Algebra 2 - Advanced TESS

Titolo nota 04/09/2015

Disuguaglianze in molte variabili

In generale ho $f(a_1, ..., a_n)$

e devo trovare il min/max oppure devo trovare dei bound per il min/max

$$f(a_1, ..., a_n) \leq M$$

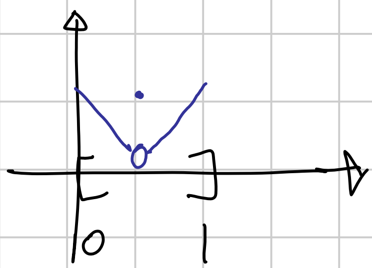
$$\frac{(a+b)^2}{ab} \geq ?$$

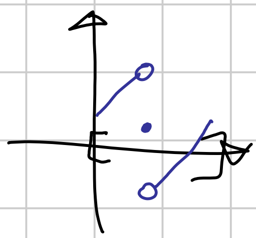
Th di Weierstrass

$f: [a,b] \to \mathbb{R}$, continua

$\Rightarrow \exists \min\{f\}$

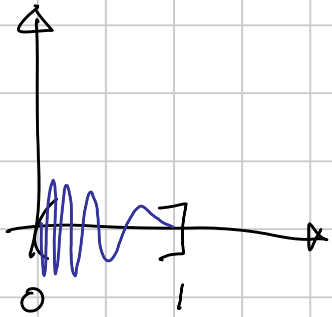
Oss: f deve essere continua





Oss: devo avere il bordo (i punti a, b)

$f: [0,1] \to \mathbb{R}$, continua senza max/min



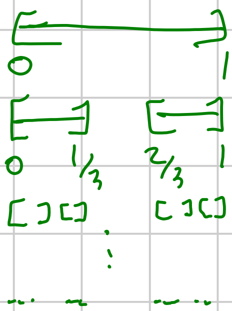
$$f(x) = (1-x)\sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

Possiamo generalizzare

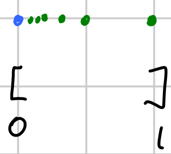
Abbiamo osservato che serve la limitatezza e la chiusura (= ho il bordo) del dominio e la continuità di f

Per esempio vale il th di Weierstrass per

- $f: [a,b] \cup [c,d] \to \mathbb{R}$
- $f: C \to \mathbb{R}$ (con C l'insieme di Cantor)



- $f: \{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}^+ \} \cup \{0\} \to \mathbb{R}$



Vogliamo generalizzare in più variabili

vorremmo studiare $f: A \to \mathbb{R}$ con $A \subseteq \mathbb{R}^n$

Anche in questo caso vale il teorema di Weierstrass

Ci servono

Limitatezza di A: vuol dire $\exists B$ palla t.c. $A \subseteq B$

(un palla in $\mathbb{R}^n$ di centro $p \in \mathbb{R}^n$ e raggio $r \in \mathbb{R}^+$ è l'insieme $\{x \in \mathbb{R}^n : |x-p| < r\}$ dove $|x-y|$ indica la distanza euclidea tra x, y

se $x = (x_1, \dots, x_n)$ e $y = (y_1, \dots, y_n)$

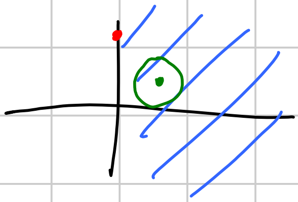
$$|x-y| := \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$)

Chiusura di A: vuol dire che il suo complementare è aperto

Un insieme $A \subseteq \mathbb{R}^n$ si dice aperto se $\forall x \in A$, $\exists B(x,r)$ t.c. $B(x,r) \subseteq A$

Esempio: $(x_1, \dots, x_n)$ t.c. $x_1 > 0$

questo è aperto

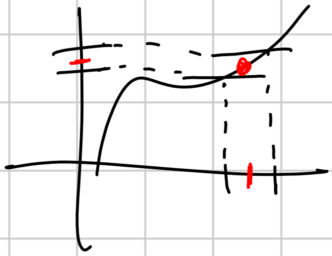


$(x_1, \dots, x_n)$ t.c. $x_1^2 + x_2^3 < 0$

$x_3 > 0$

Un funzione $f: A \to C$ è continua con $A \subseteq \mathbb{R}^n, C \subseteq \mathbb{R}^m$

se $f^{-1}(B(x,r))$ è aperta



se $f(x) = y$
se voglio f continua in x
devo avere che $\forall r > 0 \ \exists r' > 0$
$f^{-1}(B(y,r)) \supseteq B(x,r')$

Scritta un po' meglio,

$f: A \to C$ con $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $C \subseteq \mathbb{R}^m$

allora f è continua in $x \in A$ se
$\forall r > 0 \quad \exists r' > 0$:

$$f^{-1}(B(f(x),r) \cap C) \supseteq B(x,r') \cap A$$

È continua se è continua in tutti i punti di A

Th Weierstrass Generalizzato

Se $f: A \to \mathbb{R}$ $A \subseteq \mathbb{R}^n$, chiuso e limitato, f continua
allora f ammette min/max

Convessità

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ diciamo che f è convessa se

$\forall\ x,y \in [a,b] \quad \forall\ \lambda \in [0,1]$

$$\underbrace{\lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)}_{\text{combinazione convessa di } f(x) \text{ e } f(y)} \geq f(\lambda x + (1-\lambda) y)$$

in generale se ho $a_1, \dots, a_n$ e $\lambda_1, \dots, \lambda_n$
t.c. $\lambda_i \geq 0$ e $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$

allora chiamerò $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i$ una combinazione convessa

Disuguaglianza di Jensen

Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ è convessa allora

$\forall\ x_1, \dots, x_n \in [a,b] \quad \forall\ \lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0 : \sum \lambda_i = 1$

$$\sum_i \lambda_i f(x_i) \geq f\left(\sum_i \lambda_i x_i \right)$$

L'idea della dimostrazione UP-DOWN (induzione)

DOWN è banale e UP si fa sfruttando il P.B.

Jensen è forte! Se avete $x_1, \dots, x_n \in [a,b]$
t.c. $\sum_i x_i = C$

allora Jensen $\Rightarrow \min \left\{ \sum_i f(x_i) \right\} = f\left(\frac{\sum x_i}{n} \right) n$

cioè so dov'è il min (tutti gli x_i sono uguali)

Qui, la funzione da minimizzare è

$$g(x_1, \dots, x_n) = \sum_i f(x_i)$$

Se invece cerco il max, devo spostarmi al bordo

Chiaramente, per le funzioni concave è lo stesso (basta mettere un $-$)

Disuguaglianza di Karamata

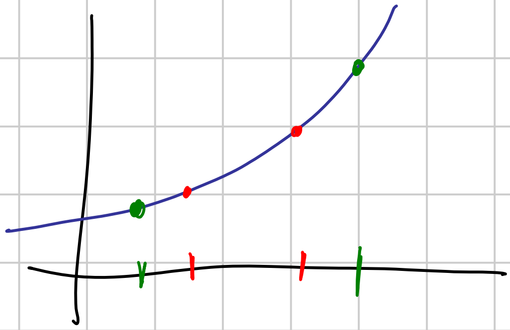
$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ convessa

$(x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \in [a,b]^n$

$$* \begin{cases} x_1 \geq x_2 \dots \geq x_n \ ; \quad y_1 \geq y_2 \geq \dots \geq y_n \\ x_1 \geq y_1 \\ x_1 + x_2 \geq y_1 + y_2 \\ \vdots \\ x_1 + x_2 + \dots + x_n = y_1 + \dots + y_n \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \sum f(x_i) \geq \sum f(y_i)$$

Es con 2 variabili



Karamata $\Rightarrow$ • $\geq$ •

Lemma: Diciamo che $X, Y \in \mathbb{R}^n$
$X \succ Y$
se valgono le condizioni *

Allora, prendo i permutati di X

cioè $X_\sigma := (x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)})$: σ è permutazione,

Y è combinazione convessa degli X_σ

Esempio stupido

$X = (5, 1)$
$Y = (4, 2)$ $\Rightarrow$ $\lambda(5,1) + (1-\lambda)(1,5) = (4,2)$

$5\lambda + (1-\lambda) = 4$

$4\lambda = 3 \qquad \lambda = \frac{3}{4}$

Idea della dimostrazione:

per induzione sistemo le prime k componenti

$(x_1, \dots, x_n) \succ (y_1, \dots, y_n)$

$\underbrace{(x_1, \dots, x_n)}_{X''} \succ \underbrace{(y_1, ?, \dots ?)}_{X'} \succ \underbrace{(y_1, \dots, y_n)}_{Y}$

voglio usare soltanto

$(x_1, x_2, \ldots, x_n)$
e $(x_2, x_1, \ldots, x_n)$

nel passo induttivo voglio scegliere λ t.c.
$\lambda(x_1, x_2, \ldots, x_n) + (1-\lambda)(x_2, x_1, \ldots, x_n) = (y_1, ? \ldots ?)$

Ora se so che $x \succ x'$ $\Rightarrow$ vale il lemma su (x, x')
e so che $x' \succ y$ $\Rightarrow$ " (x', y)

$\Rightarrow$ $x \succ y$ e vale il lemma su (x, y)

Dim di Karamata

Per il lemma so che $y \overset{*}{=} \sum_{\sigma \in S_n} \lambda_\sigma x_\sigma$

Per Jensen posso prendere un y_i
e scrivere Jensen usando
l'uguaglianza $*$ nella componente i

$$\sum \lambda_\sigma f(x_{\sigma(i)}) \underset{\text{Jensen}}{\geq} f\left(\sum \lambda_\sigma x_{\sigma(i)}\right) \underset{*}{=} f(y_i)$$

Ora sommo su tutti i σ e ottengo la tesi

Per casa dimostrate Bunching usando
Lemma + AM-GM

Esercizi

- $a_2, \dots, a_n > 0 \quad \prod a_i = 1 \Rightarrow \prod (1+a_i) > n^n$
- $x_i \in [0,1]$, trovare il max di $\sum_i \frac{x_i}{(\prod_{j\neq i} x_j)+1}$
- $x_i > 0$; $a > 0$; $\sum_i \frac{1}{a+x_i} = \frac{1}{a}$ $\min\{\prod_i x_i\} = ?$
- $x_i > 0$, $\sum_i \frac{x_i}{1+x_i} = 1$ $\max\{\prod x_i\}$
- Dato $x > 0$, determinare il min $n : \exists\, a_1, \dots, a_n \in (-1,1)$: $\sum_i a_i = 0$, $\sum_i a_i^2 = x$
- $x_i > 0$, $\sum_{i<j} x_i x_j (x_i^2 + x_j^2) \leq C (\sum_i x_i)^4$, determinare C
- $x_1, \dots, x_{100} \geq 0$; $x_i + x_{i+1} + x_{i+2} \leq 1$; $\max\{\sum_i x_i x_{i+2}\} = ?$
- $a_1, \dots, a_{100}$; $\sum_i a_i^2 = 1 \Rightarrow \sum_i a_i^2 a_{i+1} < \frac{\sqrt{2}}{3}$

- IMO 2012 - 2

$$\prod_{i=2}^{n} a_i = 1 , \quad \prod (1+a_i)^i > n^n$$

Viene per induzione su n

P.I : $(1+a)^k \geq \frac{k^k}{(k-1)^{k-1}} a$

Sol 1: AM-GM pesata su 1 e a

$$\left(\frac{1+a}{k}\right) \geq \frac{1}{(k-1)^{\frac{k-1}{k}}} a^{\frac{1}{k}}$$

, uno trova i pesi $k-1$, 1

Sol 2: la funzione $f(a) = (1+a)^k - \frac{k^k}{(k-1)^{k-1}} a$

è continua e definita su $[0, +\infty)$

basta che sia definita su $[0, M]$
poi derivate e controllate 2 tipologie di punti
per vedere dove sta il minimo - il bordo $\{0, M\}$
- i punti : $f'(a) = 0$

oppure f è convessa, e il minimo sta dove
$f'(a) = 0$ oppure su un bordo

- $x_i \in [0,1]$ $\quad \max \left\{ \sum_i \frac{x_i}{\prod_{j \neq i} x_j + 1} \right\}$

Oss: non c'è il vincolo!

Allora fissiamo tutte tranne 1 variabile e vediamo dove sta il massimo

Oss: è convessa come $f(x_k) = \sum_i \frac{x_i}{\prod_{j\neq i} x_j + 1}$

il massimo sta al bordo $\rightarrow x_k = 0, 1$

Ora basta verificare finiti casi cioè tutte le

Li vedo che il massimo si ha con $x_1 = 0$
e $x_i = 1$ per $i > 1$

Altro approccio

Oss: $\frac{x_i}{\prod_{j\neq i} x_j + 1} = \frac{x_i^2}{P + x_i}$ con $P = \prod_i x_i$

Cerco di ricondurmi al caso

$\sum a_i = C$ $\max\{\sum f(a_i)\}$

$x_i = e^{-a_i}$ $\rightarrow$ cambio di variabile, $a_i \geq 0$

e viene che le f sono convesse, quindi

applico Karamata wlog $a_1 \geq a_2 \dots \geq a_n$

$(a_1, a_2, \dots, a_n) \prec (-\log P, 0, \dots, 0)$

(Attenzione se qualche $x_i = 0$)

Ho in mente di dimostrare $\sum \tilde{f}(x_i) \leq g(P)$

e poi trovare il max di g

distinguo i casi $P=0$ e $P>0$, in quest'ultimo

faccio Karamata sugli a_i

- $x_i > 0 \quad \sum_i \frac{1}{2+x_i} = \frac{1}{2}$, $\min\{\prod x_i\} = ?$
- $x_i > 0 \quad \sum \frac{x_i}{1+x_i} = 1$, $\max\{\prod x_i\} = ?$

(il secondo è molto simile al primo)

Oss: il vincolo fa schifo

Se il vincolo fa schifo, cambio variabili!

Sostituisco, $y_i = \frac{2}{2+x_i}$

ottengo $\sum y_i = 1$, $y_i > 0$; $x_i = \frac{2}{y_i} - 2$

$\prod_{i=1}^{n} \left(\frac{2}{y_i} - 2\right)$ ← voglio il minimo

sarei + contento se avessi
una somma di $f(y_i)$

→ mi basta prendere il log (tanto è monotono)

Ora il problema è nella formulazione std per applicare Jensen-Karamata se avessi delle f convesse o concave

Però $f(y) = \ln\left(\frac{a}{y} - a\right)$ e non è convessa

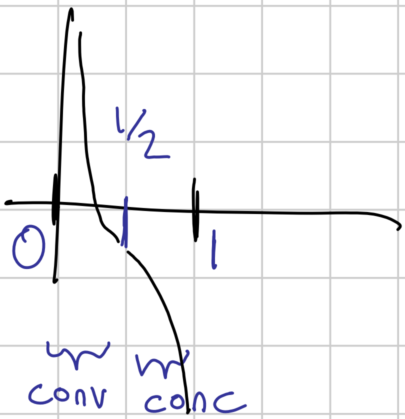
né concava!

[C'è un criterio facile per le funzioni derivabili 2 volte: f è convessa $\Longleftrightarrow$ $f'' \geq 0$ dappertutto]

In questo caso $f' = \dfrac{-\frac{1}{y^2}}{\frac{1}{y} - 1} = -\dfrac{1}{y - y^2}$

$f'' = \dfrac{1 - 2y}{(\quad)^2}$

$f'' > 0 \Longleftrightarrow y \leq \frac{1}{2}$



Ora quasi tutte le variabili saranno $< \frac{1}{2}$

Prendo quelle e il minimo ce l'ho solo quando sono tutte uguali

Quindi ci sono 2 possibilità:

- tutte le $y_i \leq \frac{1}{2}$ $\rightarrow$ Jensen mi dice che il minimo è quando tutte sono uguali

- $y_1 > \frac{1}{2}$ e $y_i < \frac{1}{2}$ per $i > 1$ $\rightarrow$ $y_2 = \ldots = y_n$

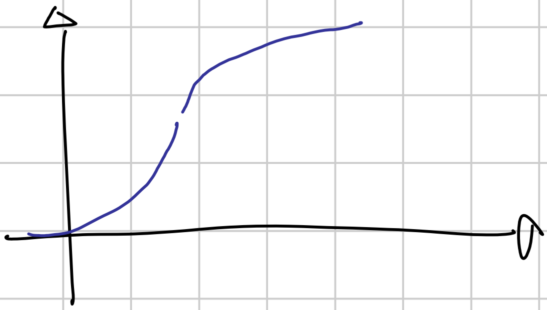
(Ancora per Jensen)

E ora ho una funzione nella sola y_1

perché $y_2 = \ldots = y_n = \frac{1-y_1}{n-1}$

Lemma Convex-Concave

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$



E volete

$\min \sum_i f(x_i)$

con vincolo $\sum x_i = C$

Ci sono 2 configurazioni che si giocano il minimo

- tutte le x_i sono nella parte convex e sono $=$
- x_1 nella parte concave e le altre sono $=$ e nella parte convex
- oppure qualcuna sta al bordo (non convex)

Idea della dimostrazione

- il minimo esiste (Weierstrass)
- prendo il minimo, allora

le x_i della parte convex sono uguali, altrimenti per Jensen trovo un valore + piccolo

- Se ci fossero 2 variabili (x_1, x_2) nella parte concave e $x_1, x_2 \neq a, b$ non avevo il minimo per Karamata

$(y_2, y_1) \succ (x_2, x_1)$

se non sono già al bordo

- Alla fine ce ne sarà qualcuna sul bordo, al massimo 1 sulla parte interna della zona concave e le altre uguali in quella convex

- Dato $x > 0$ trovare il min n t.c. $\exists\, a_1, \dots, a_n \in (-1, 1)$ e t.c. $\sum a_i = 0 \qquad \sum a_i^2 = x$

Il problema si può "ribaltare" cioè, dato n, quali sono gli x che ottengo, in particolare mi interessa il max

Applico karamata

$(a_1, \dots, a_n) \prec (\qquad\qquad\qquad)$

devo trovare chi è

per n pari basta $(\underbrace{1,\dots,1}_{n/2},\underbrace{-1,\dots,-1}_{n/2})$

per n dispari basta $(\underbrace{1,\dots,1}_{\frac{n-1}{2}},0,\underbrace{-1,\dots,-1}_{\frac{n-1}{2}})$

Ottengo che $\sum a_i^2 < n$ se n pari

$< n-1$ se n dispari

- $x_i > 0 \qquad \sum_{i<j} x_i x_j (x_i^2+x_j^2) \le C\left(\sum_i x_i\right)^4$

$$C = \frac{1}{8}$$

($x_i = 1$, $2\binom{n}{2} \le C\, n^4$
non funziona perché c'è un altro caso di uguaglianza)

Oss: è omogenea, posso semplificare a dx con un vincolo semplice $\sum x_i = 1$, ottengo

$$\sum_{i<j} x_i x_j (x_i^2+x_j^2) \le C$$

Oss: la tesi è equivalente

$$\sum_i (x_i^3 - x_i^4) \le C$$

Qui ho finito.

Gli altri problemi per casa.