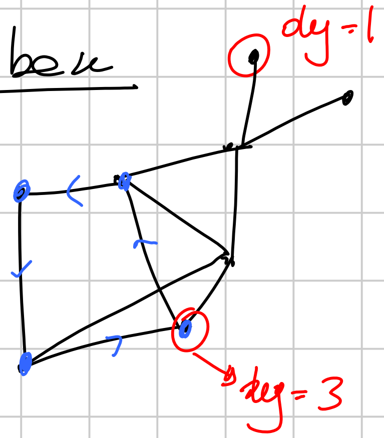
# C 2 - GRAFI

ma_go

Titolo nota — 05/09/2014

## Definizioni di base

Un grafo è

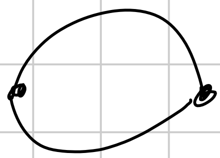



$(V, E)$ — $V$: insieme di vertici; $E$: $\{\{v,w\}\}$, $v \neq w$, $v, w \in E$ → archi

Il grado di un vertice è il numero di archi incidenti (il numero di archi che escono da lui)

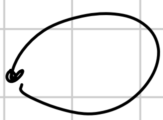
Un ciclo è una successione di vertici $v_1, \dots, v_\ell \equiv v_1$

t.c. $v_i$ collegato a $v_{i+1}$ $\forall i$. $\ell$ lunghezza del ciclo.



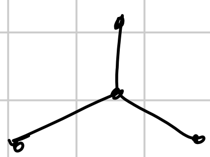
← non è un grafo!

$v, w \Rightarrow \{v, w\} \in E$ ⇝ ci può stare o non stare un arco e i suoi estremi

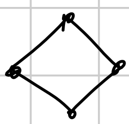


← non è un grafo.

es • Alberi:
- un grafo senza cicli connesso.
- connesso minimale (= tolgo un arco e si disconnette)
- aciclico massimale (= aggiungo un arco e creo un ciclo)

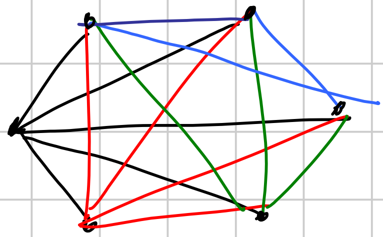


✓



✗

- Completo ($K_n$)



<u>Lemma</u> $\deg(v)$ ← grado di $v$

$$\sum_{v \in V} \deg(v) = 2|E|. \qquad \square$$

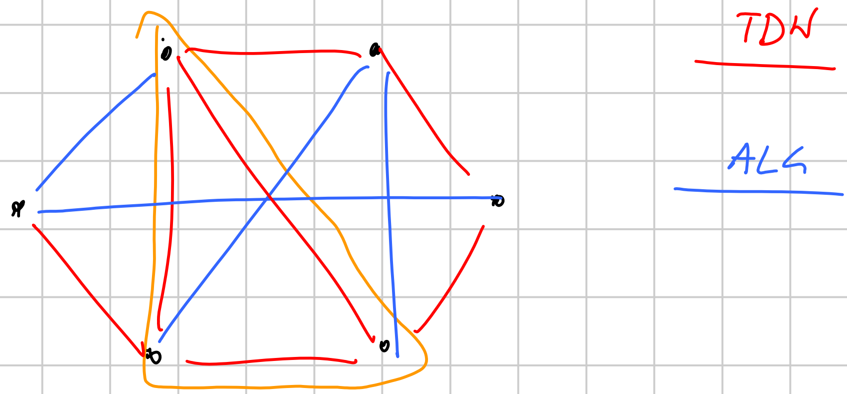
<u>es</u>
<u>IMO 64/4</u>

17 scienziati che collaborano su 3 argomenti: Dimostrare che ce ne sono 3 che collaborano su uno stesso argomento

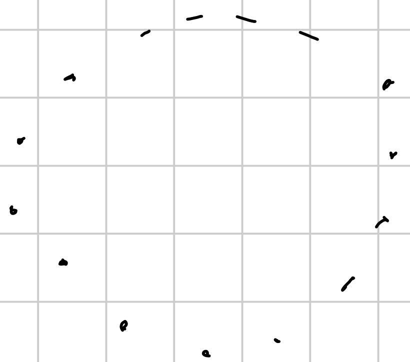
Sappiamo fare qualcosa se ci sono <u>2</u> argomenti: cosa?

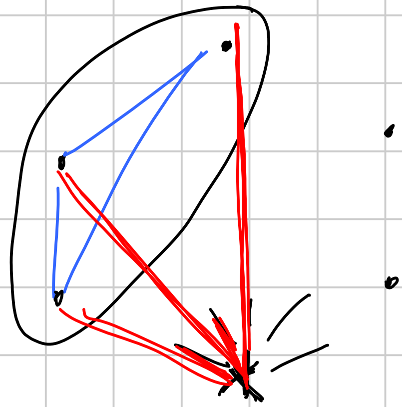
<u>Idea 1</u> Associamo a questa cosa un grafo!

<u>Idea 2</u> Se prendiamo 6 persone e 2 argomenti, siamo contenti.




<u>Colorazioni</u> (di archi) Dato un certo grafo $\Gamma$, colorato con $k$ colori, $\exists$ un <u>triangolo</u> monocromatico in $\Gamma$?



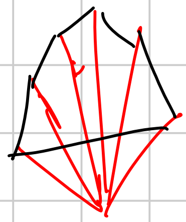


idea: $n = 6$, $k = 2$; considero i lati uscenti $v_0$:
$\rightsquigarrow$ c'è un colore (rosso) con almeno 3 archi $\rightsquigarrow$ $v_1, v_2, v_3$

o $v_1 v_2 v_3$ è mono blu ✓

o $v_1 v_2$ è rosso ✓ $v_0 v_1 v_2$ è rosso.

Ricicla l'idea: $v_0 \rightsquigarrow$ 16 archi $16 = \underset{k}{3} \cdot \underset{(6-1)}{5} + 1 \Rightarrow$ considero

$\exists$  $\leftarrow$ 6 elem. win.

$V_0$

$$6 = R(3,3) \rightsquigarrow \text{numero di Ramsey.}$$

$$R(\underset{\text{blu}}{m}, \underset{\text{rosso}}{n}) = \min \{ N \mid \text{se coloro } K_N \text{ con 2 colori o esiste un sottografo } K_m \text{ tutto blu o un } K_n \text{ tutto rosso} \}$$

$$17 \geq R(3,3,3)$$

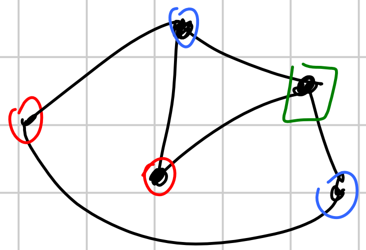
Abbiamo colorato archi: in realtà nessuno ci vieta di colorare i vertici.

Una colorazione di un grafo $\Gamma$ con $k$ colori è una funzione $f: V \longrightarrow \{1, \dots, k\}$ t.c.

se $v \leftrightarrow w$ allora $f(v) \neq f(w)$.

**Def** Dato un certo grafo $\Gamma$, ci sarà un min. $k$ t.c. esiste una $k$-colorazione. $k = \chi(\Gamma) \rightsquigarrow$ numero cromatico

**es**



$\Rightarrow$ non ha 1-col.
non ha 2-col.
con 3 colori sì

**oss** se $\Gamma$ ha $n$ vertici $\chi(\Gamma) \leq n$.

se $\Gamma$ è un albero? $\chi(\Gamma) = 2$ a meno che $\Gamma$ non sia un punto.

$\chi(K_n) = n$. (ho bisogno di tutti i colori possibili)

$\chi(\Gamma) = 1$? Quando è totalmente disconnesso $(E = \emptyset)$.

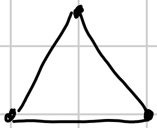
$\Gamma' \subset \Gamma \Longrightarrow \chi(\Gamma') \leq \chi(\Gamma)$

$V' \subset V$
$E' \subset E$

**problema** $\chi(\mathbb{R}^2)$?

$\mathbb{R}^2$ lo vedo come grafo, dove collego $P, Q$ se $\overline{PQ} = 1$.

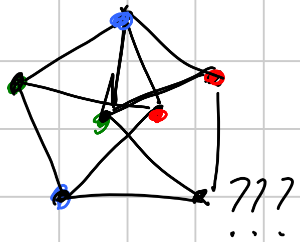
mi servono almeno 3 colori.

 è un sottografo di $\mathbb{R}^2$.

<u>è un problema aperto</u>!

Si vede abbastanza facilmente che $\chi(\mathbb{R}^2) \le 7$ (?)

$$\chi(\mathbb{R}^2) \ge 4$$



$\subset \mathbb{R}^2$ (sottografo)

<u>def</u> Un grafo $\Gamma$ si dice <u>bipartito</u> se $\chi(\Gamma) \le 2$.

(ovvero se ammette una 2-colorazione).

<u>teo</u> (Teorema di Turán)

Se $\Gamma$ è un grafo senza triangoli, allora

$$|E| \le \left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor.$$

parte intera.

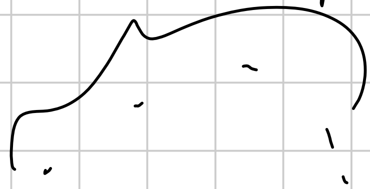
[<u>oss</u> $\Gamma$ ha $n$ vertici $\Longrightarrow$ $0 \le |E| \le \binom{n}{2}$.]

<u>dim</u> Prendiamo ora $v, w, z \in V$; se ~~[illegible]~~ se $\Gamma$ non contiene triangoli, allora ci sono al più 2 archi tra questi 3 vertici.

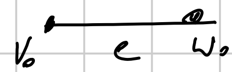
Prendiamo tutte le possibili terne e sommiamo:

$$\underbrace{\binom{n}{3} \cdot 2}_{(n-2)\cdot |E| \to \text{perché?}}$$

n-2 scelte per $z_0$.

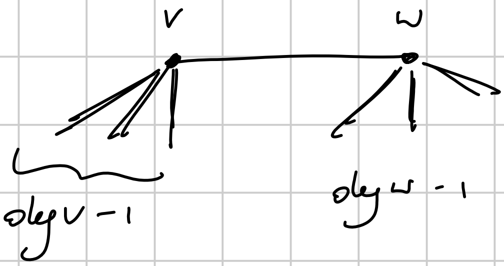


$$\cancel{(n-2)} \cdot E \le \cancel{2} \cdot \frac{n(n-1)\cancel{(n-2)}}{\cancel{6}\,3} = \frac{n(n-1)}{3}.$$



non è abbastanza.

arco



$$\deg(v)-1 + \deg(w)-1 \le n-2$$

$$\deg v + \deg w \le n.$$

$$\underbrace{\sum_{\{v,w\}\in E} \deg v + \deg w}\le n \cdot |E|.$$

$$\frac{1}{2}\left(\sum_{\{v,w\}\in E} \deg v + \sum_{\{v,w\}\in E} \deg w\right) = \sum_{v\in V} \deg^2(v)$$

$$\sum_v \deg^2 v \le n \cdot |E|.$$

AM-QM

$$\frac{\left(\sum_v \deg v\right)^2}{n} = \frac{(2|E|)^2}{n}$$

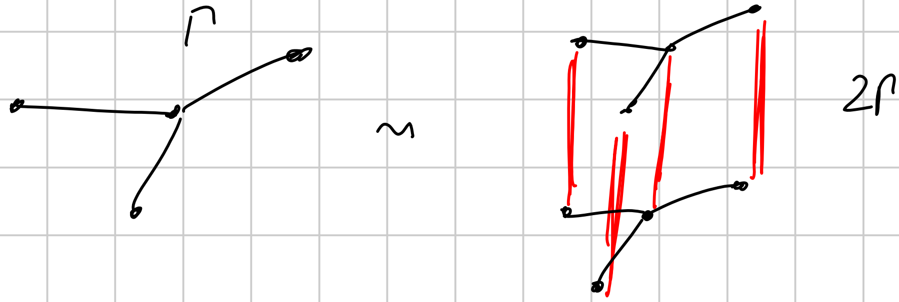
$$\Rightarrow 4|E| \le n^2 \Rightarrow$$

$$|E| \le \left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor$$

---

**IMO SL 2013/C3** $\Gamma$ grafo: posso fare le seguenti op.:

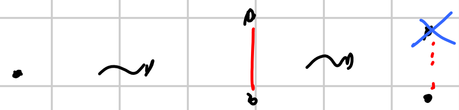
- togliere un vertice di grado dispari
- "raddoppiare" il grafo. $\Gamma \to 2\Gamma$




Partendo da $\Gamma$ qualunque, posso arrivare a $\Gamma$ compl. disc.?

**oss 1** La seconda mossa cambia la parità di tutti i vertici

**oss 2** Se ho già isolato un vertice, raddoppiare non mi crea problemi:



**oss 2'** Posso considerare $\Gamma$ connesso.

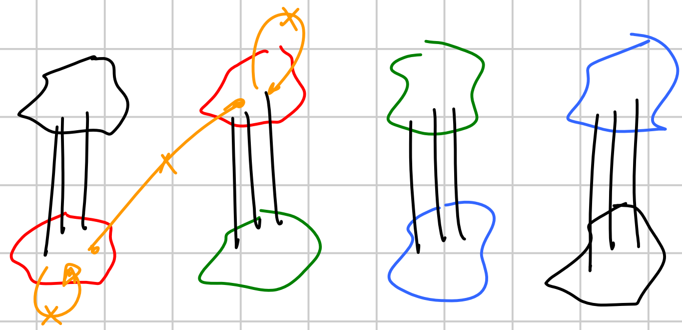
**oss 3** $\Gamma$ è compl. disc. $\iff \chi(\Gamma) = 1$.

oss 3 accende una speranza: $\Gamma \rightsquigarrow \Gamma'$ con $\chi(\Gamma') < \chi(\Gamma)$!

$\chi = \chi(\Gamma) =$ min di colori per colorare $\Gamma$

supp. che $\Gamma$ sia $\chi$-colorato.

**oss 4** $\chi(2\Gamma) \leq \chi$.



vorremmo tanto eliminare un colore.
Lo possiamo fare se tutti i vertici hanno grado dispari

**oss 0** Usando solo la prima mossa, possiamo ottenere $\Gamma_{pari}$ t.c. tutti i vertici hanno valenza pari!

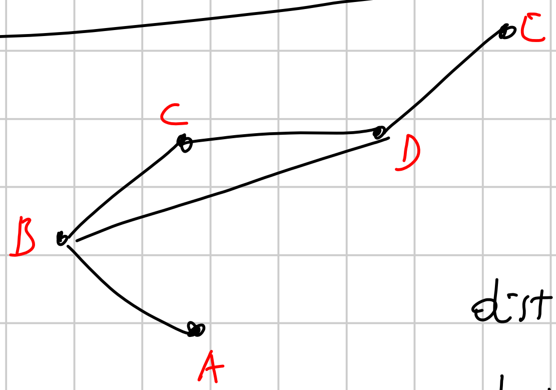
idea: $\Gamma \rightsquigarrow \Gamma_{pari} \rightsquigarrow 2\Gamma_{pari} \rightsquigarrow$ elimino un colore $\Gamma'$

ris. $\chi(\Gamma') < \chi(\Gamma)$. $\Longrightarrow$ ripetendo, win!

IMOSL 2013/C6 | Paese con un certo numero di città, per ognuna delle quali il numero di città a dist. = 3 da essa è al più 100.

Dim. che il num. di città a dist. 4 da una città qualunque è $\leq 2550$.

es/def

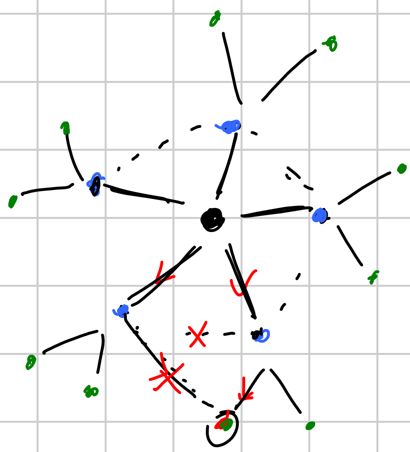



$dist(A,E) = 3$

$dist(A,D) = 2$

oss -1 è un problema di grafi.

Proviamo a contare il # di città a dist 4 da $V_0$.



- $S_1(v) = \{dist = 1 \text{ da } v\}$
- $S_2(v)$

$S_k(v) = \{dist\ k \text{ da } v\}$

$|S_1(v)| = \deg v$.

$S_1(v) \cap S_2(v) = \emptyset$

$$|S_2(v)| \leq \sum_{w\in S_1(v)} \deg(w)-1$$

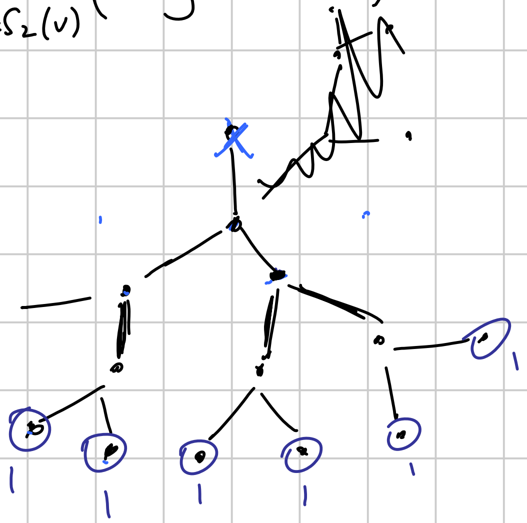
<u>mossa utile</u> Semplifico $\Gamma$! elimino i cicli, mantenendo le distanze da $v_0$!

Con questa semplificazione, $|S_2(v)| = \sum_{w\in S_1(v)} \deg(w)-1$

$100 \overset{hp}{\geq} |S_3(v)| = ?$ $\Rightarrow |S_2(v)| = \sum_{w\in S_1(v)} \deg w - \deg v$

<u>notare</u> che l'ipotesi su $\Gamma$ resta valida.

$$|S_3(w)| = \sum_{w\in S_2(v)} (\deg(w)-1)$$



$$|S_3(v)| \simeq \sum_{w\in S_1(v)} |S_2(w) \setminus ?|$$

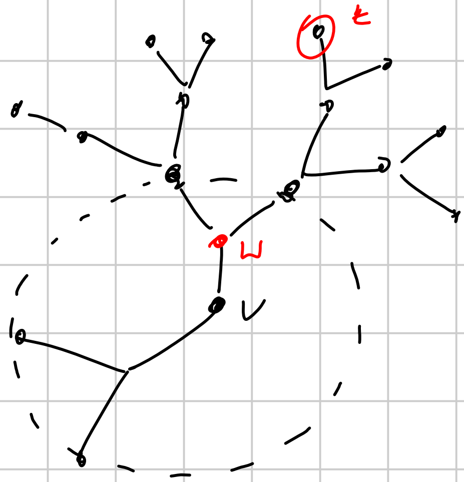
$$|S_4(v)| \approx \sum_{w\in S_1(v)} |S_3(w) \setminus \ldots|$$

$$\boxed{100 \geq |S_3(v)| = \sum_{w\in S_1(v)} |S_2(w)| - ((\deg v)-1)\deg v}$$

vale $\forall$ vertice!

$$|S_2(w)| = \sum_{w' \in S_1(w)} (\deg w' - 1)$$

$$7150 \geq |S_4(v)| = \sum_{w \in S_1(v)} |S_3(w)| - \sum_{w \in S_1(v)} |S_2(v)| + |S_1(w)| = 1$$




$t \in S_3(w)$

$$= \sum_{w \in S_1(v)} \underbrace{|S_3(w)|}_{\geq 100} - S_2(v) \cdot \deg v + \sum_{w \in S_1} \deg w - \deg v$$

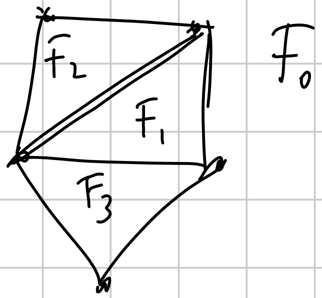
$$= 99 \cdot \deg v - |S_2(v)| \cdot \deg v + \sum_{w \in S_1(v)} \deg w$$

$$= 99 \cdot \deg v - |S_2(v)| \cdot \deg v + |S_2(v)| + \deg v$$

$$\leq 100x - x^2$$ per un qualche par. $x$.

(in sospeso)

<u>Folklore</u>: $\Gamma$ <u>grafo planare</u>: un grafo che si può immergere nel piano ($V \to$ punti nel piano, $E \to$ curve che li uniscono) in modo che archi non si intersechino fuori dei vertici (tranne quando sono incidenti).




$|V|$, $|E|$

**thm** (utile) Formula di Eulero:

$$|V| - |E| + |F| = 2 \qquad \forall \text{ grafo planare.}$$

Per induzione.

**cor** Un poliedro convesso soddisfa la stessa formula.

**thm** Ci sono al più 5 solidi platonici.

- in ogni vertice concorrono $d$ facce ($\Leftrightarrow d$ lati)

  & tutte le facce sono $\ell$-agoni regolari.

$f, e, v$:
$$e = \frac{f \cdot \ell}{2} \qquad d \geq 3$$
$$v = \frac{f \cdot \ell}{d}$$

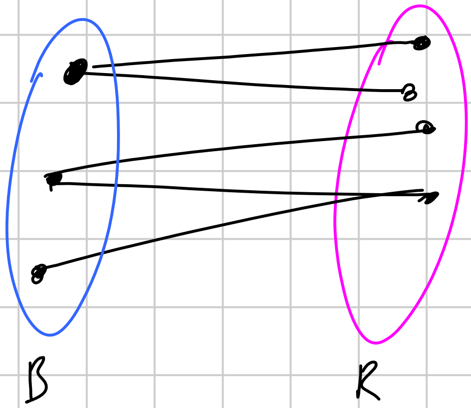
$$f \cdot \underbrace{\left(1 - \frac{\ell}{2} + \frac{\ell}{d}\right)}_{\ell \gg 0,\ \text{siccome } d \geq 3,\ \text{è negativa.}} = 2 \qquad \ell \geq 3 \Rightarrow d < 6.$$

restano un # finito di casi

finite per conto vostro

teorema di Hall / lemma dei matrimoni.

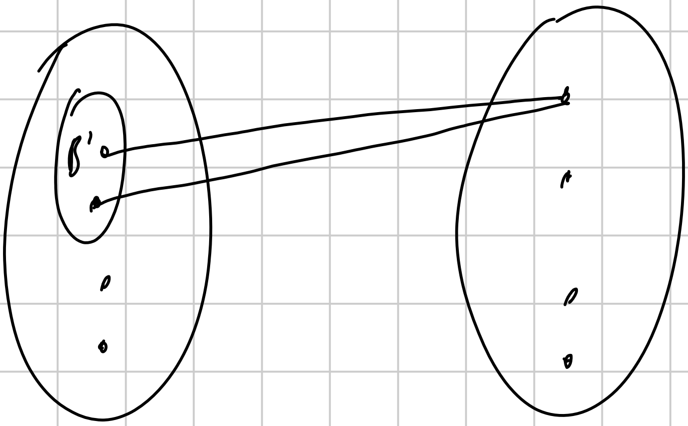
Supponiamo di avere un grafo bipartito




Quando posso avere $f : B \to R$ iniettiva t.c. $\{f(b), b\} \in E \ \forall b$?

ostruzione ovvia: $|R| \geq |B|$.

ostruzione semi-ovvia: deve succedere $\forall$ sotto $B' \subset B$.




$B' \subset B$, dunque

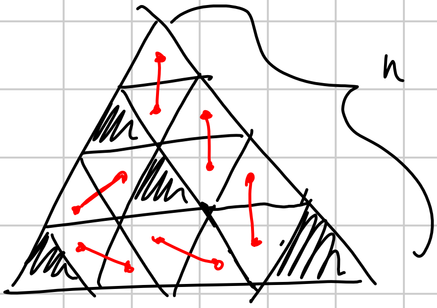
$\Gamma(B')$ = l'insieme degli elem. in R che sono collegati a un B'.

C'è speranza solo se $|\Gamma(B')| \geq |B'| \ \forall B' \subset B$.

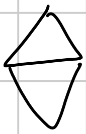
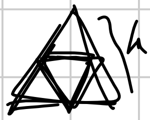
thm (Hall) Vale il viceversa! $\exists f$ come sopra sse $\forall B' \subset B \quad |\Gamma(B')| \geq |B'|$.

dim Per induzione.

# IMO SL 06/C6

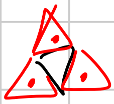


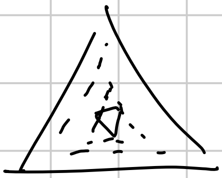
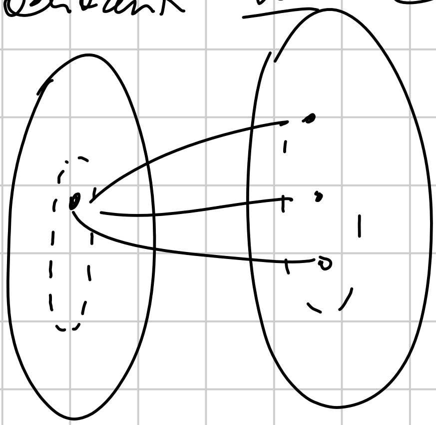

Coloro n ▲

Dimostrare che posso tassellare quello che rimane usando  se e solo se ∀ sottotriangolo  ho colorato al più k triangolini.

$B = \{\nabla\}$ $R = \{\Delta\}$ o viceversa.

<u>hp</u> dice che in ogni $\Delta$ ci sono almeno tanti $\Delta$ che a punta $\nabla$

Grafo?  Collego $\nabla$ con quelli adiacenti <u>non</u> colorati.

<u>OSS</u>  $\Rightarrow$ 

$d := \deg v.$

$$|S_4(v)| = \sum{}' \Big( \underbrace{|S_3(w)|}_{\leq 100} - |S_2(v)| + |S_1(w)| - 1 \Big)$$

$$\leq 100 \cdot d - d \cdot |S_2(v)| + \sum_{w \in S_1(v)}{}' \deg w - d \qquad S = \sum d_j$$

$$= 100d - d \cdot ( S - d) - d + S =$$

$$= 100d - (d-1)\cdot S + d^2 - d$$

$\deg w \geq 2 \ \forall w$

<u>oss</u> $S = \sum_i \deg w \geq 2d$

$$\leq 100d - 2(d-1)d + (d-1)d =$$

$$\leq 101d - d^2$$

$$\max(101d - d^2) = 101 \cdot 50 - 50^2 = 2550.$$

Un ordine parziale su un insieme $P$ è una relazione

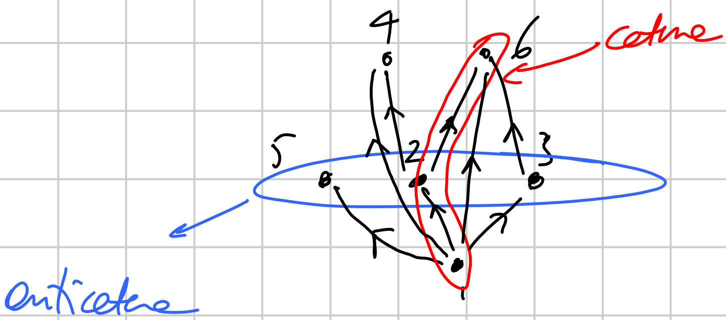
$<, \leq$ $\quad \cancel{x} \leq y$, t.c. $x<y,\ y<z \Rightarrow x<z$

<u>non</u> riflessiva $x \not< x$.

<u>es</u> $<$, $\subset$ (sottoinsiemi), $|$ (divisibilità)

$\subseteq$ $\quad$ $\leq$

Se avete un $(P,<)$ finito, potete associarci un grafo.




$\Gamma_{(P,<)}$ è orientato, aciclico.

~~$\{v,w\}$~~ $\quad (v,w) \in V \times V$.

Possiamo parlare di percorsi orientati:

$1 \to 2 \to 4$ è un percorso orientato.

Una <u>catena</u> in $(P,<)$ è un percorso orientato in $\Gamma_{(P,<)}$.

Un'<u>anticatena</u> in $(P,<)$ è un insieme tot. sconnesso.

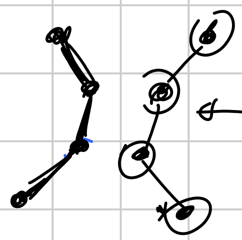
($P$ finito)

<u>Thm</u> (Dilworth) 1. Se $\Gamma_{(P,<)}$ ha un'anticatena di lunghezza $l$ (ma non una di lungh. $l+1$), allora

$P$ è unione di $l$ catene.

2. Se $P$ è unione di $l$ catene (ma non di $l-1$), allora c'è un'anticatena di cardinalità $l$.

dim $\boxed{1.}$ Se ci fossero $l-1$ catene $\Rightarrow$ almeno 2 elem. dell'anticatena stanno nella stessa catena. Assurdo.

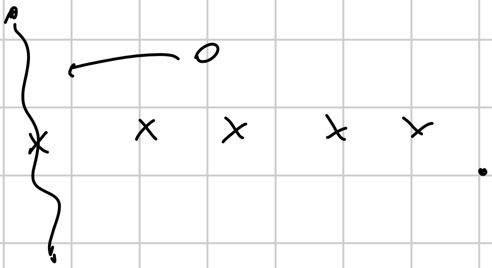


almeno una di queste catene è disgiunta dall'anticatena.

Un'altra idea: prendere una catena massimale e uso induzione su $l$.

Unico caso a cui stare attenti è che

$P \setminus C_{max}$ non ha un'anticatena con $l$ elementi.



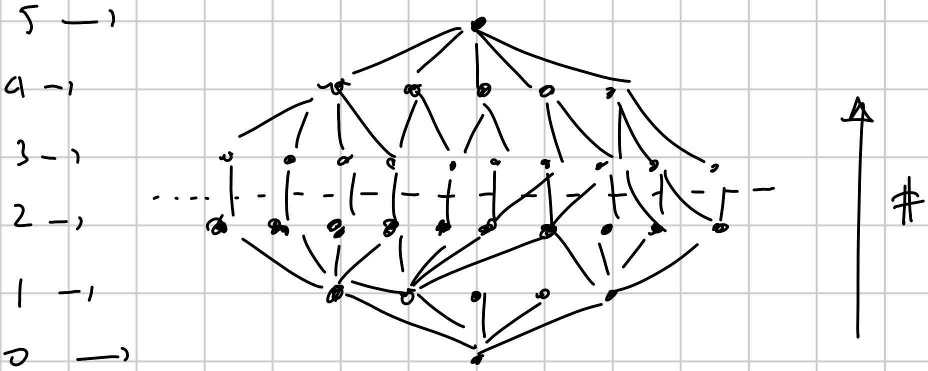
l'ordine è il contenimento

**Teor** (Sperner) $A \subset \mathcal{P}(X)$ anticatena ($\subseteq$). Allora $|A| \leq \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ elementi.

**Oss** Chiaramente, un'anticatena con $\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} = N$ c'è:

$$\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} = \# \text{ insiemi con } \left\lfloor \tfrac{n}{2} \right\rfloor \text{ elementi}$$
$$\Downarrow$$
$$\text{anticatena.}$$

**dim** Ci basta dimostrare che $\mathcal{P}(X)$ è unione di $N$ catene!

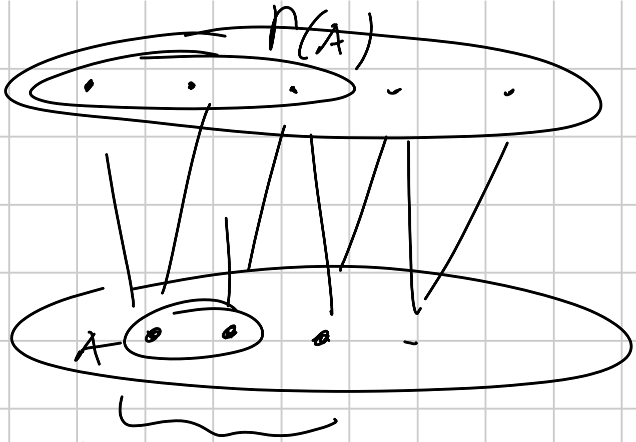



Il grafo è simm., a meno di invertire le frecce.

Basta scrivere mezzo grafo come unione di $N$ catene

Vogliamo associare ad ogni sottoinsieme di $X$ con $k$ elem. un sott. con $k+1$ elem. che lo contiene.

Proviamo ad applicare il lemma dei matrimoni?




$k+1$ elem

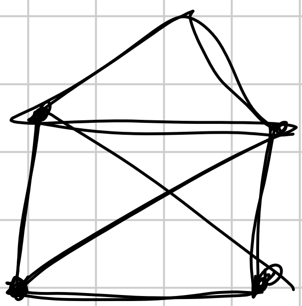
$k$ elem.

~~...~~ $M$ elem     quanti ce ne devono sopra

Dim per induzione su $M$ che $|\Gamma(A)| \geq |A|$

se $k+1 \leq n/2$.     $\boxed{es}$.

**folklore**     Percorso Euleriano su un grafo $\Gamma$



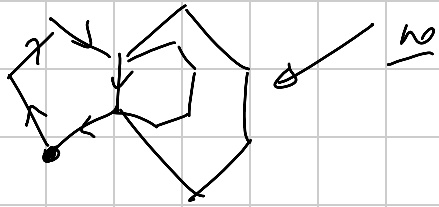
percorso Euleriano passa per tutti gli archi di $\Gamma$ una ed una sola volta.

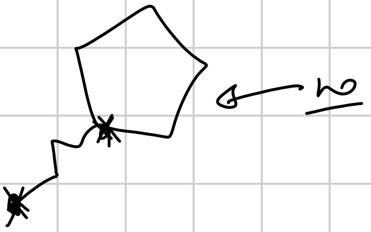
**dom** Per quali grafi esiste un percorso Euleriano?

## Grafi Casualmente Euleriani:

Ci sono dei grafi per cui, andando a caso, fate un percorso Euleriano? Con tutti vertici pari.

Sì, i cicli.



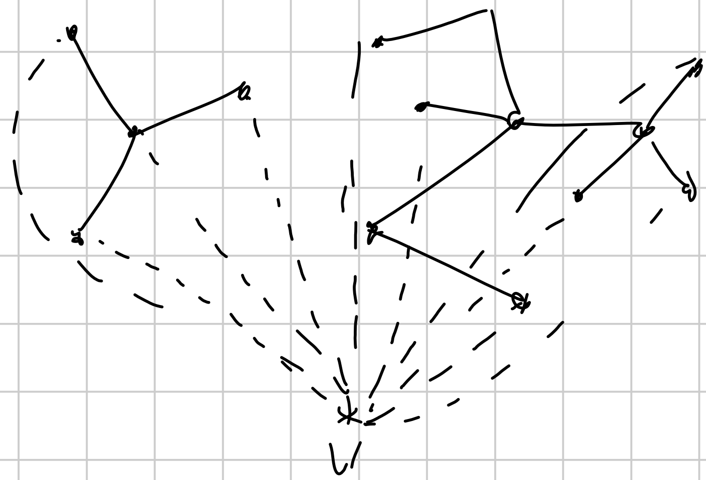



<u>criterio</u> $\Gamma$ è C.E. (partendo da $v$) se $\exists\, v$ t.c. tutti i cicli di $\Gamma$ passano per E.

~~Format~~

<u>dim</u> Per induzione: sul grado di $v$ o sul # cicli.

<u>es</u>




<u>fatti</u> Un albero su $n$ vertici ha $n-1$ archi.

<u>dom</u> Quanti alberi numerati ci sono su $n$ vertici?

<u>sol</u> $n^{n-2}$. L'idea è che ad un albero numerato $\to$ successione di $n-2$ interi in $\{1, \dots, n\}$ (e viceversa)