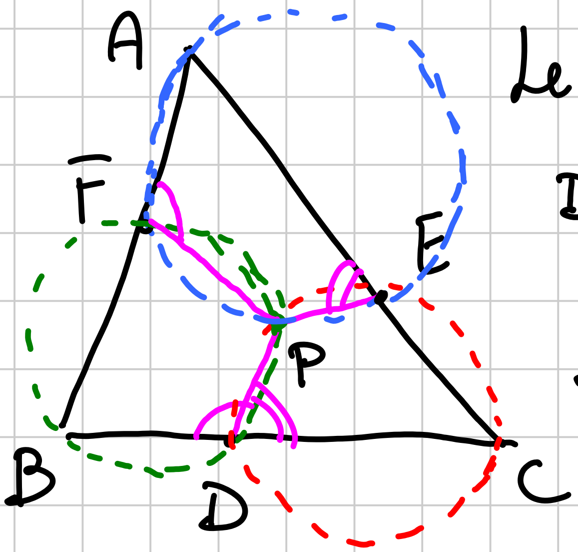
G 3 medium – Sam

Titolo nota 05/09/2014

Teorema (Miquel)



Le circonf. circo ai triangoli $\overset{\triangle}{DCE}$, $\overset{\triangle}{EAF}$, $\overset{\triangle}{FBD}$ hanno un punto in comune.

Dim: P = intersez. delle cf. verde e rossa diversa da D

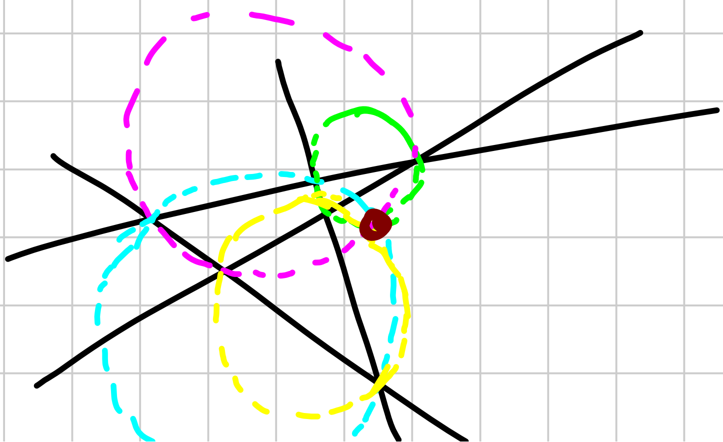
Voglio dim che AFPE è ciclico

$\widehat{AFP} = \widehat{PDB}$ $\widehat{PEA} = \widehat{PDC}$ $\Rightarrow$ finito. ∎

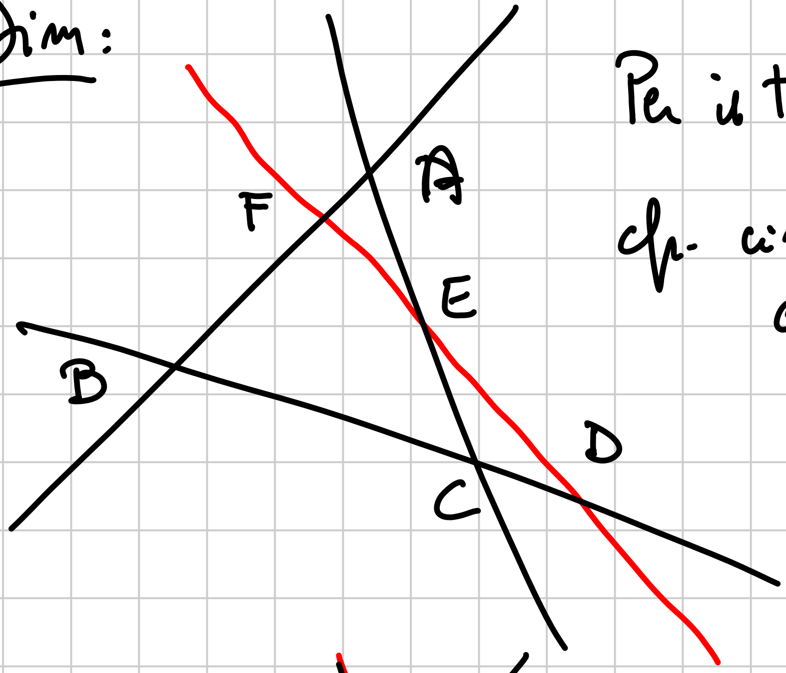
Teo (Miquel)

4 rette a 3 a 3 non concorrenti r_1, r_2, r_3, r_4. Sia Γ_i la circonf. circo. al Tri formato dalle rette $r_j r_k r_h$ con $\{i,j,k,h\} = \{1,2,3,4\}$

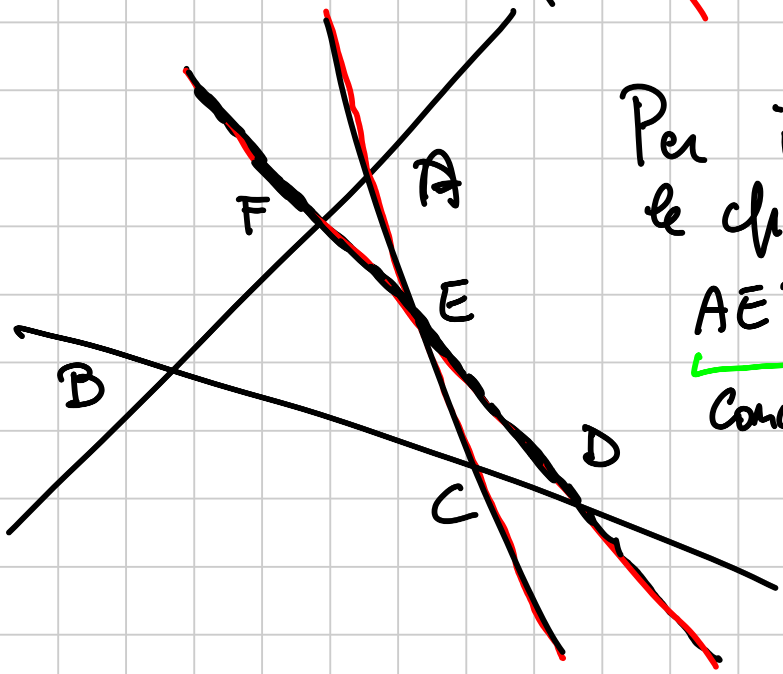
Allora $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4$ hanno un punto in comune



Dim:



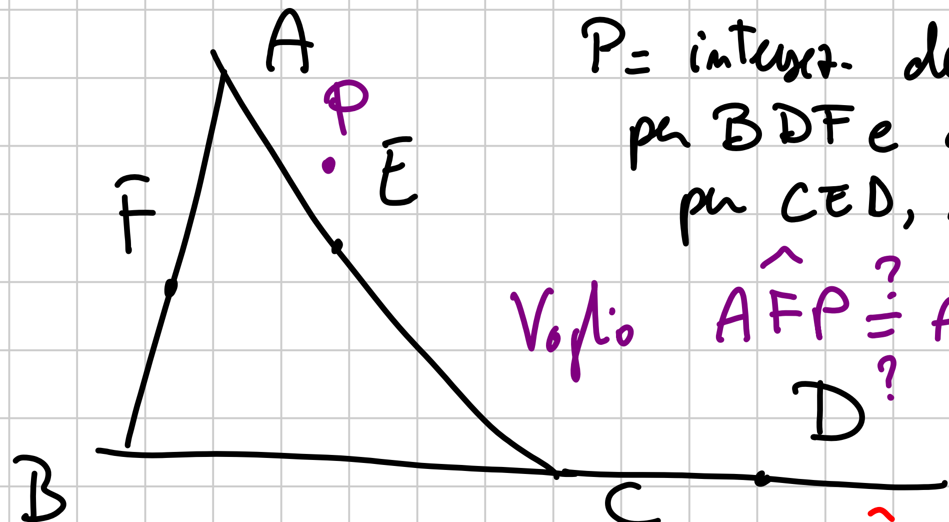
Per il teo di Miquel,
cfr. circo ad $\underbrace{AEF, CED}$, BFD
concorrono.
$\Rightarrow$ P, E
$\Rightarrow$ P $\in$ cfr per BFD



Per il Teo di Miquel
le cfr. circo a
$\underbrace{AEF, DCE}$, ABC
Concorrono. $\Rightarrow$ P, E
$\Rightarrow$ P $\in$ cfr per ABC

$\Rightarrow$ si intersecano tutte e 4 in P. ∎

Oss:



P = intersez. delle cfr. per BDF e delle cfr. per CED, diverse da D.

Voglio $A\hat{F}P \overset{?}{=} A\hat{E}P$?

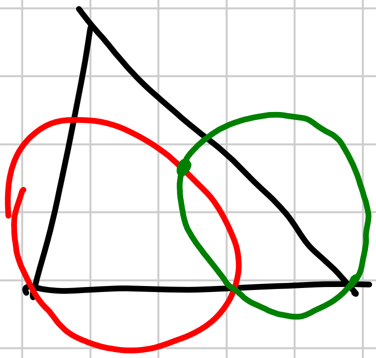
So che BFPD ciclico $\Rightarrow$ $A\hat{F}P = \pi - P\hat{F}B = P\hat{D}B$

So che $PECD$ ciclico $\Rightarrow A\hat{E}P = \pi - P\hat{E}C = P\hat{D}C$.

fine.

1. (Studiosa) Studiarsi gli angoli orientati.

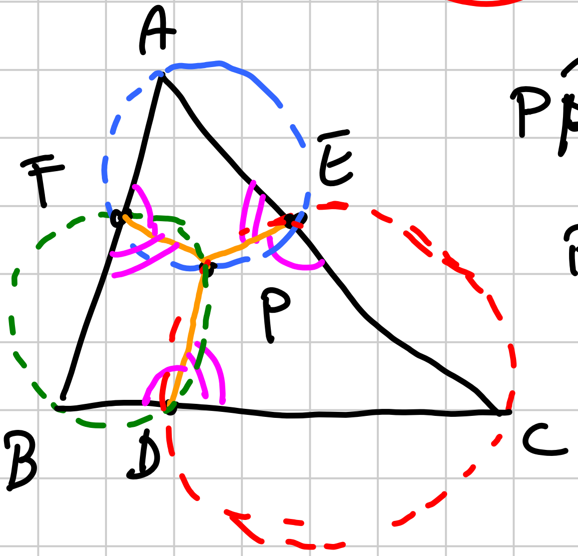
2. (Scansafatiche) Dire "so che non è uguale, ma più o meno torna lo stesso, a patto di scambiare alcuni supplementari con congruenti.



IMO 2013-4

IMO 2011-6

Oss:

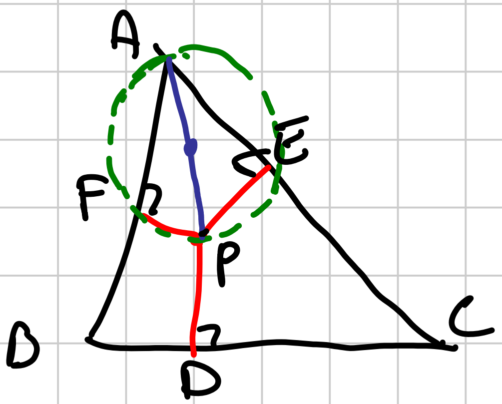


$$P\hat{F}A = P\hat{D}B = P\hat{E}C \quad (*)$$

$$P\hat{F}B = P\hat{D}C = P\hat{E}A \quad (**)$$

Viceversa: dato P, se trovo D, E, F t.c. valga $(*)$ oppure $(**)$ allora P è il punto di Miquel per D, E, F

Se: $P\hat{F}A = P\hat{D}B = P\hat{E}C = \frac{\pi}{2}$ triangolo pedale di P.

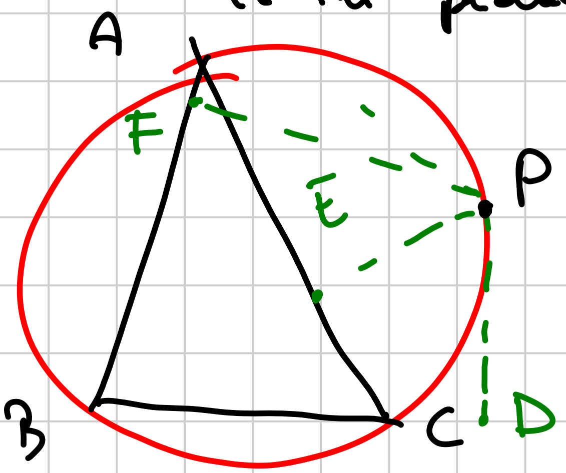


$$EF = AP \cdot \sin\alpha = \frac{AP \cdot BC}{2R}$$

$$ED = \frac{CP \cdot AB}{2R} \qquad DF = \frac{BP \cdot AC}{2R}$$

Teo di TOLOMEO: ABCD è ciclico (non intrecciato) se e solo se $AB \cdot CD + BC \cdot AD = AC \cdot BD$

Che succede se $P \in$ cfr. circo a ABC e mi faccio il tri pedale?



$P \in$ cfr. per ABC
$\Downarrow$
$AP \cdot BC + PC \cdot AB = BP \cdot AC$ (Tolomeo)
$\Downarrow$
$\cancel{2R}(EF + ED) = \cancel{2R} \cdot FD$
$\Downarrow$
$EF + ED = FD$

$\Rightarrow F, E, D$ allineati

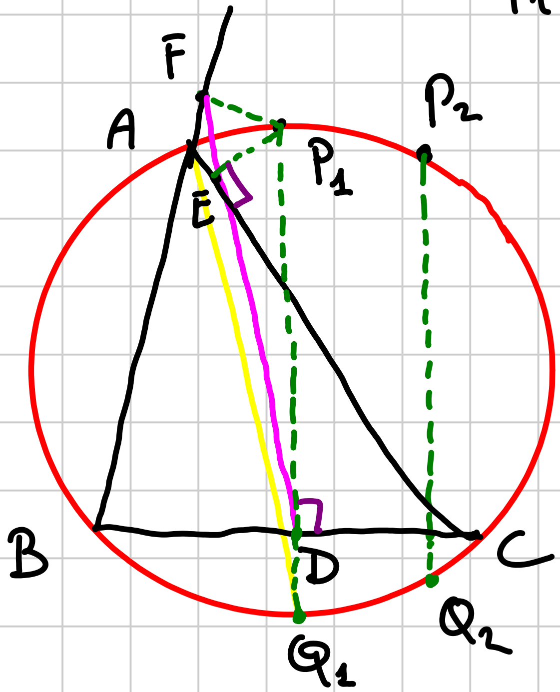
Teo (Simson): $P \in$ cfr. circo $\Rightarrow$ il tri pedale degenera in una retta (retta di Simson)

Proprietà 1: P_1, P_2 punti sulla cfr., s_1, s_2 rette di Simson

$\Rightarrow$ l'angolo tra s_1, s_2 è $\frac{1}{2} P_1\hat{O}P_2$

Dim:

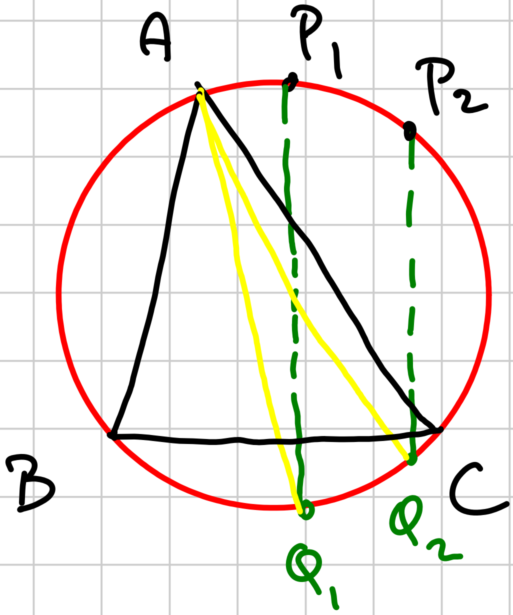
Il quadrilatero P_1EDC è ciclico



$$A\hat{Q}_1P_1 = A\hat{C}P_1 = E\hat{C}P_1 = E\hat{D}P_1$$

$\Rightarrow$ la retta di Simson di P_1 è parallela ad AQ_1.

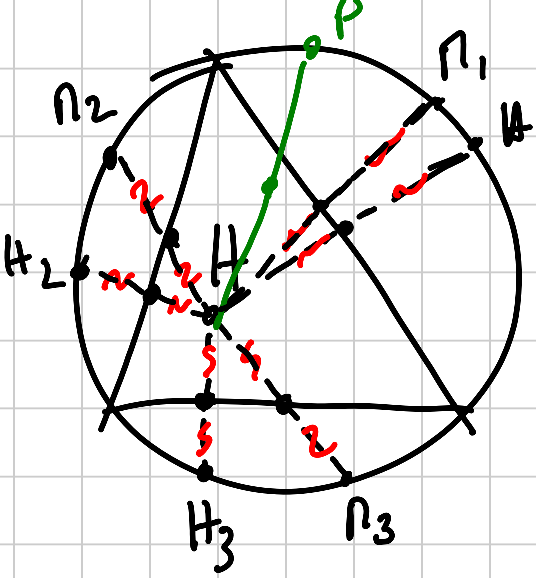
$\Rightarrow$ Se ora prendo P_2 e prolungo la $\perp$ da P_2 su BC fino alla cf. Trovo Q_2 e ho che la retta di Simson di P_2 è parallela a AQ_2



$\Rightarrow$ l'angolo tra s_1 e s_2 è $Q_1\hat{A}Q_2 = \frac{1}{2} Q_1\hat{O}Q_2 =$
$= \frac{1}{2} P_1\hat{O}P_2$. $\square$

<u>Proprietà 2</u>: La retta di Simson di P passa per il punto medio di PH, H ortocentro.

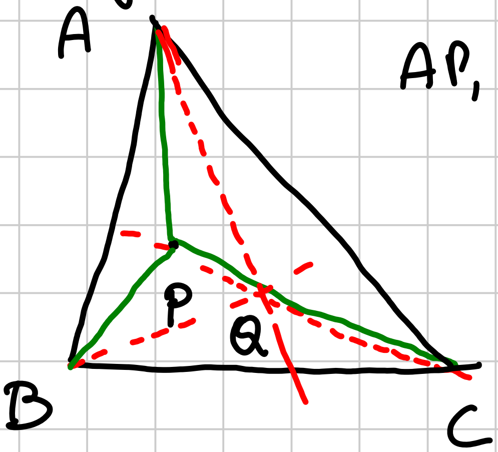
<u>Proprietà 3</u>: Il punto medio di PH sta sulla cf. di Feuerbach



$\Rightarrow$ omot. di centro H e fattore $\frac{1}{2}$ manda gli M_i nei pt. medi dei lati e gli H_i nei piedi delle altezze

<u>Oss</u>: I simm. di $P \in$ cf. circo rispetto ai lati stanno su una retta // alla retta di Simson di P passante per H.

<u>Coniugati isogonali</u>



AP, BP, CP concorrono

$\Updownarrow$

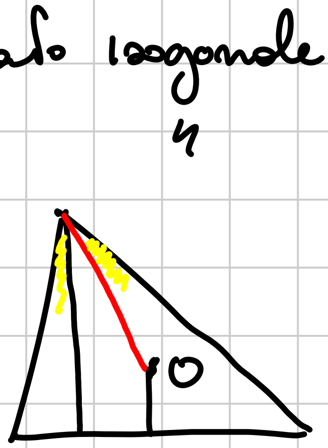
$$\frac{\sin P\hat{A}B}{\sin P\hat{A}C} \cdot \frac{\sin P\hat{C}A}{\sin P\hat{C}B} \cdot \frac{\sin P\hat{B}C}{\sin P\hat{B}A} = 1$$

$\Updownarrow$

le simmetriche concorrono (in Q)

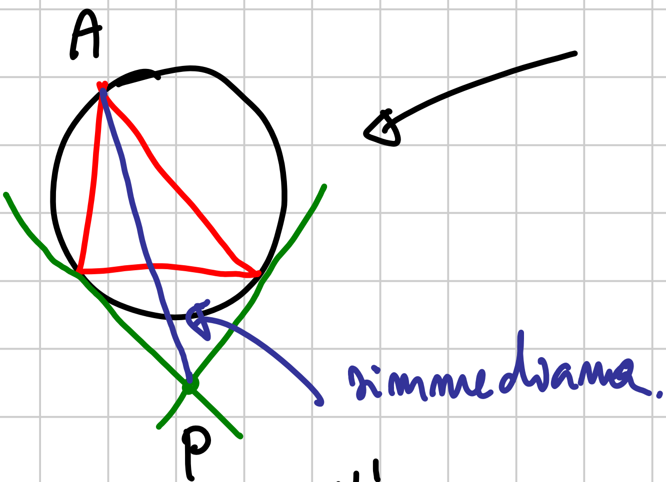
Q = coniugato isogonale di P.

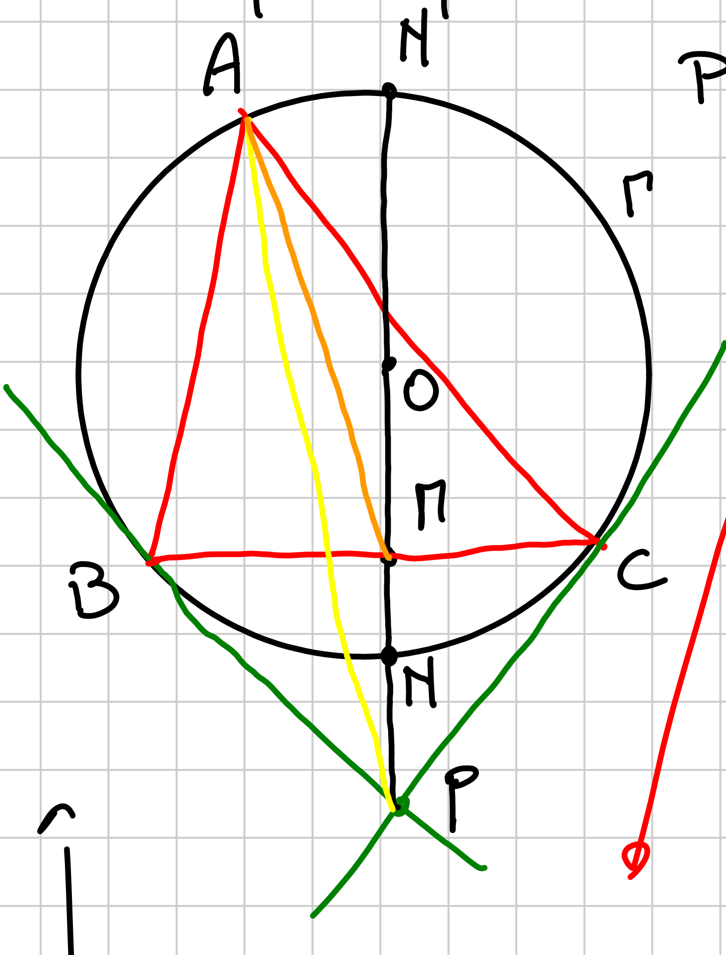
<u>ES</u>: Coniugato isogonale dell'incentro è l'incentro
" " dell'ortocentro è il circocentro



Coniugato isogonale del baricentro è punto di Lemoine

= intersez. delle simmediane





$$P = pol_{\Gamma}(BC)$$

$$(N', N, M, P) = -1$$

$$(AN', AN, AM, AP) = -1$$

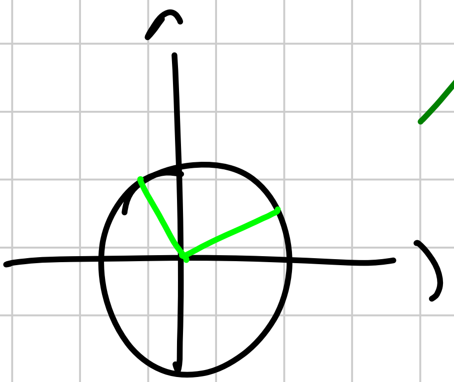
$$(X, Y, Z, W) = \frac{XZ}{ZY} \Big/ \frac{XW}{WY} = \frac{XZ}{ZY} \cdot \frac{WY}{XW}$$

$$\frac{\sin(N'AM)}{\sin(MAN)} \cdot \frac{\sin(PAN)}{\sin(N'AP)} = -1$$

$$\parallel$$

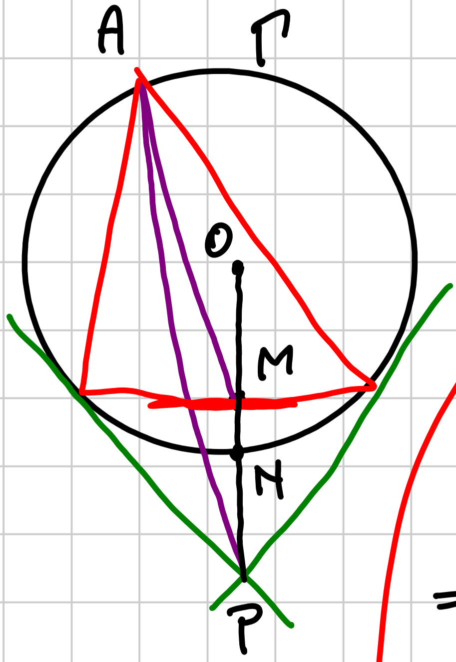
$$Tg(N'\widehat{A}M)(-Tg\, P\widehat{A}N) = -1$$

$$Tg\, P\widehat{A}N = \frac{1}{Tg\, N'\widehat{A}M} = tg\, M\widehat{A}N$$



$\Rightarrow P\widehat{A}N = M\widehat{A}N$. $\square$

2ª dim:

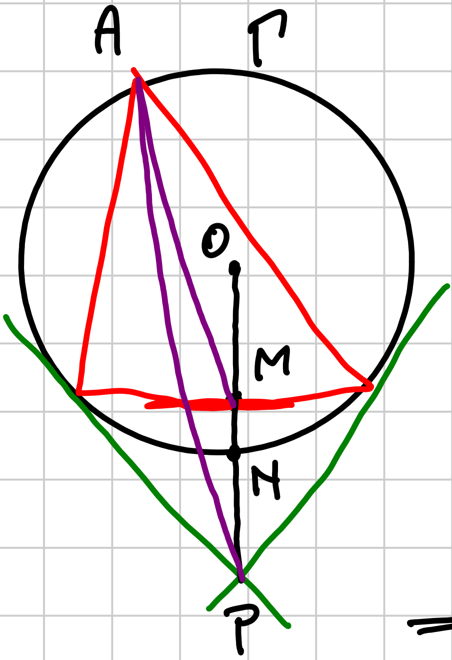


Π e P sono inversi risp. a Γ

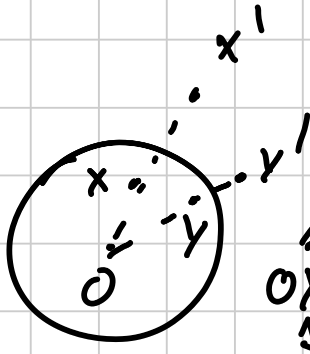
$$O\Pi \cdot OP = ON^2$$

$$\frac{\Pi N}{NP} = \frac{ON - O\Pi}{OP - ON} = \frac{1 - \frac{O\Pi}{ON}}{\frac{OP}{ON} - 1} = \frac{1-x}{\frac{1}{x} - 1} = x$$

$$x = \frac{O\Pi}{ON} = \frac{ON}{OP}$$



$$\frac{A\Pi}{AP}$$



$\overset{\triangle}{OXY} \sim \overset{\triangle}{OY'X'}$

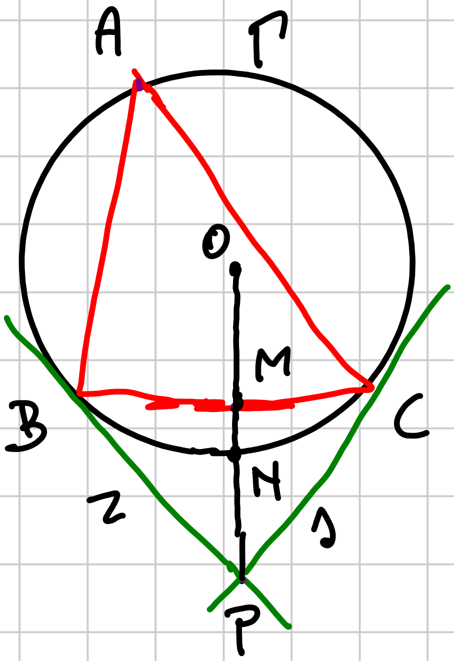
$\overset{\triangle}{O\Pi A}$ e $\overset{\triangle}{OAP}$ sono simili

$$\Rightarrow \frac{A\Pi}{AP} = \frac{OA}{OP} = \frac{ON}{OP} = \frac{O\Pi}{ON} = x.$$

$\Rightarrow$ per il teo della bisett. $\left(\frac{\Pi N}{NP} = \frac{A\Pi}{AP}\right)$ ho che AN biseca $P\hat{A}\Pi$. □

3ª dim:

Applico una inversione di centro A e raggio $r = \sqrt{BA \cdot CA}$ seguita da una simmetria rispetto alla bisettrice di $B\hat{A}C$.



$B \longrightarrow C$

$C \longrightarrow B$

$\Gamma \longrightarrow BC$

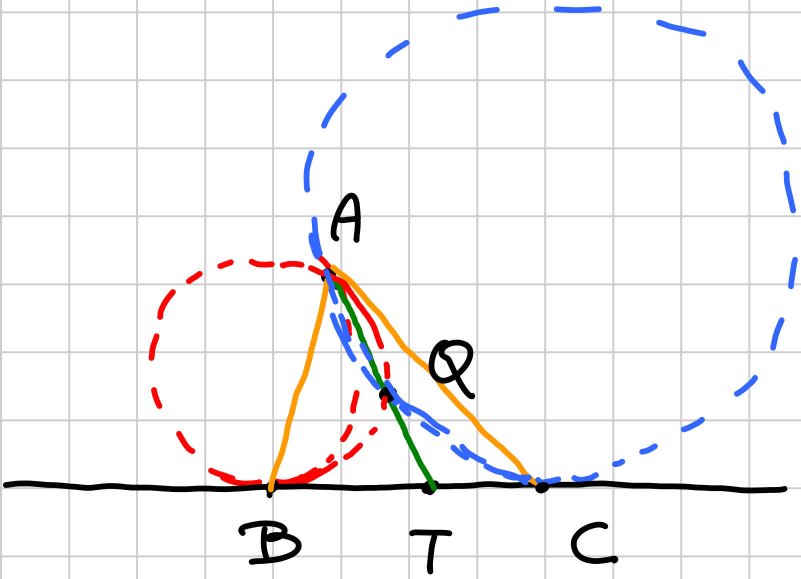
$BC \longrightarrow \Gamma$

$r \longrightarrow$ circonf. per A tg. a BC in C $= \omega_1$

$s \longrightarrow$ " " tg a BC in B $= \omega_2$

$P \longrightarrow$ ulteriore interse. di ω_1 e ω_2 $= Q$

$AP \longrightarrow AQ =$ simm. di AP risp. alla bisett. di $B\hat{A}C$



$AQ =$ asse radicale di ω_1 e ω_2

$\Downarrow$

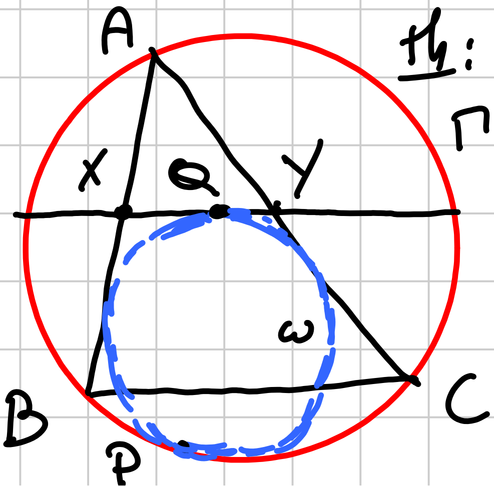
$BT^2 = TC^2$

$\Downarrow$

$BT = TC$

$\Rightarrow AT$ è mediana di $\overset{\triangle}{ABC}$. $\blacksquare$

EGMO 2013 - 5



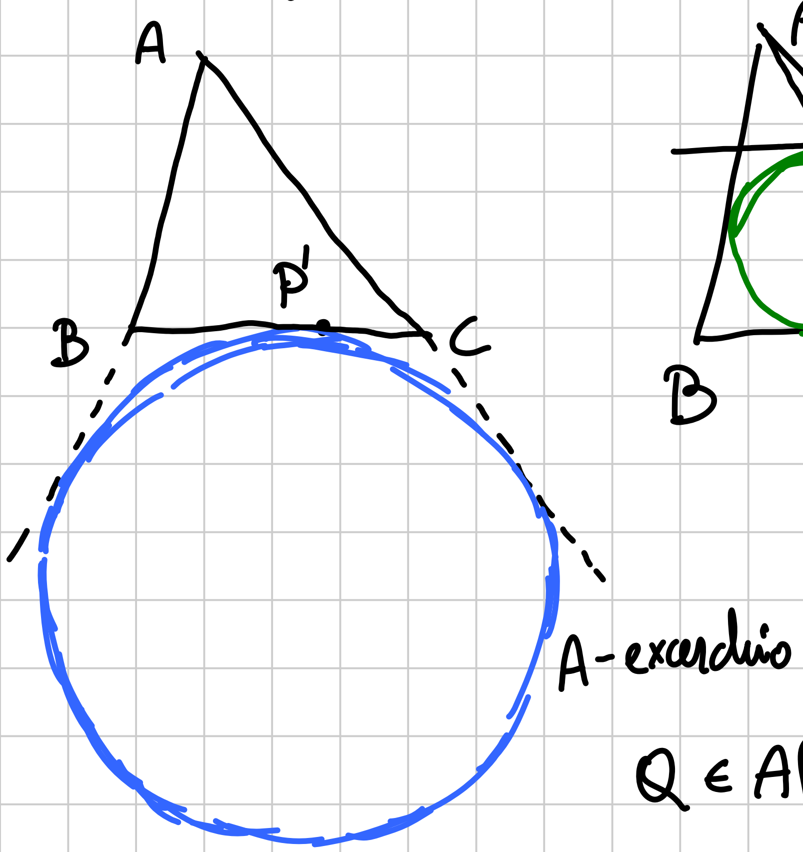
Th: $B\hat{A}P = C\hat{A}Q$

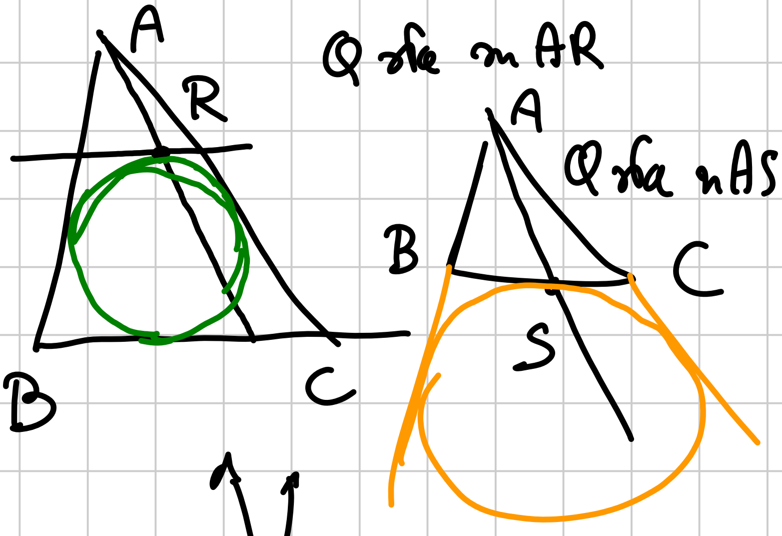
inv. in A con $r = \sqrt{AB \cdot AC}$ + simm nella bisett.

$B \longrightarrow C$, $C \longrightarrow B$

$\Gamma \to BC$, $BC \to \Gamma$

$\omega \to$ A-excerchio di ABC





omotetia!!

$Q \in AP' \Rightarrow Q \in$ simm. di AP risp. alla bisett. ■

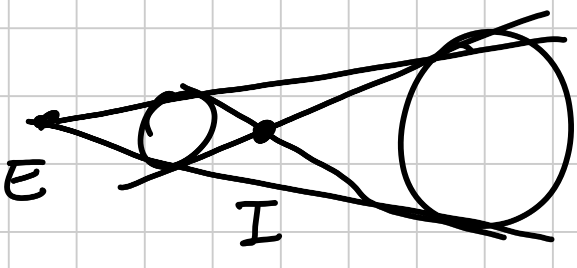
Es: Coniugati isog. dei punti di Nagel e Gergonne sono i centri di similitudine tra circ. inscritta e circ. circoscritta

Se X è centro di simil. esterna tra Γ_1 e Γ_2
Y è centro di simil. esterna tra Γ_2 e Γ_3
Z " " " " esterna " Γ_3 e Γ_1

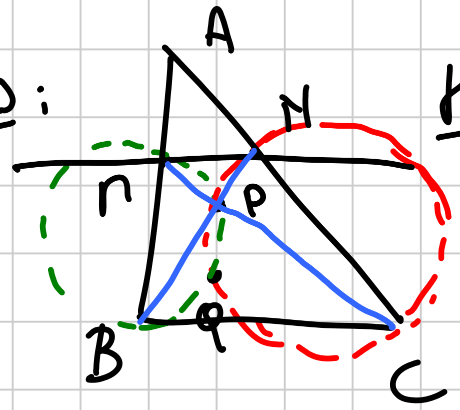
allora X, Y, Z sono allineati

(Monge)

Esempio:



Es:



Hp: $B\hat{A}Q = C\hat{A}P$

BMO 2009-2

Oss: $AP \cap BC = G$

da Ceva su AP, CP, BP

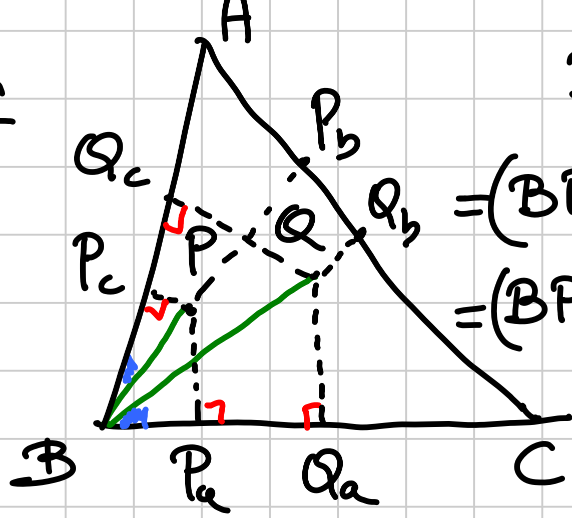
segue che $BG = CG$

$$\frac{AN}{NC} \cdot \frac{CG}{GB} \cdot \frac{BM}{MA} = 1$$

AP mediana

Teo: P, Q coniug. isog. $\Rightarrow$ le circonf. circoscritte dei loro tri pedali coincidono

Dim



$$BP_a \cdot BQ_a = (BP \cdot \cos P\hat{B}C)(BQ \cdot \cos Q\hat{B}C) = (BP \cdot \cos Q\hat{B}A)(BQ \cdot \cos P\hat{B}A) = (BP \cdot \cos P\hat{B}A)(BQ \cdot \cos Q\hat{B}A) = BP_c \cdot BQ_c$$

$\Rightarrow P_a, Q_a, P_c, Q_c$ sono su una cf.

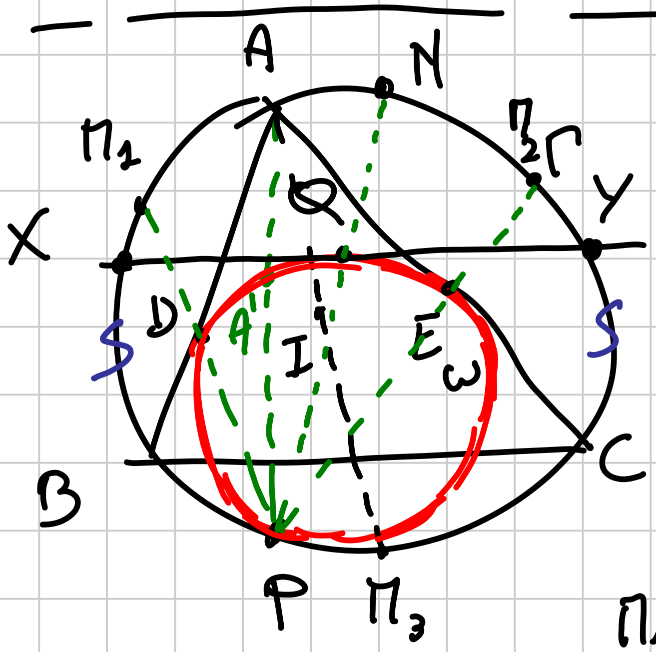
Allo stesso modo $P_a Q_a P_b Q_b$ sono su una cf.

Ancora $P_c Q_c P_b Q_b$ sono su una cf

Se fossero cf. diverse, i 3 assi radicali sarebbero AB, AC, BC, che non concorrono $\Rightarrow$ unica cf.

E il centro è il pt. medio di PQ.

EGMO 2013 - 5 di nuovo



Omotet. di centro P che manda ω in Γ, manda Q nel pt. medio dell'arco $\widehat{XY}$

$= $ pt. medio dell'arco $\widehat{BC}$

P, Q, N allineati.

M_1 pt. med di $\widehat{AB}$ $\Rightarrow$ P, D, M_1 allineati

M_2 pt. med di $\widehat{AC}$ $\Rightarrow$ P, E M_2

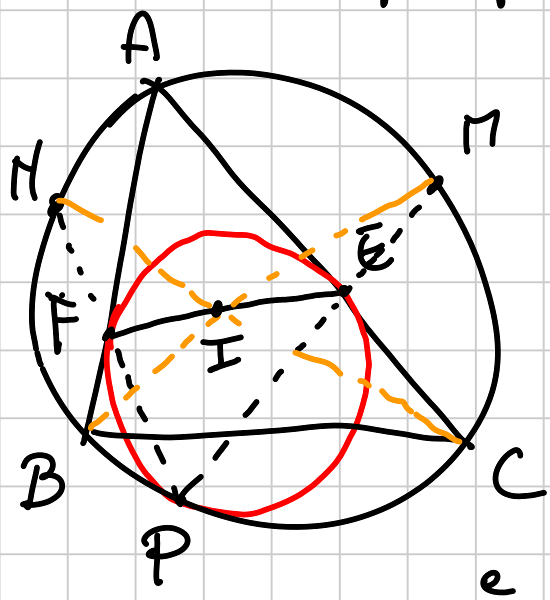
$AN \parallel A'Q$ $\quad AN \perp AM_3$ (M_3N diametro)

$\Rightarrow AM_3 \perp A'Q$ e il centro di ω sta su AM_3

$\Rightarrow AM_3$ è diametro.

$\Rightarrow$ fine per simmetria.

Oss:



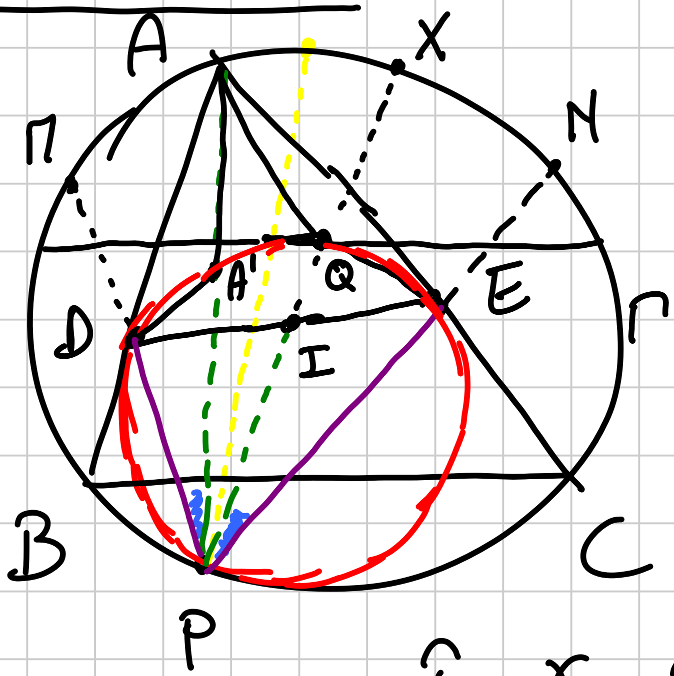
NPMBAC è un esagono ciclico

Per PASCAL

$NP \cap BA = F$
$PM \cap AC = E$ sono allineati
$MB \cap CN = I$

e I è punto medio.

EGMO 2013-5 Reloaded



PI è mediana in $\overset{\triangle}{DPE}$

PA è simmediana in $\overset{\triangle}{DPE}$

PI interseca Γ in X t.c. AM = XN

$\widehat{XN} = \frac{\gamma}{2} \quad \widehat{NC} = \beta/2 \Rightarrow \widehat{CX} = \frac{\gamma}{2} + \frac{\beta}{2}$

$\Rightarrow$ X pt. medio di $\widehat{BC} \Rightarrow$ P, I, Q, X allineati

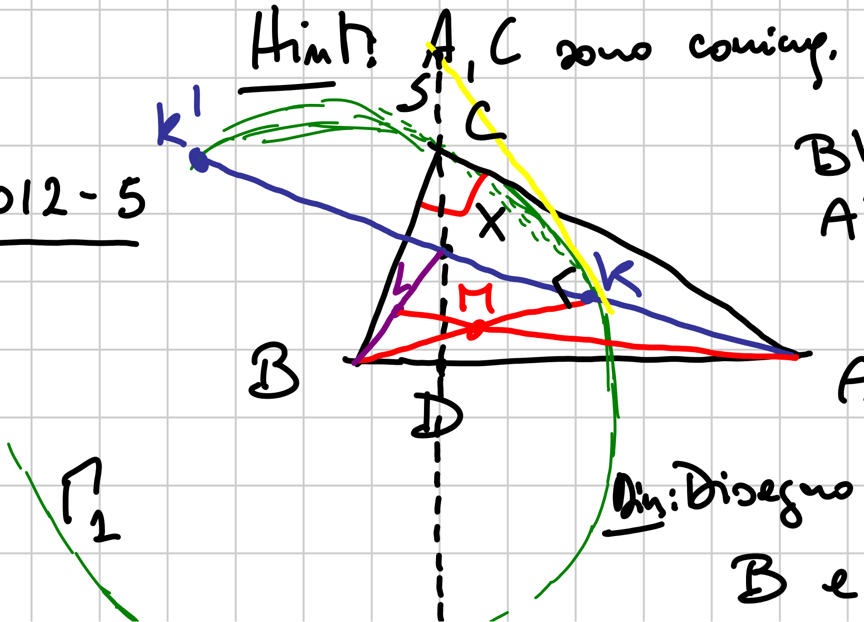
$D\hat{P}A = I\hat{P}E = Q\hat{P}E \Rightarrow A\hat{D}A' = A\hat{E}Q$

e $AE = AD$, $DA' = QE$ $\Rightarrow D\hat{A}P = D\hat{A}A' = Q\hat{A}E = Q\hat{A}C$.

A proposito di coniugati isogonali: IMO 2004-5

Hint: A, C sono coniug. isog. in $\overset{\triangle}{DBP}$.

IMO 2012-5

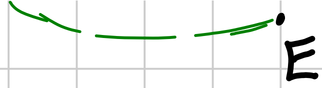


$BK = BC$

$AL = AC$

Th: $MK = ML$

Dim: Disegno Γ_1 cf. di centro B e raggio $BC = BK$



E = altra intersez. di CD con Γ_1

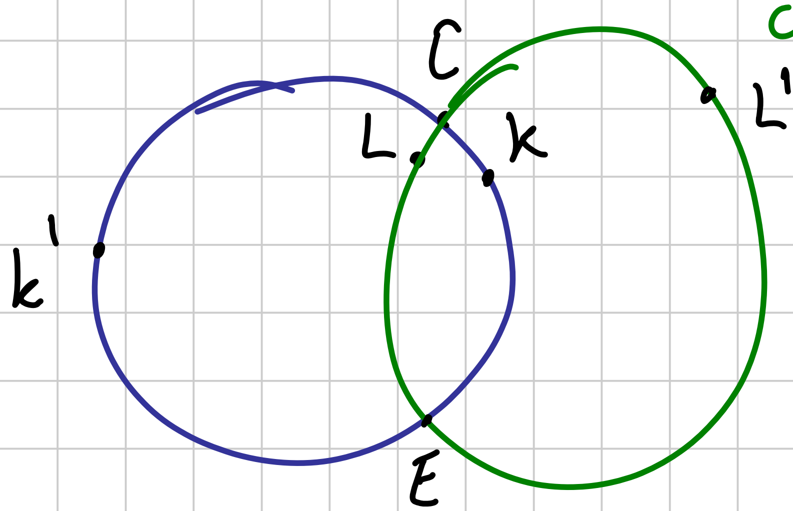
CA, AE tg. a Γ_1 per simm. $\quad A = \mathrm{pol}_{\Gamma_1}(CE)$

K' ulteriore intersez. di AK con Γ_1

$\Rightarrow$ (lemma della polare) $(A, X, K, K') = -1$.

$\Rightarrow (C, E, K, K') = -1$

Faccio lo stesso con centro in A e ottengo $(C, E, L, L') = -1$



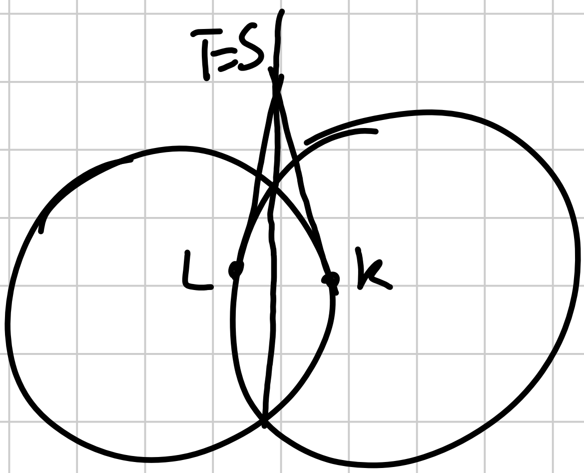
Proietto da K su CE $\quad (KC, KE, KK, KK') = -1$

$\rightarrow (C, E, S, X) = -1$

Proietto da L su CE $\quad (LC, LE, LL, LL') = -1$

T = tg in $L \cap CE$ $\quad (C, E, T, X) = -1$

$\Rightarrow T = S$



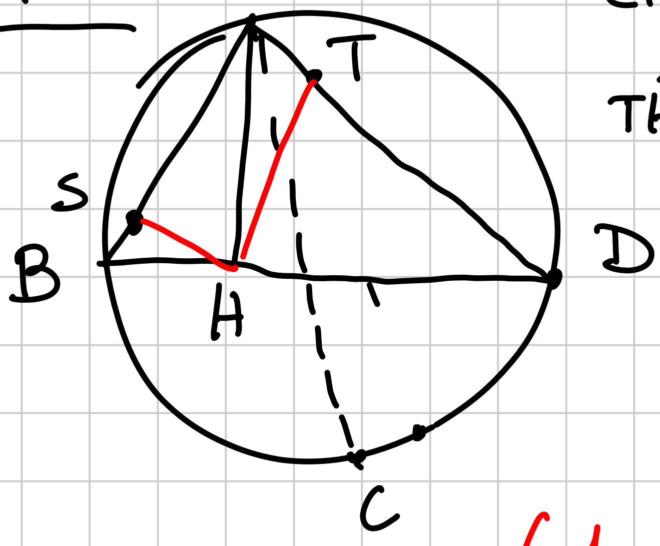
$TL = TK$

e $B\hat{K}T = A\hat{L}T = 90°$

$\Rightarrow \overset{\triangle}{TLM}$ e $\overset{\triangle}{TKM}$ sono congruenti

$\Rightarrow MK = ML$.

IMO 2014 - 3



$\widehat{CHS} - \widehat{CSB} = \frac{\pi}{2}$

$\widehat{THC} - \widehat{DTC} = \frac{\pi}{2}$

H è interno a $\overset{\Delta}{CST}$

$\Rightarrow$ BD tg alla circonf. per T, S, H.

(th. di Apollonio).