+1}$

il coeff. di $x_1 \dots x_n = 2$.

$\to$ per il CN $\exists \ \underline{c} \quad p(\underline{c}) \neq 0$.

Dimostrazione del CN.

Per induzione su $\deg p$.
Se $\deg p = 1$ è chiaro.
wlog $c_1 x_1 + r(x_2, \dots, x_n)$ [...]

$x_1^{t_1} \dots x_n^{t_n}$ mon. di $\deg = \deg p$.
wlog $t_1 \geq 1$.
$A_1, \dots, A_n$. Sia $a \in A_1$.

Divido p per $x_1 - a_1$.

$$p(\underline{x}) = \boxed{(x_1 - a_1)\, q(\underline{x})} + r(\underline{x})$$

$\deg_{x_1} r = 0$ $\qquad\qquad r(\underline{x}) = r(x_2, x_3, \dots, x_n)$

Supp per ass. $\forall (a_1, \dots a_n) =: \underline{a} \in A_1 \times \dots \times A_n$
$p(\underline{a}) = 0$.

Su $\{a_1\} \times A_2 \times \dots \times A_n$ r fa 0.
$\to$ ma allora $r = 0$ su $A_1 \times \dots \times A_n$

$\to q$ si annulla su $A_1 \setminus \{a_1\} \times A_2 \times \dots \times A_n$

$t_1 \qquad t_2+1 \qquad t_n+1$

Che coeff. ha $x_1^{t_1-1} \dots x_n^{t_n}$ in q?
Sicuramente $\neq 0$! $\in$ $\deg q = \deg p - 1$

Contraddice hp induttiva!

$\square$

[Cauchy - Davenport]
$A, B \subseteq \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ (non vuoti)
considero
$$A+B = \{a+b \mid a \in A, b \in B\} \subseteq \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$$
$$|A+B| \geq \min(p, |A|+|B|-1).$$

dim.

Se $|A|+|B| \geq p+1$; voglio dim che $A+B = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

Prendo $x \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. $x-B = \{x-b \mid b \in B\}$ ha $|B|$ elementi.
Ma allora (pigeonhole) interseca A. $a \in A \cap x-B$ allora $a = x-b$ per qualche $b \in B$ $\to$ $x = \underset{A}{a} + \underset{B}{b}$.

Manca:
$\to |A|+|B| \leq p$. $\qquad |A+B| \leq |A|+|B|-2$

$C \supseteq A+B \qquad |C| = |A|+|B|-2$

$$\in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}[x,y]$$
$$p = \prod_{c_i \in C} (x+y-c_i)$$

$\deg p = |A| + |B| - 2$

monomio $x^{|A|-1} y^{|B|-1}$ in p
ha coeff. $\binom{|A|+|B|-2}{|A|-1}$

ma questo $|(|A|+|B|-2)!$
e $|A|+|B|-2 \leq p-1$
$\longrightarrow$ non è 0.

Ma allora $\exists a \in A,\ b \in B \mid p(a,b) \neq 0$
MA È ASSURDO!

IMO '07. 6 $\{0, 1, \dots, n\}^3$

Quanti piani sono necessari per coprire tutti i pti TRANNE $(0,0,0)$ (e $(0,0,0)$ DEVE rimanere scoperto.

Posso farlo con $3n$. $x = 1, \dots, n$
$y = 1, \dots, n$
$z = 1, \dots, n$

AIM: non si fa con meno di $3n$.

p pol. in $\mathbb{R}[x, y, z]$. Suppongo bastino meno di $3n$ piani.

$$q(x,y,z) = \prod_{i=1}^{\#\text{piani}} (a_i x + b_i y + c_i z + d_i)$$

si deve annullare su

$$\square = \{0, \dots, n\}^3 \setminus (0,0,0)$$

$$r(x,y,z) = \prod_{i=1}^{n} (x-i)(y-i)(z-i)$$

r si annulla su $\square$

MA non su $(0,0,0)$

$$p(x,y,z) = q(x,y,z) - \frac{q(0,0,0)}{r(0,0,0)} r(x,y,z)$$

$\deg p = 3n$ $(\deg q < 3n)$

$x^n y^n z^n$ COMPARE (con coeff $-\frac{q(0,0,0)}{r(0,0,0)}$)

→ CONTRADDICE CN.

[Chevalley-Warning] Sistema

$$\begin{cases} p_1(x_1 \dots x_n) = 0 \\ \dots \\ p_k(x_1 \dots x_n) = 0 \end{cases}$$

di k polinomi in $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}[x_1 \dots x_n]$ tc. $\sum_{i=1}^{k} \deg p_i < n$

Se c'è una soluzione, allora ce n'è un'altra.

[+FORTE: il #soluzioni è $\equiv 0\,(p)$]

dim. $(c_1, \dots, c_n)$ è sol.; supponiamo (per ass.) sia unica.

$$\prod_{j=1}^{k} \left(1 - p_j(x_1, \dots, x_n)^{p-1}\right) = q(x_1 \dots x_n)$$

$\rightarrow$ si annulla sse $(x_1, \dots, x_n) \neq (c_1, \dots, c_n)$

$$\rightarrow \deg q = \sum_{j=1}^{k} (p-1) \deg p_j < (p-1)n.$$

$$r(x_1 \dots x_n) = \prod_{i=1}^{n} \prod_{j \neq c_i} (x_i - j)$$

$\rightarrow$ si annulla sse $(x_1 \dots x_n) \neq (c_1 \dots c_n)$

$\rightarrow \deg r = n(p-1)$
$(x_1^{p-1} \dots x_n^{p-1}$ ha c. $1)$

Ora prendo $p(x_1 \dots x_n) = q(x_1 \dots x_n) - \dfrac{q(c_1 \dots c_n)}{r(c_1 \dots c_n)} r(x_1 \dots x_n)$

$\rightarrow$ p si annulla su $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^n$
ha deg $(p-1)n$ e termine $x_1^{p-1} \dots x_n^{p-1}$

$\rightarrow$ CONTRADDICE CN!

[EGZ] Ho $2n-1$ interi; posso sempre sceglierne n t.c. n divida la loro somma.

LEMMA 1. Se so EGZ(a) e EGZ(b) allora so EGZ(ab).

$2ab-1$ interi; posso prenderne $a \mid$ la Σ è div. per a

li chiamo $x_1 \dots x_a$

li tolgo; rimangono $2ab-a-1$

$a(2b-1)-1$

ripeto! ne tolgo a

li chiamo $x_{a+1} \dots x_{2a}$

...

quante volte posso ripetere?

Posso farlo $2b-1$ volte.

Ho $\frac{1}{a}(x_1 + \dots + x_a)$

$\frac{1}{a}(x_{a+1} + \dots + x_{2a})$

...

$\frac{1}{a}(x_{a(2b-2)+1} + \dots + x_{a(2b-1)})$

Sono $2b-1$ interi; ne scelgo b la cui somma sia multipla di b.

$$\underbrace{\frac{1}{a}\left(\boxed{} + \dots + \boxed{}\right)}_{b \text{ blocchi}} = kb$$

$\rightarrow ab$ el. sommano a

un multiplo di ab

$\rightarrow$ EGZ (ab)

$\rightarrow$ wlog n è un primo!

$$p(x_1 \dots x_p) = 1 - (x_1 + \dots + x_p)^{p-1}$$

$\rightarrow$ si annulla se

$x_1 + \dots + x_p \neq 0 \ (p)$

$\rightarrow$ ha deg $p-1$.

$x_1 \dots x_{p-1}$ c'è $\quad ((p-1)! \neq 0)$

$$\underset{2}{A_1} \times \dots \times \underset{2}{A_{p-1}} \times \underset{1}{A_p}$$

i miei $2p-1$ el. erano $\underbrace{a_1 a_2}_{2} | \underbrace{a_3 a_4}_{2} | \dots | \underbrace{a_{2p-1}}_{1}$

A_1 $\quad$ A_2 $\quad$ p $\quad$ A_p

ATTENZIONE! Detto così non è chiaro che $|A_i| = 2$ per $i < p$.

MA se ho p el. della stessa classe mod p li prendo e ho finito; altrimenti ordino gli el. secondo la loro classe:

$$\begin{array}{cccccccccc} a_1 & - & - & a_k & & & & & & a_{2p-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & \dots & & p-1 & \dots \end{array}$$

e raggruppo in A_i $\quad a_i, a_{i+p}$

$$A_p = \{a_p\}$$

Dim con CAUCHY-DAVENPORT

supp wlog che non ci siano p interi $\equiv$ fra loro mod p (altrimenti finito)

$$\underset{\substack{\| \\ \{a_1, a_{1+p}\} \\ \text{diversi mod } p}}{A_1} \quad \dots \quad \underset{\substack{\| \\ \{a_{p-1}, a_{2p-1}\}}}{} \quad A_p \leftarrow \{a_p\} \quad \subseteq \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$$

$$|A_p + A_{p-1}| \geq \underbrace{|A_p| + |A_{p-1}| - 1}_{2}$$

$$|(A_p + A_{p-1}) + A_{p-2}| \geq \underbrace{2 + |A_{p-2}| - 1}_{=3}$$

$$\dots$$

$$|A_1 + \dots + A_p| \geq p \quad \text{ho vinto!}$$

Dim. con Chev. War.

pol. in $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$

$$\begin{cases} x_1^{p-1} + \dots + x_{2p-1}^{p-1} = 0 \\ \sum a_i x_i^{p-1} = 0 \end{cases}$$

$\uparrow$ i miei interi mod p

$a_1 \dots a_{2p-1}$ sono gli interi dell'inizio

$c_1 \dots c_m = 0 \dots 0$

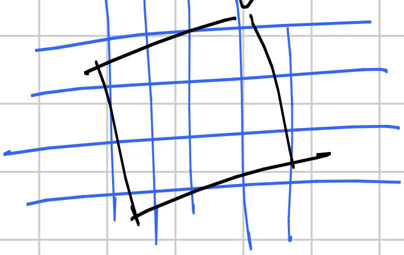
$c_1 \dots c_{2p-1}$ é sol $\iff$ ci sono es. p $c_i \neq 0$ e $\sum a_i \equiv 0$

$i \mid c_i \neq 0$

$$\sum \deg = p-1+p-1 = 2p-2 < 2p-1$$

→ Per CW siccome ho $0, \dots, 0$ ho anche una sol "non banale" che mi dice quali a_i prendere.

RUS '13? Ho un tovagliolo 100×100, e la griglia intera infinita. Trovare il min n tc. COMUNQUE SIA APPOGGIATO il tov. sulla griglia si possano coprire tutti i punti della griglia sul tovagliolo (anche sul bordo) con n rette.



$\sum$ coeff. di un pol. $p = p(1)$

$\sum$ coeff. dei termini di deg pari

$$= \frac{p(1)+p(-1)}{2}$$

$\sum$ coef dei termini multipli di n in $p =$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} p(\zeta^i)$$

ζ radice n-esima primitiva

$d \mid \quad n \mid d \qquad \frac{c_d}{n}\sum_{i=0}^{n-1} \underbrace{(\zeta^i)^d}_{1} = c_d$

$d \qquad n \nmid d \qquad \frac{c_d}{n}\sum_{i=0}^{n-1} (\zeta^i)^d$

$$= \frac{c_d}{n} \frac{(\zeta^d)^n - 1}{\zeta^d - 1}$$

ROOT OF UNITY FILTER

Quanti sono i # di 4 cifre che contengano solo cifre 3, 7, 8, 9 e siano multipli di 3?

IDEA! $p(x) = (x^3 + x^7 + x^8 + x^9)^4$

$p(1) = 4^4$ = # di naturali di 4 cifre con cifre 3, 7, 8, 9

La risposta è la Σ dei coeff. dei termini di deg mult. di 3.

sia ζ a rad. 3^a dell'unità

$$\frac{1}{3}\left(\underbrace{p(1)}_{4^4} + \underbrace{p(\zeta)}_{(1+\zeta+\zeta^2+1)^4} + \underbrace{p(\zeta^2)}_{1}\right)$$

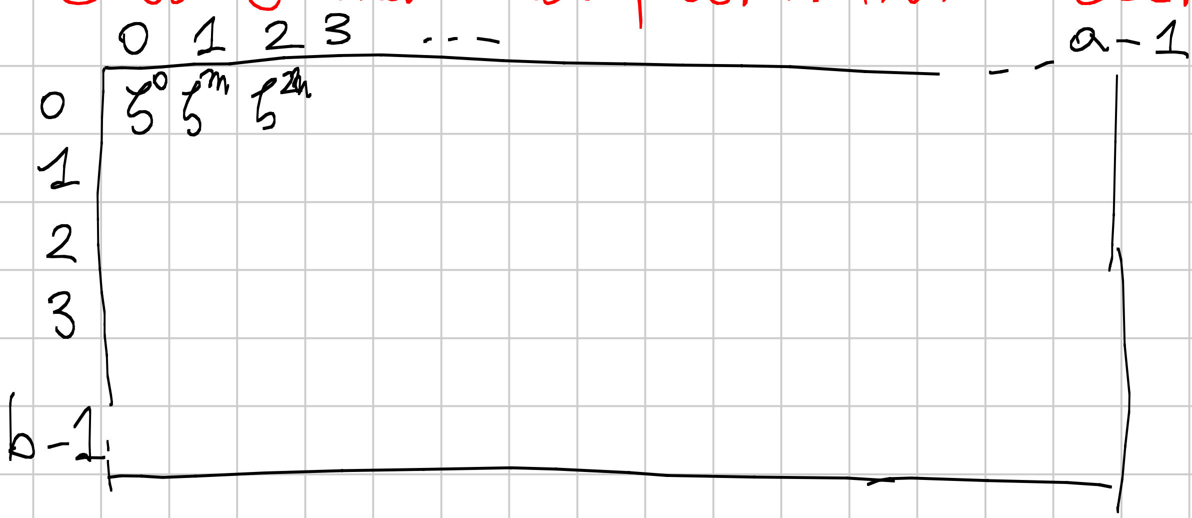
$$(1+\zeta+\zeta^2+1)^4 = 1$$

Abbiamo un rettangolo che sappiamo tassellare con rettangolini

$1 \times n$ $\qquad\qquad$ $m \times 1$

Allora sappiamo tassellarlo anche con rettangoli di un solo tipo!

Sia ζ una rad. prim. nm-esima



nel quadrato (i,j) $\quad \zeta^{mi+nj}$

$1\times n$ $\quad$ i rett. hanno somma 0.

$$\zeta^{nj}\sum_{i=0}^{n-1}\zeta^{mi} = \frac{\zeta^{nj}(\overset{1}{\zeta^{mn}}-1)}{\zeta^m-1}$$

$m\times 1$ è uguale!

Σ tutti i quadretti è 0

ma quanto vale?

$$" \sum_{\substack{0 \le i \le a-1 \\ 0 \le j \le b-1}} \zeta^{mi+nj} =$$

$$= \left(1 + \zeta^{m} + \zeta^{2m} + \dots + \zeta^{(a-1)m}\right)\left(1 + \zeta^{n} + \dots + \zeta^{(b-1)n}\right) =$$

$$= \frac{\zeta^{am} - 1}{\zeta^{m} - 1} \cdot \frac{\zeta^{bn} - 1}{\zeta^{n} - 1}$$

MA uno dei due fattori deve annullarsi.

wlog am mult. di nm

$\to$ a è mult. n

$\to$ si tassella con gli $1 \times n$!

$\square$