# Stage Senior 2015 – Livello Advanced

## Stampato integrale delle lezioni

Autori vari

# Indice

# Algebra 2 - Advanced TESS

Titolo nota 04/09/2015

## Disuguaglianze in molte variabili

In generale ho $f(a_1, \dots, a_n)$

e devo trovare il min/max oppure devo trovare dei bound per il min/max

$$f(a_1, \dots, a_n) \leq M$$

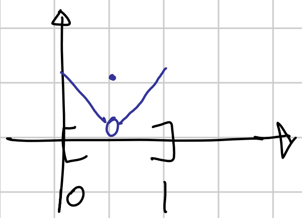
$$\frac{(a+b)^2}{ab} \geq ?$$

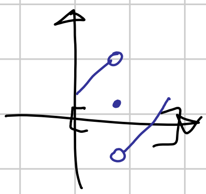
Th di Weierstrass

$f: [a,b] \to \mathbb{R}$, continua

$\Rightarrow \exists \min\{f\}$

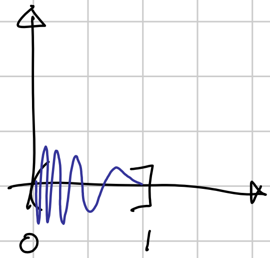
Oss: f deve essere continua



Oss: devo avere il bordo (i punti a, b)

$f : (0,1] \to \mathbb{R}$ , continua senza max/min



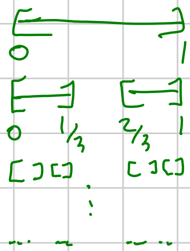
$$f(x) = (1-x)\sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

Possiamo generalizzare

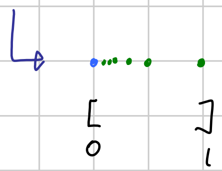
Abbiamo osservato che serve la limitatezza e la chiusura (= ho il bordo) del dominio e la continuità di $f$

Per esempio vale il th di Weierstrass per

- $f : [a,b] \cup [c,d] \to \mathbb{R}$
- $f : C \to \mathbb{R}$ (con $C$ l'insieme di Cantor)



- $f : \{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}^+ \} \cup \{0\} \to \mathbb{R}$



Vogliamo generalizzare in più variabili

vorremmo studiare $f : A \to \mathbb{R}$ con $A \subseteq \mathbb{R}^n$

Anche in questo caso vale il teorema di Weierstrass

Ci servono

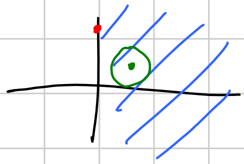
Limitatezza di $A$ : vuol dire $\exists\, B$ palla t.c. $A \subseteq B$

(un palla in $\mathbb{R}^n$ di centro $p \in \mathbb{R}^n$ e raggio $r \in \mathbb{R}^+$ è l'insieme $\{x \in \mathbb{R}^n : |x-p| < r\}$ dove $|x-y|$ indica la distanza euclidea tra $x, y$
se $x = (x_1, \dots, x_n)$ e $y = (y_1, \dots, y_n)$
$|x-y| := \left( \sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$ )

Chiusura di $A$ : vuol dire che il suo complementare è aperto

Un insieme $A \subseteq \mathbb{R}^n$ si dice aperto se $\forall\, x \in A$, $\exists\, B(x, r)$ t.c. $B(x,r) \subseteq A$

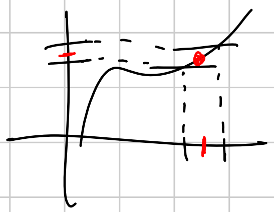
Esempio : $(x_1, \dots, x_n)$ t.c. $x_1 > 0$
questo è aperto



$(x_1, \dots, x_n)$ t.c. $x_1^2 + x_2^3 < 0$
$x_3 > 0$

Un funzione $f: A \to C$ è continua
con $A \subseteq \mathbb{R}^n, C \subseteq \mathbb{R}^m$

se $f^{-1}(B(x,r))$ è aperta



se $f(x) = y$
se voglio $f$ continua in $x$
devo avere che $\forall r>0 \; \exists r'>0$
$f^{-1}(B(y,r)) \supseteq B(x,r')$

Scritta un po' meglio,

$f: A \to C$ con $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $C \subseteq \mathbb{R}^m$

allora $f$ è continua in $x \in A$ se
$\forall r>0 \quad \exists r'>0$ :

$$f^{-1}(B(f(x),r) \cap C) \supseteq B(x,r') \cap A$$

È continua se è continua in tutti i punti di $A$

Th Weierstrass Generalizzato

Se $f: A \to \mathbb{R}$ $A \subseteq \mathbb{R}^n$, chiuso e limitato; $f$ continua
allora $f$ ammette min/max

# Convessità

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ diciamo che $f$ è convessa se

$\forall\ x, y \in [a,b] \quad \forall\ \lambda \in [0,1]$

$$\underbrace{\lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)}_{\text{combinazione convessa di } f(x) \text{ e } f(y)} \geq f(\lambda x + (1-\lambda) y)$$

in generale se ho $a_1, \dots, a_n$ e $\lambda_1, \dots, \lambda_n$
t.c. $\lambda_i \geq 0$ e $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$

allora chiamerò $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i$ una combinazione convessa

## Disuguaglianza di Jensen

Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ è convessa allora

$\forall\ x_1, \dots, x_n \in [a,b] \quad \forall\ \lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0 : \sum \lambda_i = 1$

$$\sum_i \lambda_i f(x_i) \geq f\left(\sum_i \lambda_i x_i\right)$$

L'idea della dimostrazione UP-DOWN (induzione)

DOWN è banale e UP si fa sfruttando il P.B.

Jensen è forte! Se avete $x_1, \dots, x_n \in [a,b]$
t.c. $\sum_i x_i = C$

allora Jensen $\Rightarrow$ $\min \left\{ \sum_i f(x_i) \right\} = f\left(\frac{\sum x_i}{n}\right) n$

cioè so dov'è il min (tutti gli $x_i$ sono uguali)

Qui, la funzione da minimizzare è

$$g(x_1, \ldots, x_n) = \sum_i f(x_i)$$

Se invece cerco il max, devo spostarmi al bordo

Chiaramente, per le funzioni concave è lo stesso (basta mettere un $-$)

# Disuguaglianza di Karamata

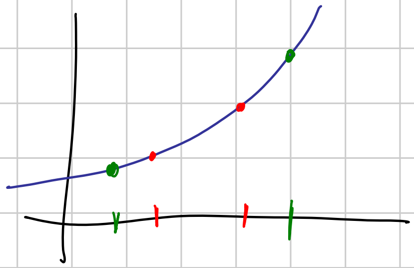
$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ convessa

$(x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n) \in [a,b]^n$

$$* \begin{cases} x_1 \geq x_2 \ldots \geq x_n \ ; \ y_1 \geq y_2 \geq \ldots \geq y_n \\ x_1 \geq y_1 \\ x_1 + x_2 \geq y_1 + y_2 \\ \vdots \\ x_1 + x_2 + \ldots + x_n = y_1 + \ldots + y_n \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \sum f(x_i) \geq \sum f(y_i)$$

Es con 2 variabili



Karamata $\Rightarrow$ $\bullet \geq \bullet$

Lemma: Diciamo che $X, Y \in \mathbb{R}^n$, $X \succeq Y$

se valgono le condizioni $*$

Allora, prendo i permutati di $X$

cioè $X_\sigma := (x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)})$ : $\sigma$ è permutazione,

$Y$ è combinazione convessa degli $X_\sigma$

Esempio stupido

$$X = (5,1) \qquad Y = (4,2) \quad \Rightarrow \quad \lambda(5,1) + (1-\lambda)(1,5) = (4,2)$$

$$5\lambda + (1-\lambda) = 4$$

$$4\lambda = 3 \qquad \lambda = \frac{3}{4}$$

Idea della dimostrazione:

per induzione sistemo le prime $k$ componenti

$$(x_1, \dots, x_n) \succ (y_1, \dots, y_n)$$

$$\underbrace{(x_1, \dots, x_n)}_{X''} \underset{\text{voglio usare soltanto}}{\succ} \underbrace{(y_1, ? \dots ?)}_{X'} \succ \underbrace{(y_1, \dots, y_n)}_{Y}$$

$(x_1, x_2, \ldots, x_n)$
e $(x_2, x_1, \ldots, x_n)$

nel passo induttivo voglio scegliere $\lambda$ t.c.
$\lambda(x_1, x_2, \ldots, x_n) + (1-\lambda)(x_2, x_1, \ldots, x_n) = (y_1, ? \ldots ?)$

Ora se so che $x \succ x' \Rightarrow$ vale il lemma su $(x, x')$
e so che $x' \succ y \Rightarrow$ " $(x', y)$

$\Rightarrow$ $x \succ y$ e vale il lemma su $(x, y)$

Dim di Karamata

Per il lemma so che $y \overset{*}{=} \sum_{\sigma \in S_n} \lambda_\sigma x_\sigma$

Per Jensen posso prendere un $y_i$
e scrivere Jensen usando
l'uguaglianza $*$ nella componente $i$

$$\sum \lambda_\sigma f(x_{\sigma(i)}) \underset{\text{Jensen}}{\geq} f\left(\sum \lambda_\sigma x_{\sigma(i)}\right) \underset{*}{=} f(y_i)$$

Ora sommo su tutti i $\sigma$ e ottengo la tesi.

Per casa dimostrate Bunching usando
Lemma + AM-GM

## Esercizi

- $a_2, \dots, a_n > 0 \quad \prod a_i = 1 \Rightarrow \prod_i (1+a_i)^i > n^n$
- $x_i \in [0,1]$, trovare il max di $\displaystyle\sum_i \frac{x_i}{(\prod_{j \neq i} x_j) + 1}$
- $x_i > 0$; $a > 0$; $\displaystyle\sum_i \frac{1}{a+x_i} = \frac{1}{a}$ $\quad \min \{ \prod_i x_i \} = ?$
- $x_i > 0$, $\displaystyle\sum_i \frac{x_i}{1+x_i} = 1 \quad \max \{ \prod x_i \}$
- Dato $x > 0$, determinare il min $n : \exists\, a_1, \dots, a_n \in (-1,1) :$ $\displaystyle\sum_i a_i = 0$, $\displaystyle\sum_i a_i^2 = x$
- $x_i > 0$, $\displaystyle\sum_{i<j} x_i x_j (x_i^2 + x_j^2) \leq C \left( \sum_i x_i \right)^4$, determinare $C$
- $x_1, \dots, x_{100} \geq 0$; $x_i + x_{i+1} + x_{i+2} \leq 1$; $\max \{ \sum_i x_i x_{i+2} \} = ?$
- $a_1, \dots, a_{100}$; $\displaystyle\sum_i a_i^2 = 1 \Rightarrow \sum_i a_i^2 a_{i+1} < \frac{\sqrt{2}}{3}$

- IMO 2012 - 2

$$\prod_{i=2}^{n} a_i = 1 \quad , \quad \prod (1+a_i)^i > n^n$$

Viene per induzione su $n$

P.I : $(1+a)^k \geq \frac{k^k}{(k-1)^{k-1}} a$

Sol 1: AM-GM pesata su 1 e $a$

$$\left(\frac{1+a}{k}\right) \geq \frac{1}{(k-1)^{\frac{k-1}{k}}} a^{\frac{1}{k}}$$

, uno trova i pesi $k-1$ , $1$

Sol 2: la funzione $f(a) = (1+a)^k - \frac{k^k}{(k-1)^{k-1}} a$

è continua e definita su $[0, +\infty)$

basta che sia definita su $[0, M]$

poi derivate e controllate 2 tipologie di punti per vedere dove sta il minimo
- il bordo $\{0, M\}$
- i punti : $f'(a) = 0$

oppure $f$ è convessa, e il minimo sta dove $f'(a) = 0$ oppure su un bordo

- $x_i \in [0,1]$ $\max \left\{ \sum_i \frac{x_i}{\prod_{j \neq i} x_j + 1} \right\}$

Oss: non c'è il vincolo!

Allora fissiamo tutte tranne 1 variabile e vediamo dove sta il massimo

Oss: è convessa come $f(x_k) = \sum_i \frac{x_i}{\prod_{j\neq i} x_j + 1}$

il massimo sta al bordo $\to x_k = 0, 1$

Ora basta verificare finiti casi cioè tutte le

Lì vedo che il massimo si ha con $x_1 = 0$
e $x_i = 1$ per $i > 1$

Altro approccio

Oss: $$\frac{x_i}{\prod_{j\neq i} x_j + 1} = \frac{x_i^2}{P + x_i} \quad \text{con } P = \prod_i x_i$$

Cerco di ricondurmi al caso

$$\sum a_i = C \qquad \max\left\{\sum f(a_i)\right\}$$

$x_i = e^{-a_i} \to$ cambio di variabile, $a_i \geq 0$

e viene che le $f$ sono convesse, quindi

applico Karamata wlog $a_1 \geq a_2 \dots \geq a_n$

$(a_1, a_2, \dots, a_n) \prec (-\log P, 0, \dots, 0)$

(Attenzione se qualche $x_i = 0$ )

Ho in mente di dimostrare $\sum \tilde{f}(x_i) \leq g(P)$

e poi trovare il max di $g$

distinguo i casi $P=0$ e $P>0$, in quest'ultimo

faccio Karamata sugli $a_i$

- $x_i > 0 \quad \sum_i \frac{1}{a+x_i} = \frac{1}{a}$ , $\min\{\prod x_i\} = ?$
- $x_i > 0 \quad \sum \frac{x_i}{1+x_i} = 1$ , $\max\{\prod x_i\} = ?$

(il secondo è molto simile al primo)

Oss: il vincolo fa schifo

Se il vincolo fa schifo, cambio variabili!

Sostituisco, $y_i = \frac{a}{a+x_i}$

ottengo $\sum y_i = 1$, $y_i > 0$ ; $x_i = \frac{a}{y_i} - a$

$\prod_{i=1}^{n} \left(\frac{a}{y_i} - a\right) \leftarrow$ voglio il minimo

sarei + contento se avessi
una somma di $f(y_i)$

$\rightarrow$ mi basta prendere il log (tanto è monotono)

Ora il problema è nella formulazione std per applicare Jensen–Karamata se avessi delle $f$ convesse o concave

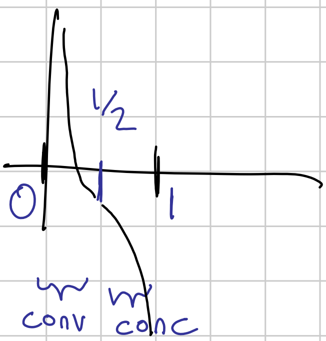
Però $f(y) = \ln\left(\frac{a}{y} - a\right)$ e non è convessa né concava!

[ C'è un criterio facile per le funzioni derivabili 2 volte: $f$ è convessa $\iff$ $f'' \geq 0$ dappertutto ]

In questo caso $f' = \dfrac{-\frac{1}{y^2}}{\frac{1}{y} - 1} = -\dfrac{1}{y - y^2}$

$$f'' = \frac{1 - 2y}{(\quad)^2}$$

$f'' > 0 \iff y \leq \frac{1}{2}$




Ora quasi tutte le variabili saranno $< \frac{1}{2}$

Prendo quelle e il minimo ce l'ho solo quando sono tutte uguali

Quindi ci sono 2 possibilità:

- tutte le $y_i \leq \frac{1}{2}$ $\to$ Jensen mi dice che il minimo è quando tutte sono uguali
- $y_1 > \frac{1}{2}$ e $y_i < \frac{1}{2}$ per $i > 1$ $\to$ $y_2 = \dots = y_n$

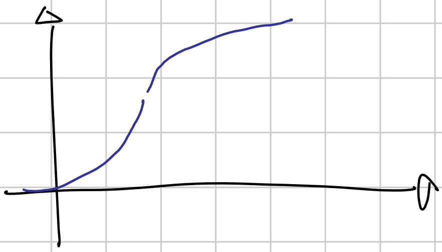
(Ancora per Jensen)

E ora ho una funzione nella sola $y_1$

perché $y_2 = \dots = y_n = \frac{1 - y_1}{n-1}$

Lemma Convex-Concave

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$



E volete

$\min \sum_i f(x_i)$

con vincolo $\sum x_i = C$

Ci sono 2 configurazioni che si giocano il minimo

- tutte le $x_i$ sono nella parte convex e sono =
- $x_1$ nella parte concave e le altre sono = e nella parte convex
- oppure qualcuna sta al bordo (non convex)

Idea della dimostrazione

- il minimo esiste (Weierstrass)
- prendo il minimo, allora

le $x_i$ della parte convex sono uguali, altrimenti per Jensen trovo un valore + piccolo

- Se ci fossero 2 variabili $(x_1, x_2)$ nella parte concave e $x_1, x_2 \neq a, b$ non avevo il minimo per Karamata


$(y_2, y_1) \succ (x_2, x_1)$

se non sono già al bordo

- Alla fine ce ne sarà qualcuna sul bordo, al massimo 1 sulla parte interna della zona concave e le altre uguali in quella convex

- Dato $x > 0$ trovare il min $n$ t.c. $\exists\, a_1, \dots, a_n \in (-1, 1)$ e t.c.

$$\sum a_i = 0 \qquad \sum a_i^2 = x$$

Il problema si può "ribaltare" cioè, dato $n$, quali sono gli $x$ che ottengo, in particolare mi interessa il max

Applico Karamata

$$(a_1, \dots, a_n) \prec (\qquad\qquad)$$

devo trovare chi è

per $n$ pari basta $(\underbrace{1,\dots,1}_{n/2},\underbrace{-1,\dots,-1}_{n/2})$

per $n$ dispari basta $(\underbrace{1,\dots,1}_{\frac{n-1}{2}},0,\underbrace{-1,\dots,-1}_{\frac{n-1}{2}})$

Ottengo che $\sum a_i^2 < n$ se $n$ pari

$< n-1$ se $n$ dispari

- $x_i > 0 \quad \sum_{i<j} x_i x_j (x_i^2 + x_j^2) \le C \left(\sum_i x_i\right)^4$

$C = \frac{1}{8}$ ( $x_i = 1$, $2\binom{n}{2} \le C\, n^4$ non funziona perché c'è un altro caso di uguaglianza )

Oss: è omogenea, posso semplificare a dx con un vincolo semplice $\sum x_i = 1$, ottengo

$$\sum_{i<j} x_i x_j (x_i^2 + x_j^2) \le C$$

Oss: la tes. è equivalente

$$\sum_i (x_i^3 - x_i^4) \le C$$

Qui ho finito.

Gli altri problemi per casa.

S15A-C2-Ludo

Titolo nota

Combinatoria geometrica

- Gli oggetti sono punti, rette, figure piane o solide (n-dim.)
- Le posizioni possono (a priori) variare con continuità

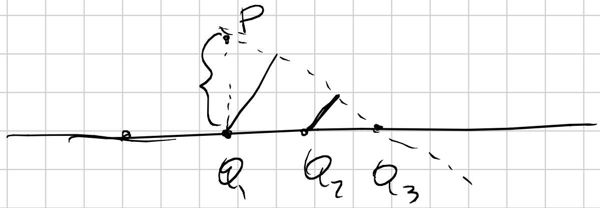
NO: scacchiere
grafi (in genere)
poligono regolare
giochi

$\mathbb{Z}^2, \mathbb{Z}^3$ (Comb. NSS ...)
sottoins.

Bulgaria 2013 min $S$ t.c. se coloro di tre colori $R, G, B$ i punti di $\mathbb{Z}^2$ $\exists$ sempre un triangolo monocromo di area $S$.

Teorema di Sylvester: se $S \subset \mathbb{R}^2$ finito t.c. $\forall$ coppia $P \neq Q \in S$ $\exists$ almeno $R \neq P, R \neq Q$ che appartiene a $S$ e alla retta $\overline{PQ}$, allora tutti i punti sono allineati.

<u>Dim.</u> $\exists \min \{ d(P, r) \mid P \in S, P \notin r, r$ passa per due punti di $S \}$




Allora o la proiez. di $P$ su $S$ $=$ $Q_1$ e dista da $\overline{PQ_2}$ meno di $d(P,r)$,

o da una parte ci sono 2 punti di $S$ $Q_2, Q_3$ e $Q_2$ dista da $\overline{PQ_3}$ meno di $d(P,r)$. $\square$

Teorema di Helly: se in $\mathbb{R}^2$ c'è una famiglia di (triangoli) convessi che si intersecano a 3 a 3, allora si intersecano tutti.
(se in $\mathbb{R}^n$ — — — a $n+1$ a $n+1$, allora si inters. tutti)

[Famiglia finita di $N \geq 3$ elementi]
Dim: Per induzione su $N$

$N=4$ $\quad S_1 \dots S_4$ $\quad I_k = S_1 \cap S_2 \cap S_3 \cap S_4$ (senza $S_k$) $= \bigcap_{i \neq k} S_i$

$I_k \neq \emptyset$ $\quad k = 1 \dots 4$, e $I_k$ convesso.

$P_k \in I_k$

$A \cap B = \emptyset$

Nei due casi $\exists$ $A, B$ t.c. $A \cup B = \{1,2,3,4\}$

t.c. $\text{hull}(P_k, k \in A) \cap \text{hull}(P_k, k \in B) \neq \emptyset$
$\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad \ni Q$

Dico che $Q \in S_1 \cap S_2 \cap S_3 \cap S_4$

Infatti $S_i \supset I_k \quad k \neq i \Rightarrow S_i \ni p_k \quad k \neq i$

Allora se $i \in A$, $S_i \ni p_k \quad k \in B$

quindi $S_i \supseteq \text{hull}\{p_k, k \in B\}$.

quindi $S_i \ni Q$. (così se $i \in B$).

Cioè $Q \in S_i \; \forall i$, o $Q \in \bigcap S_i$.

Passo induttivo: $S_i \quad i = 1 \dots N+1$

$T_i = S_i \quad i = 1 \dots N-1$ ora le ipotesi
$T_N = S_N \cap S_{N+1}$ valgono per $T_i$

(che ha $N$ elementi): sono convessi e

si intersecano a 3 a 3 (per ipotesi se nessun indice è $N$, per il passo base se c'è $T_N$).

$\square$

IMO 2011/2 (Windmill problem)

$|S| = n$ punti nel piano non 3 a 3 allineati

1) si sceglie una retta $\ell$ che passa per 1 e 1 solo punto $P_1$ di $S$
2) si ruota $\ell$ in senso orario attorno al punto $P_1$ finché non tocca un altro punto $P_2$
3) si ruota in senso orario attorno al punto $P_2$ finché ... $P_3$

:

Dimostrare che si può fare in modo che tutti i punti di S sia perno di rotazione infinite volte.

---

n punti bianchi e n punti neri nel piano, non a 3 a 3 all. Dimostrare che è poss. unirli con n segmenti con un estremo bianco e uno nero che non si intersecano.

---

BMO 2010/3 Ci sono n punti t.c. ogni triangolo

è contenuto in una striscia larga 1. Dim. che tutti i punti sono in una striscia larga 2.

---

n punti $P_i$ $d(P_i, P_j) \leq 1$. Allora stanno in un cerchio di Raggio $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

---

IMO 2013/2 4027 punti, non all. a 3 a 3. 2014 blu e 2013 rossi. Trovare il min num di rette necessarie perché con esse si possa separare il piano in regioni monocromatiche (o vuote)

RMM 2011/5 N punti t.c. $\forall p, q \in N$ esiste una permutazione $\sigma$ per cui $d(p, P_i) = d(q, P_{\sigma(i)})$ $\forall i$

Quali configurazioni?

RUS 2013 ... n rette (mai 2 a 2 //, mai incid. a 3 a 3) "in posizione generale"

Allora esiste una spezzata semplice aperta t.c. ha un (e 1 solo) segmento per ogni retta

ROM TST 2012

Trovare gli $S \subset \mathbb{R}$ finiti t.c. se $A, B, C, D \in S$ e $\overline{AB} \cap \overline{CD} = \{Z\}$, allora $Z \in S$.

segm. segm.

IRN 2011 TST n punti non tutti allineati, $\ell$ retta è <u>buona</u> se $\exists A, B$ t.c. $\sum_{i \in A} d(\ell, P_i) = \sum_{i \in B} d(\ell, P_i)$.

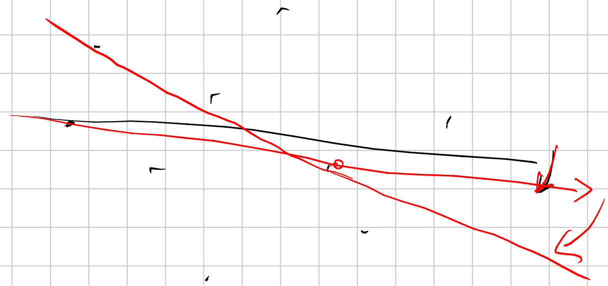
$A \cup B = \{1 \ldots n\}, A \cap B = \emptyset$

Dim che esistono infiniti punti per cui passano $n+1$ rette buone.

HKG 2008 2008 circ. $C_i$ congruenti e non tangenti, ogni $C_i$ interseca almeno 3 delle altre. Qual è il minimo numero di intersezioni totali?

AS-Pac. 2011 5 punti nel piano. Qual è il max del minimo degli angoli tra di loro?

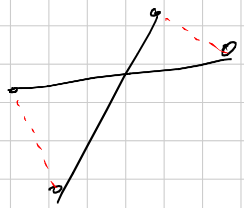
IMO 2011/2: I punti a dx e a sx della retta sono un invariante.



Scelgo una retta t.c. la diff. tra il # di punti dai due lati è 0 (caso disp.) o 1 (caso pari)

Ma perché la retta mantenga la proprietà e assuma tutte le direzioni, deve toccare tutti i punti, perché tra le rette parallele (non parallele a quelle passanti per 2 punti) solo quella che passa per uno dei punti dell'insieme può andare bene (e una andrà bene, perché la diff. è monotona).

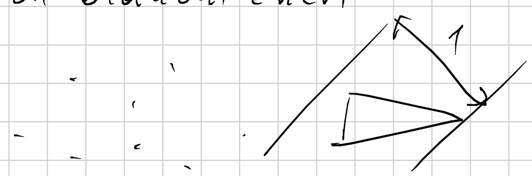
"n bianchi, n neri": cerchiamo una configurazione di segmenti per cui $\sum \ell(\text{segmenti})$ è minima. In questa i segmenti non si intersecano: per assurdo,



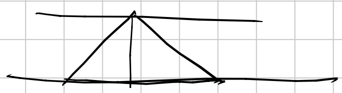
Per la dis. triangolare la somma dei due lati rossi è più piccola di quella dei lati neri

Forse dim. per induzione:

Scegliere una retta che divide in due gruppi $\neq \emptyset$ con uguale numero di bianchi e neri

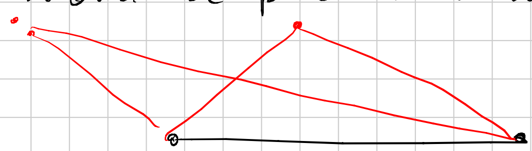



BMO 2010/3



Mi suona che 1 sia la massima altezza minima possibile

Ah! Ma allora se prendo i due punti più distanti,



qualunque 3° punto disterà meno di 1 da questa retta.

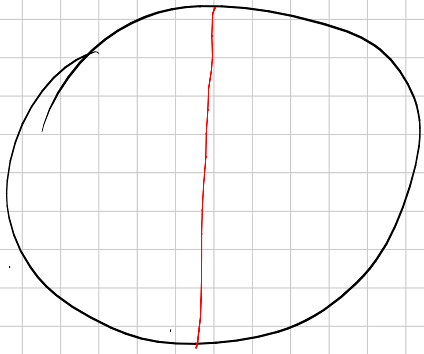
n punti con dist. $\leq 1$

dice Andrea:

posso supp. che

$C \supset$ tutti i punti

e ne tocchi 3



se $R_C \leq \frac{\sqrt{3}}{3}$ ok

i 3 punti formano un triangolo acutangolo

ottusangolo

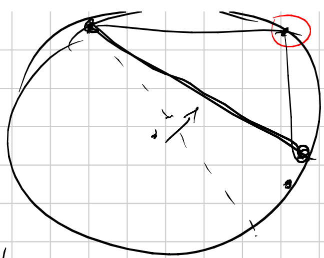
rettangolo? Viene $R_C = \frac{1}{2} < \frac{\sqrt{3}}{3}$

Ottusangolo:

Sposto il centro di $C$

verso il lato più lungo

e in un numero finito

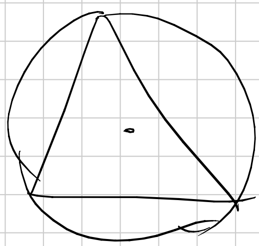


di passi trovo il triang. rettangolo o un triangolo

acutangolo.

Acutangolo:

$2R = \frac{a}{\sin \alpha}$

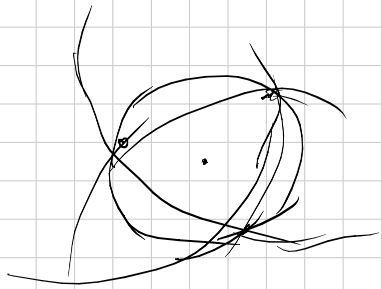


$a$ lato + lungo

$\alpha \geq 60°$

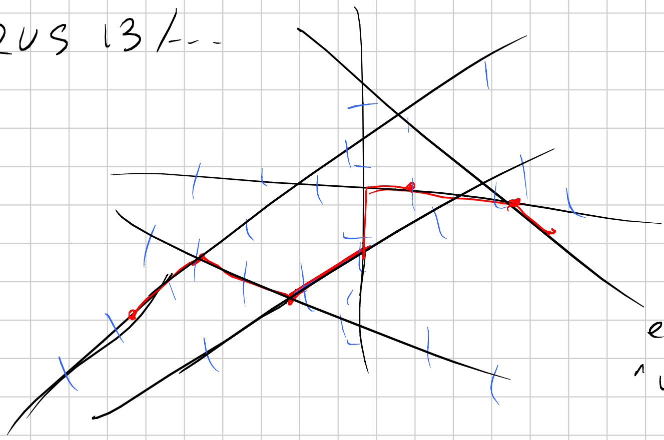
$\sin\alpha \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\qquad R \le \frac{a}{\sqrt{3}} \le \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

— x —

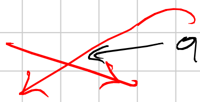


Se prendo 3 degli n punti, i cerchi di raggio $\frac{\sqrt{3}}{3}$ centrati in loro si intersecano.
Per il teo. di Helly, allora, si intersecano tutti $\Rightarrow$ un punto dell'intersezione va bene come centro.

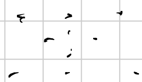
RUS 13/...



Parto da un punto a caso, cammino fino all'incrocio più vicino e cancello la retta usata.

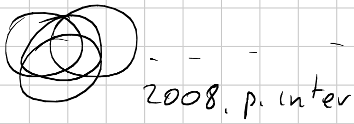
Non posso intersecarmi per la costruzione: se  questa sarebbe stato l'incrocio più vicino.

ROM 2012 TST: Si fa per casi



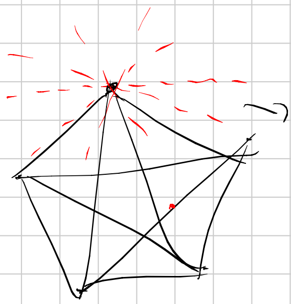
IRN 2011 Hint: per il baricentro passano infinite rette buone.
↳ degli $n$ punti

HKG 2008 Hint: dare a ciascun punto di intersez. fra $k$ circonf. "peso" $\frac{1}{k}$.

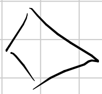


2008 p. inters.

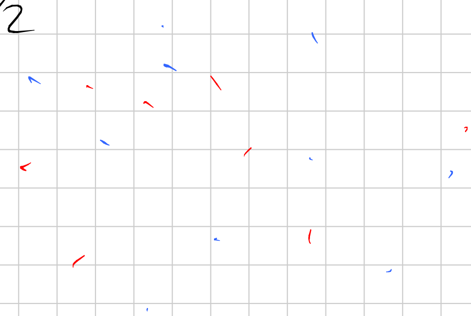
As-Pac 2011:



→ 10 angoli, uno è $\leq 36°$.

(Poi 2 casi per inv. conv. = △ o )

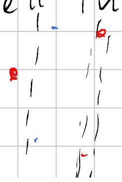
IMO 2013/2



Dim. Induzione. 2014 blu:

dico che la risp. è 2013 ($k$ blu e $k$ rossi → $k$.)

Nell'invil. convesso c'è un rosso



allora con 1 retta lo separo dagli altri

Poi con 1006 coppie di rette molto vicine separo 1006 coppie di punti rossi, → 2013

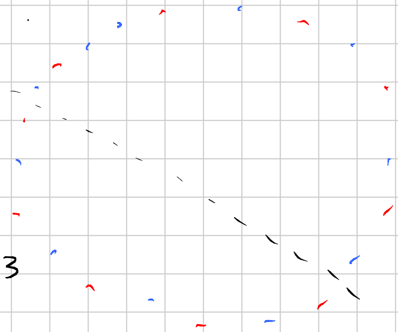
Se l'invil. conv. è blu

uso poi 1006 coppie di rette per 1006 coppie di punti blu.

~~2n-2 blu e 2n-1 rossi →~~

~~scambio rosso e blu~~

~~e uso 2012 rette~~



Servono 2013?

4026 lati da cui passare, 1 retta ne sistema $\leq 2$ $\Rightarrow \geq 2013$

RMM 2011/5

Tutti i punti stanno su una stessa circonferenza, con centro nel baricentro.

$$|P-P_j|^2 = |Q-P_{\sigma(j)}|^2$$

$$\sum_j (P-P_j, P-P_j) =$$

$G = 0$

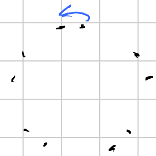
$$= (n-1)|P|^2 - 2\cancel{P\cdot\sum P_j} + \sum P_j^2 =$$

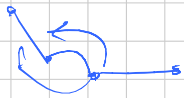
$$= \sum_j |Q-P_{\sigma(j)}|^2 = (n-1)|Q|^2 - 2\cancel{Q\sum P_{\sigma(j)}} + \sum P_{\sigma(j)}^2$$

$$n|P|^2 = n|Q|^2$$

Caso disp. $\Rightarrow$ pol. regolare

Caso pari $\Rightarrow$ pol. reg. o





# G1. Advanced LucaMac

Titolo nota 02/09/2015

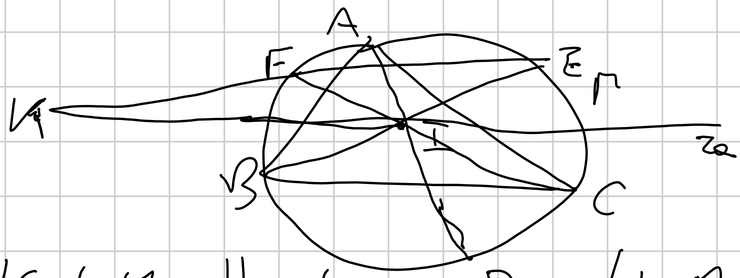
Parallele: data una retta ed un punto trovare la parallela a tale retta per il dato punto.

$x+y+z=0$

$A, B, C$ $\quad C_\infty \in AB$ $\quad CC_\infty$

$AB: ux+vy+wz=0$ $\quad x+y+z=0$

Esercizio BMO 2015.2




$K, L, M$ allineati (L, M analogamente definiti)

Sol $ABC$

$I=(a,b,c)$

$\Gamma: a^2yz+b^2xz+c^2xy=0$

$AI: \det\begin{pmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 0 \\ a & b & c \end{pmatrix}=0$ $\quad AI: yc-zb=0$

$a^2cy^2+b^2cxy+c^2bxy=0$

$a^2y+b^2x+bcx=0$

$D=(-a^2, b(b+c), c(b+c))$

$E=(a(a+c), -b^2, c(a+c))$

$F=(a(a+b), b(a+b), -c^2)$

$BC: x=0$ $\quad x+y+z=0$

$A_\infty=(0,1,-1)$

$r_a: x(b+c)-ya-za=0$

$EF: -xbc + yc(a+c) + zb(a+b) = 0$

$K = (a(b-c), b^2, -c^2)$

$L = (-a^2, b(c-a), c^2)$

$M = (a^2, -b^2, c(a-b))$

$$\det\begin{pmatrix} a(b-c) & b^2 & -c^2 \\ -a^2 & b(c-a) & c^2 \\ a^2 & -b^2 & c(a-b) \end{pmatrix} \stackrel{?}{=} 0$$

$$(b-c)(c-a)(a-b) \stackrel{?}{=} \sum_{cyc} bc(c-b)$$

$$\sum_{cyc} bc^2 - \sum_{cyc} b^2c \stackrel{?}{=} \sum_{cyc} bc^2 - \sum_{cyc} b^2c$$

$P = (\alpha, \beta, \gamma) \qquad Q = \left(\frac{a^2}{\alpha}, \frac{b^2}{\beta}, \frac{c^2}{\gamma}\right)$ Coniugato Isogonale!!

$P = (\alpha_1, \beta_1, \gamma_1) \quad Q = (\alpha_2, \beta_2, \gamma_2) \qquad \alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 = \alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 = 1$

$\vec{PQ} = (x_1, y_1, z_1) = (\alpha_2 - \alpha_1, \beta_2 - \beta_1, \gamma_2 - \gamma_1)$

$PQ^2 = -(a^2 y_1 z_1 + b^2 x_1 z_1 + c^2 x_1 y_1) \quad \leftarrow$

Dim

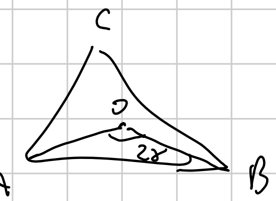
WLOG Origine in $O$ (circocentro)

$\vec{PQ} = x_1 \vec{A} + y_1 \vec{B} + z_1 \vec{C}$

$PQ^2 = \|(x_1\vec{A} + y_1\vec{B} + z_1\vec{C})(x_1\vec{A} + y_1\vec{B} + z_1\vec{C})\|$

$\|\vec{A}\cdot\vec{A}\| = R^2 \qquad \|\vec{A}\cdot\vec{B}\| = R^2 - \frac{c^2}{2}$

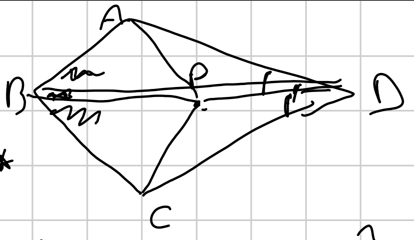
$x_1 + y_1 + z_1 = 0 \quad \left(\text{perché } \sum \alpha_1 = 1 = \sum \alpha_2\right)$




$$PQ^2 = R^2 \underbrace{(x_1 + y_1 + z_1)}_{=0}{}^2 - \sum_{cyc} c^2 x_1 y_1 = -\sum_{cyc} a^2 y_1 z_1$$

Esercizio IMO 2004.5

BD NON è bisettrice né di $A\hat{B}C$ né di $A\hat{D}C$ !! *




* BDP NON degenere!

$$P\hat{B}C = D\hat{B}A \qquad P\hat{D}C = B\hat{D}A$$

( A e C coniugati isogonali in PBD

ABCD ciclico $\overset{?}{\Longleftrightarrow}$ $AP = CP$

$PBD \quad (BD = a,\ PB = c,\ PD = b)$

$P = (1,0,0) \quad B = (0,1,0) \quad D = (0,0,1)$

$A = (\alpha, \beta, \gamma) \quad C = \left(\frac{a^2}{\alpha}, \frac{b^2}{\beta}, \frac{c^2}{\gamma}\right)$

$\Gamma: \sum_{cyc} a^2 yz = (x+y+z)(ux+vy+wz)$ per opportuni $u, v, w$

$B \Rightarrow v = 0$

$D \Rightarrow w = 0$

$A \Rightarrow \sum_{cyc} a^2\beta\gamma = \left(\sum_{cyc}\alpha\right) u\alpha \Rightarrow u = \dfrac{\sum_{cyc} a^2\beta\gamma}{\left(\sum \alpha\right)\alpha}$

$$a^2b^2c^2 \sum_{cyc} \frac{1}{\beta\gamma} = \left(\sum_{cyc} \frac{a^2}{\alpha}\right)\frac{a^2}{\alpha} u$$

$$\alpha b^2 c^2 \sum_{cyc} \alpha = \sum_{cyc} a^2\beta\gamma \cdot u$$

$$\boxed{\left[\sum_{cyc} a^2\beta\gamma\right]^2 = \alpha^2 b^2 c^2 \left(\sum_{cyc}\alpha\right)^2} \iff \text{ABCD ciclico!}$$

$P = (1,0,0)$

$$A = \left(\frac{\alpha}{\sum_{cyc}\alpha}, \frac{\beta}{\sum\alpha}, \frac{\gamma}{\sum\alpha}\right) \qquad C = \left(\frac{a^2}{\alpha\sum_{cyc}\frac{a^2}{\alpha}}, \frac{b^2}{\beta\sum\frac{a^2}{\alpha}}, \frac{c^2}{\gamma\left(\sum\frac{a^2}{\alpha}\right)}\right)$$

$$\vec{AP} = \left(\frac{\beta+\gamma}{\sum\alpha}, \frac{-\beta}{\sum\alpha}, \frac{-\gamma}{\sum\alpha}\right) \qquad \vec{CP} = \left(\frac{\frac{b^2}{\beta}+\frac{c^2}{\gamma}}{\sum\frac{a^2}{\alpha}}, -\frac{\frac{b^2}{\beta}}{\sum\frac{a^2}{\alpha}}, -\frac{\frac{c^2}{\gamma}}{\sum\frac{a^2}{\alpha}}\right)$$

$$\frac{1}{\left(\sum\alpha\right)^2}\left[a^2\beta\gamma - (\beta+\gamma)(c^2\beta + b^2\gamma)\right] = \frac{1}{\left(\sum\frac{a^2}{\alpha}\right)^2}\cdot\left[\frac{a^2b^2c^2}{\beta\gamma} - \left(\frac{b^2}{\beta}+\frac{c^2}{\gamma}\right)\cdot(b^2c^2)\left(\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}\right)\right]$$

$$\left(\sum \frac{a^2}{\alpha}\right)^2\left[a^2\beta\gamma-(\beta+\gamma)(c^2\beta+b^2\gamma)\right] = \left(\sum\alpha\right)^2\left[b^2c^2\right]\left[\frac{a^2}{\beta\gamma}-\left(\frac{b^2}{\beta}+\frac{c^2}{\gamma}\right)\left(\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}\right)\right]$$

$$\left[\sum a^2\beta\gamma\right]^2\overbrace{\left[a^2\beta\gamma-(\beta+\gamma)(c^2\beta+b^2\gamma)\right]}^{\neq 0} = \left(\sum\alpha\right)^2 b^2c^2\alpha^2\cdot\left[a^2\beta\gamma-(\beta+\gamma)(b^2\gamma+c^2\beta)\right]$$

$$\left(\sum a^2\beta\gamma\right)^2=\left(\sum\alpha\right)^2 b^2c^2\alpha^2 \iff AP=CP$$

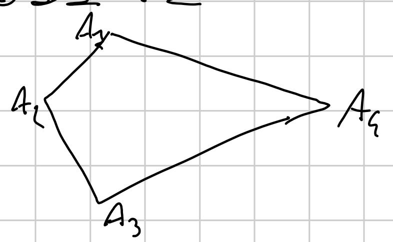
Fine!

Potenze:

$$Pot_P(\Gamma) = OP^2-R^2 = -\sum a^2yz - R^2 = -\sum a^2yz+\left(\sum x\right)\left(\sum ux\right).$$

Es IMO SL 2011 G2

NON ciclico!




$O_1, r_1$
centro e raggio di
$\odot A_2A_3A_4=\Gamma_1$
e cyc

$$\sum_{i=1}^{4} \frac{1}{O_iA_i^2-r_i^2} \overset{?}{=} 0$$

$$\sum_{i=1}^{4} \frac{1}{Pot_{A_i}(\Gamma_i)}$$

$A_1A_2A_3$ $\quad A_2A_3=a \quad A_1A_3=b \quad A_1A_2=c$

$A_4=(\alpha,\beta,\gamma)$ $\quad \sum a^2\beta\gamma\neq 0$

$$\Gamma_4: -\sum a^2yz=0$$

$$Pot_{A_4}(\Gamma_4) = -\frac{\sum a^2\beta\gamma}{\left(\sum\alpha\right)^2}$$

$$\Gamma_3: -\sum a^2yz+(x+y+z)(wz)=0$$

$$-\sum a^2\beta\gamma+\left(\sum\alpha\right)\gamma w \qquad w=\frac{\sum a^2\beta\gamma}{\gamma\sum\alpha}$$

$$Pot_{A_3}(\Gamma_3)=\frac{\sum a^2\beta\gamma}{\gamma\sum\alpha}$$

$$Pot_{A_2}(\Gamma_2)=\frac{\sum a^2\beta\gamma}{\beta\sum\alpha} \qquad Pot_{A_1}(\Gamma_1)=\frac{\sum a^2\beta\gamma}{\alpha\sum\alpha}$$

$$-\frac{(\sum\alpha)^2}{\sum a^2\beta\gamma} + \sum\left(\alpha\ \frac{\sum\alpha}{\sum a^2\beta\gamma}\right) \overset{?}{=} 0$$

$$-\frac{(\sum\alpha)^2}{\sum a^2\beta\gamma} + \frac{(\sum\alpha)^2}{\sum a^2\beta\gamma} \overset{?}{=} 0 \quad \text{vero!}$$

Parallele o Perpendicolari:

$\vec{PQ} = (x_1, y_1, z_1)$ $\quad \vec{RS} = (x_2, y_2, z_2)$ $\quad x_1+y_1+z_1 =$
$= x_2+y_2+z_2 = 0$

$PQ \perp RS \iff T = \sum_{cyc} a^2(y_1 z_2 + y_2 z_1) = 0$

Non c'è bisogno però che sia $x_1+y_1+z_1$ che $x_2+y_2+z_2$ siano 0! Ne basta 1.

$PQ \perp RS \iff (x_1\vec{A} + y_1\vec{B} + z_1\vec{C})(x_2\vec{A} + y_2\vec{B} + z_2\vec{C}) = 0$

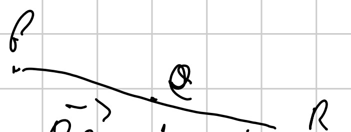
wlog origine in O! $\quad R^2(x_1+y_1+z_1)(x_2+y_2+z_2) - \frac{T}{2} = 0$.

es1

wlog origine in O! $\quad \vec{H} = (1,1,1) = \vec{A} + \vec{B} + \vec{C}$

$\vec{M} = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$

$\vec{MH} = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1) = (1, 1, 2)$

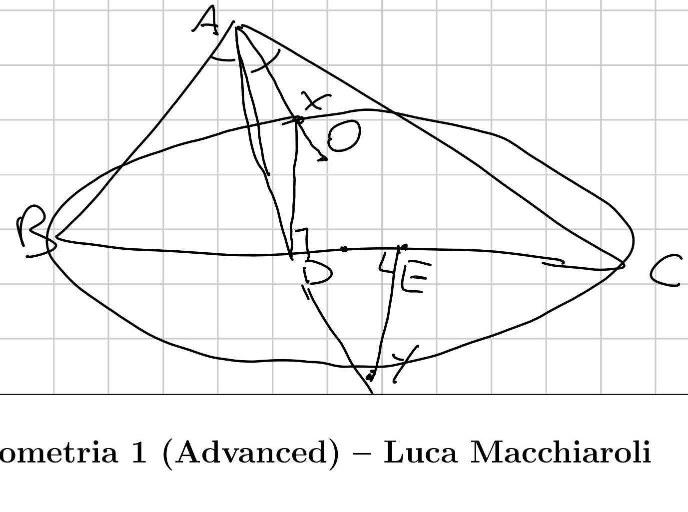



$\vec{PQ} = k\vec{PR}$

$PQ \perp ST \iff PR \perp ST$

Esercizio IMO SL 2012 G4

$AB \neq AC$



$O=(a^2S_A,\ b^2S_B,\ c^2S_C)$ $\qquad S_A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2}$ e cyc

$D=(0,b,c)$

$M=(0,1,1)$ $\qquad$ Con somme finale $\dfrac{E+D}{2}=M$

$E=(0,c,b)$

$AD:\ yc-zb=0 \qquad AO:\ yc^2S_C-zb^2S_B=0$

$H_A=(0,S_C,S_B) \qquad AH_A:\ yS_B-zS_C=0 \qquad AH_A /\!/ DX /\!/ EY$

$R=(-a^2,S_C,S_B) \qquad x+y+z=0$

$$DX:\ \det\begin{pmatrix} x & y & z\\ 0 & b & c\\ -a^2 & S_C & S_B\end{pmatrix}=0$$

$$DX:\ x(bS_B-cS_C)-ya^2c+za^2b=0$$

$$EY:\ \det\begin{pmatrix} x & y & z\\ 0 & c & b\\ -a^2 & S_C & S_B\end{pmatrix}=0$$

$$EY:\ x(cS_B-bS_C)-ya^2b+za^2c=0$$

$$X=(a^2bc,\ b^2S_B,\ c^2S_C)$$

$$Y=\left(-2a^2(b+c),\ b\left((b+c)^2+a^2\right),\ c\left((b+c)^2+a^2\right)\right)$$

$\Gamma$

$B\in\Gamma \Rightarrow v=0 \qquad C\in\Gamma \Rightarrow w=0$

$$\sum a^2yz=\left(\sum x\right)ux$$

$$\cancel{a^2}b^2c^2\left[S_BS_C+a^2bc\right]=\left(a^2bc+b^2S_B+c^2S_C\right)\cancel{a^2bc}\,u$$

$$u=\frac{(S_BS_C+a^2bc)bc}{a^2bc+b^2S_B+c^2S_C}=\frac{bc\left((b+c)^2+a^2\right)}{2(b+c)^2}$$

$$a^2bc\left((b+c)^2+a^2\right)^{\cancel{2}}-2a^2(b+c)\left[bc^2\left(\cancel{(b+c)^2+a^2}\right)+b^2c\left(\cancel{(b+c)^2+a^2}\right)\right]=$$

$$\stackrel{?}{=}\cancel{(b+c)}\left((b+c)^2-a^2\right)\left(-\cancel{2}a^2\cancel{(b+c)}\right)\frac{bc\cancel{\left((b+c)^2+a^2\right)}}{\cancel{2(b+c)^2}}$$

$$a^2bc\left[\cancel{(b+c)^2}+a^2-\cancel{2}(b+c)^2\right]\stackrel{?}{=}-\left((b+c)^2-a^2\right)bca^2$$

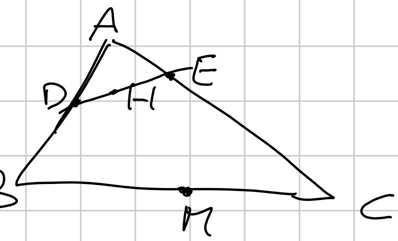
VERO!

Es IMO SL 2005 G5

$AB \neq AC$

$AD = AE$

$D, H, E$ allineati




$HM \perp$ asse radicale tra $\odot ABC$ e $\odot ADE$.

$AD = AE = l$

$D = (c-l, l, 0) \quad E = (b-l, 0, l)$

$H = \left(\frac{1}{S_A}, \frac{1}{S_B}, \frac{1}{S_C}\right)$

$$\det\begin{pmatrix} c-l & l & 0 \\ b-l & 0 & l \\ 1/S_A & 1/S_B & 1/S_C \end{pmatrix} = 0$$

$l \neq 0 \quad l\left(\sum \frac{1}{S_A}\right) = \frac{b}{S_C} + \frac{c}{S_B}$

$$l = \frac{S_A(cS_C + bS_B)}{\sum S_A S_B} = \frac{(b^2+c^2-a^2)(c(a^2+b^2-c^2)+b(a^2+c^2-b^2))}{(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)}$$

$$l = \frac{(b^2+c^2-a^2)(b+c)}{(a+b+c)(b+c-a)}$$

$\Gamma : \odot ADE$

$u = 0 \quad \sum a^2 yz = \left(\sum x\right)(vy + wz)$

$c^2 l(c-l) = \cancel{c}(v)\cancel{l} \quad v = c(c-l)$

$w = b(b-l)$

$\tau : c(c-l)y + b(b-l)z = 0 \quad A \in \tau$

$P = (0, b(b-l), -c(c-l))$

$\vec{AP} = (c(c-l) - b(b-l), b(b-l), -c(c-l))$

Come trovato sopra (scambio A con C)

$\vec{MH} = (2,1,1)$

$$a^2(b(b-l) - c(c-l)) - b^2(c(c-l) + b(b-l)) + c^2(c(c-l) + b(b-l)) \overset{?}{=} 0$$

$$b(b-\ell)\left[a^2+c^2-b^2\right] \stackrel{?}{=} c(c-\ell)\left[a^2+b^2-c^2\right]$$

$$b-\ell = \frac{c(a^2+b^2-c^2)}{(a+b+c)(b+c-a)} \qquad c-\ell = \frac{b(a^2+c^2-b^2)}{(a+b+c)(b+c-a)}$$

Ok fine!

---

Poli e Polari

data un circonferenza ed un punto su di essa la tangente in quel punto si trova con la formula dello sdoppiamento

Se faccio, invece, sdoppiamento su un qualsiasi punto del piano ottengo la polare di quel punto.

$$\Gamma : \sum_{cyc} a^2 yz = \left(\sum x\right)\left(\sum ux\right) \qquad P(x_0, y_0, z_0)$$

$$= \sum ux^2 + \sum (u+v)xy$$

$Pol_\Gamma(P)$:

$$\sum_{cyc} a^2 \frac{y_0 z + y z_0}{2} = \sum u x_0 x + \sum (u+v) \frac{x y_0 + x_0 y}{2}$$

$\Gamma$ è la circoscritta ad $ABC$!

$$\sum_{cyc} a^2 (y_0 z + y z_0) = 0$$

$$\sum_{cyc} x\left(c^2 y_0 + b^2 z_0\right) = 0$$

$$\tau : ux + vy + wz = 0$$

$$\begin{array}{ll} a^2 & c^2 y_0 + b^2 z_0 = u \qquad (1) \\ b^2 & c^2 x_0 + a^2 z_0 = v \qquad (2) \\ c^2 & a^2 y_0 + b^2 x_0 = w \qquad (3) \end{array}$$

$$(2)+(3)-(1) \qquad 2b^2c^2 x_0 = \frac{c^2 w + b^2 v + u a^2}{1}$$

$$x_0 = \frac{c^2 w + b^2 v - a^2 u}{2b^2c^2}$$

$$\mathrm{Pol}_\Gamma(\tau) = \left(\frac{c^2w+b^2v-a^2u}{2b^2c^2}, \frac{c^2w+a^2v-b^2v}{2a^2c^2}, \frac{a^2u+b^2v-c^2w}{2a^2b^2}\right)$$

$$= \left(a^2(c^2w+b^2v-a^2u), b^2(c^2w+a^2v-b^2v), c^2(a^2u+b^2v-c^2w)\right)$$

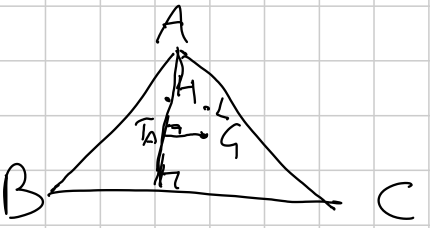
---

Baricentriche + "Bunching and Schur"

Trovare la circonferenza per 3 punti / di diametro 2 in modo furbo.

<u>Esercizio</u> G baricentro, H ortocentro, L lemoine. Dimostrare che L è interno alla circonferenza di diametro GH.

<u>Soluzione</u>




Diametro GH $\Rightarrow$ Trovare altri punti sulla circonferenza.

$G\hat{P}H = 90°$ $\quad T_A$ proiezione di G su AH

$GT_A \perp AH \iff GT_A \parallel BC$

$T_B, T_C$ analogamente

Vogliamo $\odot T_AT_BT_C$

$A_\infty$ il pt all'infinito della retta BC $\quad A_\infty = (0,-1,1)$

$AH: yS_B - zS_C = 0 \qquad G = (1,1,1)$

$$GT_A: \det\begin{pmatrix} x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = 0$$

$GT_A: 2x = y+z \qquad \alpha = S_A \quad \beta = S_B \quad \gamma = S_C$

$T_A = (a^2, 2S_C, 2S_B) = (\beta+\gamma, 2\gamma, 2\beta)$

$\sum a^2 yz = (\sum x)(\sum ux) \qquad T_B = (2\gamma, \alpha+\gamma, 2\alpha)$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad T_C = (2\beta, 2\alpha, \alpha+\beta)$

$\sum(\beta+\gamma)yz = (\sum x)(\sum ux)$

$$4(\cancel{\beta+\gamma})\beta\gamma + 2(\alpha+\gamma)(\cancel{\beta+\gamma})\beta + 2(\alpha+\beta)(\cancel{\beta+\gamma})\gamma$$
$$=$$
$$3(\cancel{\beta+\gamma})(u(\beta+\gamma)+2v\gamma+2w\beta)$$

$\beta+\gamma = a^2 > 0$

$$2(\alpha\beta+\alpha\gamma+4\beta\gamma) = 3(u(\beta+\gamma)+2v\gamma+2w\beta) \quad (1)$$

e cyc

Ma non voglio ~~risolvere~~ il sistema....

OSS La circonferenza per $T_A, T_B, T_C$ è unica! Allora $u, v, w$ son unici

OSS $u, v, w$ DEVONO essere simmetrici.

OSS $u, v, w$ hanno grado 1 (in $\alpha, \beta, \gamma$)

$u = n\alpha + m\beta + m\gamma \quad v = m\alpha + n\beta + m\gamma \quad w = m\alpha + m\beta + n\gamma$

Coeff $\alpha\beta$ in (1)

$$2 = 3n + 6m$$

Coeff $\beta\gamma$ in (1)

$$8 = 6m + 12n$$

$$9n = 6 \quad n = \frac{2}{3} \quad m = 0$$

$u = \frac{2}{3}\alpha \quad v = \frac{2}{3}\beta \quad w = \frac{2}{3}\gamma$ sono simmetrici $\Rightarrow$ visto che ne abbiamo che allora ne risolvono 3!

Ritorniamo a $S_A, S_B, S_C$!

$$\omega: -\sum a^2yz + \frac{2}{3}\left(\sum x\right)\left(\sum S_A x\right) = 0$$

Vogliamo $L = (a^2, b^2, c^2)$ interno ad $\omega$

Potenze non positive!

A meno di moltiplicare per $2(a^2+b^2+c^2)^2$ posso usarle anche NON normalizzate

$$-3a^2b^2c^2 + \frac{1}{3}\left(\sum a^2\right)\left(\sum a^2(b^2+c^2-a^2)\right) \overset{?}{\leq} 0$$

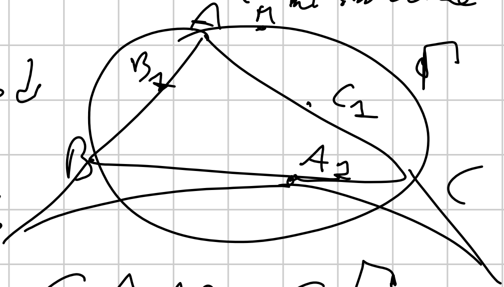
$$9a^2b^2c^2 \overset{?}{\geq} \left(\sum a^2\right)\left(2\sum a^2b^2 - \sum a^4\right)$$

$$9a^2b^2c^2 \overset{?}{\geq} 2\sum_s a^4b^2 + 6a^2b^2c^2 - \sum_s a^4b^2 - \sum_c a^6$$

$\sum a^6 + 3a^2b^2c^2 \geq \sum_S a^4b^2$

SCHUR su $(a^2, b^2, c^2)$ quindi vera!!!

Es IMO 2013.3 (Con un (abbastanza grande) conto ma sintetico)



Se circocentro di $A_1B_1C_1 \in \Gamma$ allora $ABC$ è rettangolo

$\triangle A_1B_1C_1 \subseteq \triangle ABC \subseteq \Gamma$

Circocentro di $A_1B_1C_1$ è esterno al triangolo $\Rightarrow$ ottusangolo

WLOG $B_1\widehat{A_1}C_1 > 90°$

Il centro è sull'arco $\widehat{BC}$ contenente $A$.

$M$ pt medio di tale arco

$BB_1M \cong CC_1M$ (segmenti e angoli)

$MB_1 = MC_1$ ed esiste un unico punto su tale arco $\widehat{BC}$ tale che

$PB_1 = PC_1$

$M$ è il centro

Sia $A_2$ il punto il l'inscritta tange $BC$

$BA_1M \cong CA_2M \Rightarrow A_1M = A_2M$

$B_1M = C_1M = A_1M = A_2M$

$A_1, B_1, C_1, A_2$ è ciclico!

se $b = c$ il problema si conclude facilmente notando che $A \equiv M$!

se $b \neq c$

Baricentriche! $ABC$ riferimento

$B_1 = (b+c-a, 0, a+b-c)$ $C_1 = (b+c-a, a+c-b, 0)$

$A_1 = (0, a+c-b, a+b-c)$ $A_2 = (0, a+b-c, a+c-b)$

(Centri di segmenti)!

$\sum a^2yz = (\sum x)(\sum ux)$

per $A_1$ e $A_2$ LHS sono uguali.

$\forall b \neq c$ $\quad v(a+c-b) + w(a+b-c) = v(a+b-c) + w(a+c-b)$

$\Downarrow b \neq c$

$v = w = \frac{(a+c-b)(a+b-c)}{4}$

$b(b+c-a)(a+b-c) = 2b\left[v(b+c-a) + \frac{(a+b-c)^2(a+c-b)}{4}\right]$

per simmetria $c(b+c-a)(a+c-b) = 2\left[v(b+c-a) + \frac{(a+b-c)(a+c-b)^2}{4}\right]$

$2\frac{1}{4}(b+c-a)(ab+b^2-ac-c^2) = 2(a+b-c)(a+c-b)(b-c)$

$(b-c)(b^2+c^2-a^2) = 0$

$b \neq c \quad a^2 = b^2+c^2 \Rightarrow$ retto!

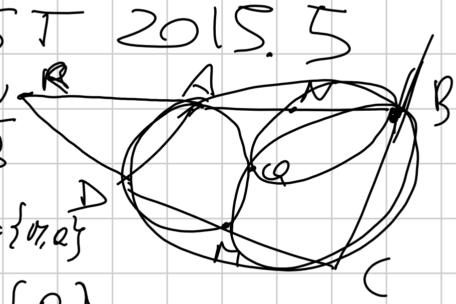
---

# Es BST 2015.5

$\frac{CM}{CD} = \frac{BN}{AB}$ $\qquad$ $\odot BNQ$ tange $BC$!

$ABCD$ ciclico

$\odot AMD \cap \odot BMC = \{M, Q\}$




$AB \cap CD = \{R\}$

(se sono parallele è all'infinito)

$RBC \quad BC = a \quad BR = c \quad CR = b \quad AB = \alpha \quad CD = \beta$

$BN = \varphi \quad CM = \gamma$

$A = (\alpha, c-\alpha, 0) \quad D = (\beta, 0, b-\beta) \quad N = (\varphi, c-\varphi, 0)$

$M = (\gamma, 0, b-\gamma)$

$\boxed{\alpha\gamma = \beta\varphi}$

$B \in \omega \Rightarrow v = 0$

$C \in \omega \Rightarrow w = 0$

$A \in \omega \Rightarrow c\alpha(c-\alpha) = \alpha u \qquad D \in \omega \Rightarrow u = b(b-\beta)$

$u = c(c-\alpha)$

$\boxed{c(c-\alpha) = b(b-\beta)}$

Le circonferenze $\odot ABCD$, $\odot ADM$, $\odot BCM$ hanno come assi radicali $AD, BC, MQ \Rightarrow$ concorrono

$AD: x(c-\alpha)(b-\beta) - y\alpha(b-\beta) - z\beta(c-\alpha) = 0$

$BC: x = 0$

$AD \cap BC = \{T\}$ $\quad T = (0, \beta(c-\alpha), -\alpha(b-\beta))$

$$MQ: \det\begin{pmatrix} x & y & z \\ \gamma & 0 & b-\gamma \\ 0 & \beta(c-\alpha) & -\alpha(b-\beta) \end{pmatrix} = 0$$

$$MQ: x\beta(c-\alpha)(b-\gamma) - y\alpha\gamma(b-\beta) - z\beta\gamma(c-\alpha) = 0$$

Se un punto diverso da $M$ si trova sia su $MQ$ che su $\odot BCM$ allora si trova $\odot ADM$.

$Q'$ tale che $\odot BNQ'$ tange $BC$

$Q' \in \odot BCM$

$\boxed{\text{Tesi} \iff Q' \in QM}$

Sia $\Gamma_T$ la circonferenza per $B, N$, che tange $BC$.

$B \in \Gamma_T \Rightarrow v = 0$

$$\sum a^2 yz = \left(\sum x\right)(ux + wz)$$

$$a^2 yz = (y+z)wz$$

ha una sola sol $\iff w = a^2$

perché $\quad w\left(\frac{z}{y}\right)^2 + w\frac{y}{z} - a^2\frac{y}{z} = 0$

$$\Delta = 0$$

$$(w - a^2)^2 = 0$$

$$w = a^2$$

$N \in \Gamma_T \quad c^2\varphi(c-\varphi) = \cancel{c}(\cancel{\varphi} v)$

$$v = c(c-\varphi)$$

$\odot BNQ': \sum a^2 yz = \left(\sum x\right)\left(za^2 + xc(c-\varphi)\right)$

$\odot BCM: \sum a^2 yz = \left(\sum x\right) b(b-\gamma) x$

sostituendo: $za^2 = x\left(b(b-\gamma) - c(c-\varphi)\right)$

$$a^2 y\left(x(b(b-\gamma) - c(c-\varphi))\right) + b^2 x(b(b-\gamma) - c(c-\varphi)) + a^2 c^2 xy$$

$$\overset{?}{=} b(b-\gamma)x\left[a^2 x + a^2 y + x(b(b-\gamma) - c(c-\varphi))\right]$$

$$(b(b-\gamma) - c(c-\varphi))(a^2 y + b\gamma x) + a^2 c^2 y = a^2(x+y)b(b-\gamma)$$

$$a^2 y\left[\cancel{b(b-\gamma)} - c(c-\varphi) + c^2 - \cancel{b(b-\gamma)}\right] = x[b]\left[a^2(b-\gamma) - b\gamma(b-\gamma) + c\gamma(c-\varphi)\right]$$

$$a^2 c\varphi\, y = x\, b\big((b-\gamma)(a^2-b\gamma)+c\gamma(c-\varphi)\big)$$

$$Q' = \big(a^2 c\varphi,\ b(c\gamma(c-\varphi) - b\gamma(b-\gamma)+a^2(b-\gamma)),\ c\varphi(b(b-\gamma)-c(c-\varphi))\big)$$

$$a^2 \cancel{c\varphi\beta}(\cancel{c-\alpha})(b-\gamma) - b\cancel{\alpha}\gamma(\cancel{b-\beta})\big(c\gamma(c-\varphi)-b\gamma(b-\gamma)+a^2(b-\gamma)\big) +$$

$$- \cancel{c\varphi\beta}\gamma(\cancel{c-\alpha})\big(b(b-\gamma)-c(c-\varphi)\big) \stackrel{?}{=} 0$$

$$a^2(b-\gamma) - c\gamma(c-\varphi) + b\gamma(b-\gamma) - a^2(b-\gamma) - b\gamma(b-\gamma) + c\gamma(c-\varphi) \stackrel{?}{=} 0$$

fine!!!

# G2 ADVANCED

Aner

Titolo nota 04/09/2015

1. **IMO 15/3** $ABC$ acutangolo, $AB > AC$. $\Gamma$ circoscritta al $ABC$, $H$ ortocentro, $Q$ su $\Gamma$ con $H\hat{Q}A = 90°$. $K$ su $\Gamma$ con $H\hat{K}Q = 90°$. Assumiamo $A, B, C, K, Q$ distinti e in quest'ordine su $\Gamma$. Allora le circoscritte a $KQH$ e $FKM$ si tangono, ove $F$ è il piede dell'altezza da $A$ e $M$ è il punto medio di $BC$.

2. **IMO 12/5** $ABC$ rettangolo in $C$. $D$ piede altezza da $C$. $X$ sul segmento $CD$. $K$ sul segmento $AX$ con $BK = BC$. $L$ sul segmento $BX$ con $AL = AC$. $M = AL \cap BK$. Allora $MK = ML$.

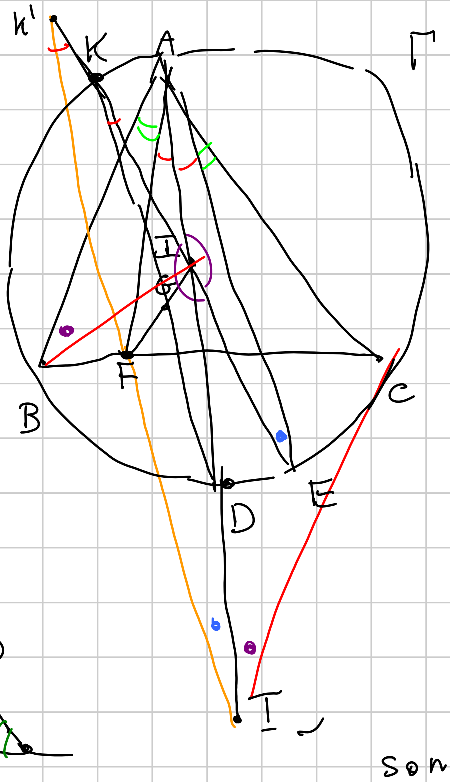
3. **IMO 10/2** $ABC$ con incentro $I$, $\Gamma$ circ. circoscritta. $AI \cap \Gamma = D$. $E$ sull'arco $\overset{\frown}{BDC}$, $F$ sul segmento $BC$, con $B\hat{A}F = E\hat{A}C < \frac{1}{2} B\hat{A}C$. $G$ pto medio di $IF$. Allora $DG \cap EI$ sta su $\Gamma$.

4. **RMM 13/3** $ABCD$ inscritto in $\omega$. $AB \cap CD = P$. $AD \cap BC = Q$. $AC \cap BD = R$. $M$ pto medio di $PQ$. $K$ è l'intersezione del segmento $MR$ con $\omega$. Allora cfr $(KPQ)$ e $\omega$ sono tangenti.

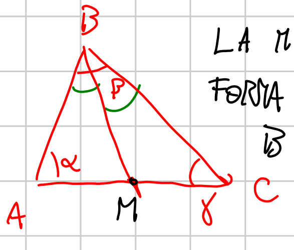
(5) RMM 12/6 potenziato   ABC triangolo, $I$ incentro, $O$ circocentro, $\omega$ circ. inscritta che tange i lati in $A_1, B_1, C_1$ ($A_1 \in BC$ etc.). $\omega_A$ è la cfr per $B$ e $C$ tangente a $\omega$ in $A_2$; $\omega_B$ e $\omega_C$ definite in modo analogo, così come $B_2$ e $C_2$. $A' = \omega_B \cap \omega_C$ diverso da $A_1$, $B', C'$ analoghi. Allora

$AA', BB', CC', \underbrace{A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2,}_{\text{potenziamento dell'originale}}$ $OI$ concorrenti

(3)



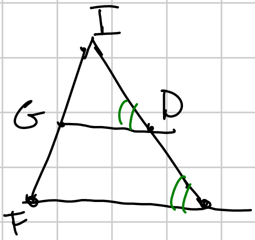

Tesi: $K \in \Gamma$




LA MEDIANA FORMA ANGOLI BRUTTI

$\Downarrow$

"I PUNTI MEDI" NON AIUTANO NELL'ANGLE CHASING




Fatto: $I, B, C, I_a$ sono su una cfr di centro $D$ con diametro $II_a$

Idea: procurarsi altri punti medi

Inversione risp. a $A$ con $R^2 = AB \cdot AC$ + simmetria risp. ad $AI$

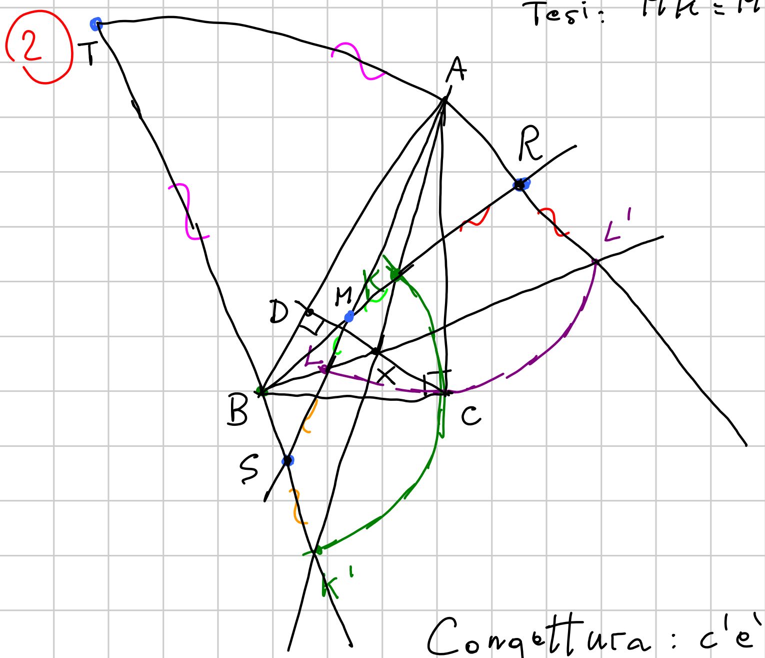
$\Gamma \leftrightarrow BC$ $B \leftrightarrow C$ $E \leftrightarrow F$

$I \leftrightarrow I_a$

$AIE \sim AFI_a$ e ora è fatta.

Tesi: $MK = ML$

2




Aggiungo $K', L'$ e gli analoghi di $M$, confidando che la tesi sia ancora vera

Nuova tesi:

$MK = ML$
$SK' = SL$
$RK = RL'$
$TK' = TL'$

Congettura: c'è addirittura una cfr tangente a $TS$ $\Pi R$ in $K, K', L, L'$.

Principio generale (Una retta interseca una cfr in 2 punti). Quando una costruzione geometrica prevede, passando in coordinate (es. cartesiane), la soluzione di un'equazione di 2° grado, è una buona idea considerarle entrambe insieme.

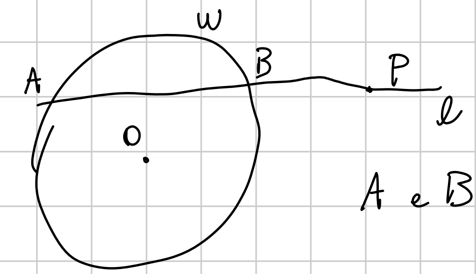
Motivo algebrico $x^2 + ax + b$ ha due soluzioni
$x_1 = \dfrac{-a + \sqrt{a^2 - 4b}}{2}$ $x_2 = \dfrac{-a - \sqrt{a^2 - 4b}}{2}$. Le espressioni contengono radicali e (probabilmente) non sono razionali = funzioni algebriche

Usarne una sola garantisce calcoli impestati.

Insieme invece $x_1$ e $x_2$ hanno buone proprietà: conosciamo la somma $-a$ e il prodotto $b$.

**Esempio geometrico**

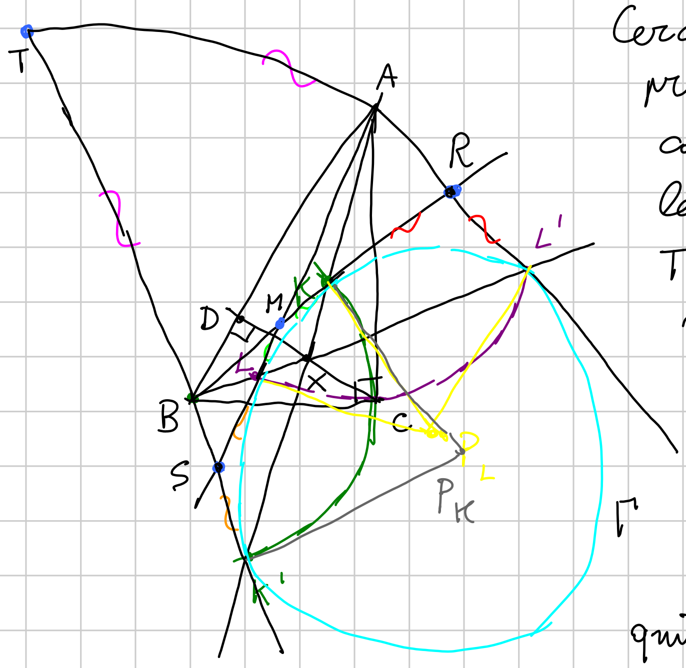
$\omega$ generica, $P$ generico, $l$ per $P$ generica




$l \cap \omega = \{A, B\}$

A e B hanno buone proprietà insieme

- Il pto medio di $AB$ è la proiez. di $O$ su $l$ (corrisponde alla somma)
- $PA \cdot PB = pow_\omega(P) = \underbrace{PO^2 - R^2}_{\text{“naturale”}}$ (corrisponde al prodotto)




Cerco il centro della presunta $\Gamma$ della congettura. Traccio le normali ai lati di $TRMS$ per $K, K', L, L'$

Uniamo $L$ e $L'$ perché soluzioni della stessa equazione di 2° grado trovo $P_L$

$AC^2 = AD \cdot AB$

quindi invertendo in $A$ con raggio $AC$

$B \leftrightarrow D \quad L \leftrightarrow L \quad C \leftrightarrow C \quad L' \leftrightarrow L'$

$B, L, L'$ allineati $\Rightarrow ADLL'$ ciclico

$\Rightarrow ADLL'P_L$ è ciclico. $A\hat{D}C = 90° = A\hat{L}P_L$

da cui $DC$ passa per $P_L$

Inoltre $AP_L \perp LL' = BX$

$P_L = CD \cap$ (ortogonale per $A$ a $BX$)

$P_K = CD \cap$ ( " " " , $B$ a $AX$)

$P_L = P_K$ = ortocentro di $ABX$. Lo chiamo $P = P_L = P_K$

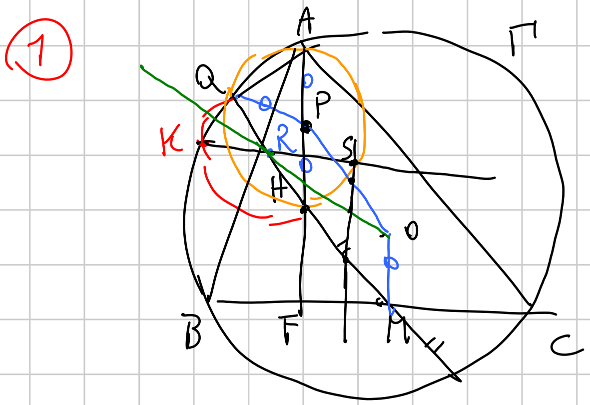
Ciò che so è che $PK = PK'$ e che $PL = PL'$

Si conclude con 2 osservazioni:

- Una sfera tangente da qualche parte a $MRTS$ esiste perché $TR - TS - SM + RM = 0$ perché?

Finire per casa

---




Fatto: $Q$ è allineato con $M$ e $H$ (angoli + argomenti di Feuerbach)

Sia $P$ medio di $AH$

$\boxed{\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{PH} = \overrightarrow{OM}}$ Fatto noto

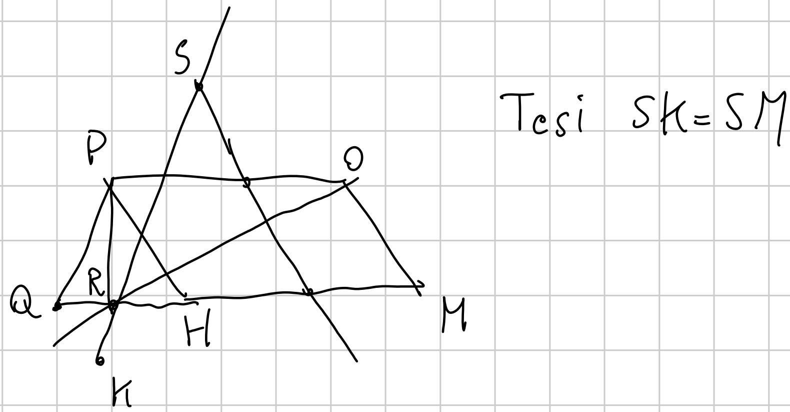
$Q$ = proiezione di $A$ su $HM$

R := pto medio di QH

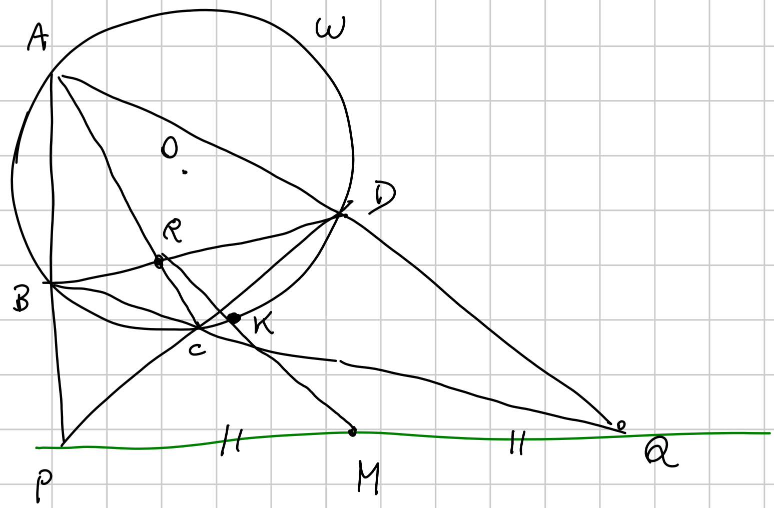
K = simmetrico di Q rispetto a OR

S : KR ∩ mediana di POMH (che è un parallelogramma)

Tesi: SK = SM




RMM 13/3




Tesi: cfr (PKQ) tange ω

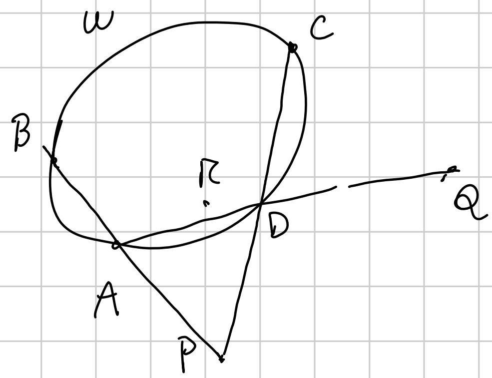
Fatto P = polo di RQ e cicliche

(Fatto O, P, Q, R è un sistema ortocentrico)

Viceversa, dati ω, P, Q, R con

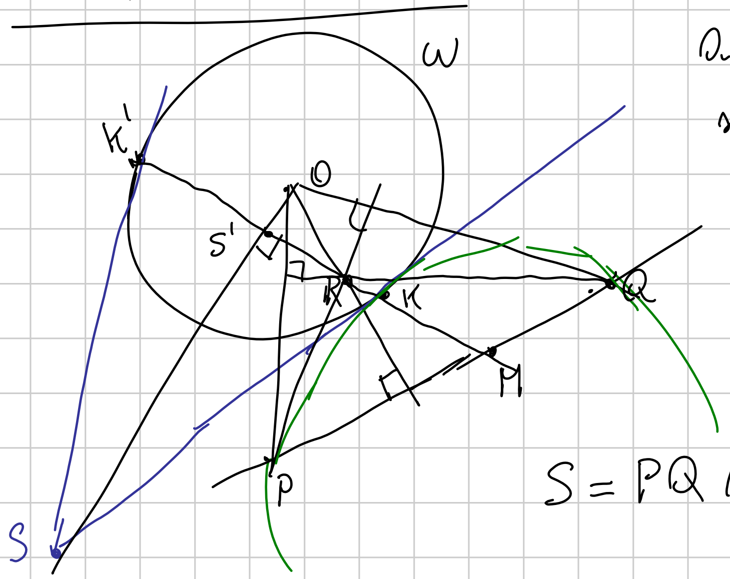
P = polo di RQ e cicliche, ∀ A ∈ ω si

può costruire $ABCD$ inscritto con lati e diagonali che si intersecano a coppie in $P, Q, R$




$AD \cap BC \in \mathrm{pol}\, P$

Morale: I punti $A, B, C, D$ sono pressoché inutili, visto che tutta la costruzione dipende da $P, Q, R, \omega$




Aggiungo $K'$, nello spirito di usare entrambe le intersezioni

$\mathrm{pol}(S) = KK' \ni R$

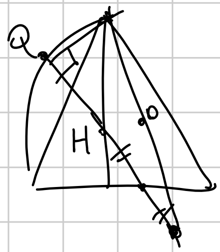
$S \in PQ = \mathrm{pol}(R)$

$S = PQ \cap (\text{perp per } O \text{ a } MR)$

proprietà dell'inversione

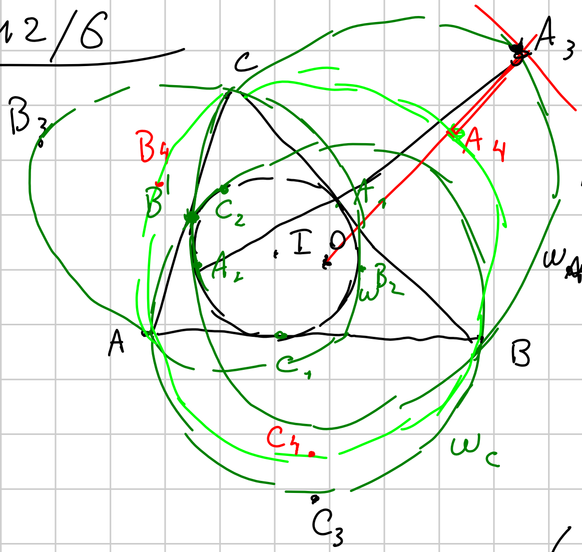
$SK^2 = SS' \cdot SO = SP \cdot SQ$

$OS'PQ$ è ciclico




$SK$ tange cfr $(PQK)$

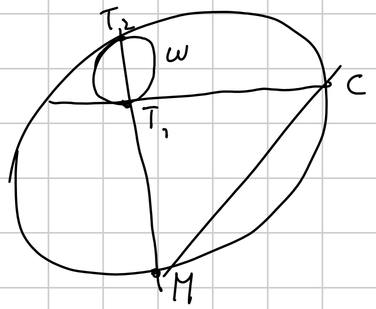
## RMM 12/6




$AA'$, $BB'$, $CC'$ concorrono nel centro radicale di $\omega_A, \omega_B, \omega_C$

$A_1 A_2 A_3$ sono allineati ($A_3$ è il pto medio dell'arco $BC$ in $\omega_A$)

## Fatto

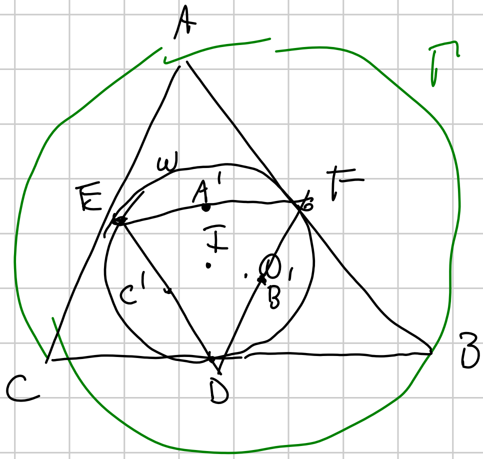



$pow_\omega(M) = MC^2$

**Fatto** C'è un inversione nel centro radicale (+ simmetria centrale) che lascia invariante $\omega_A, \omega_B, \omega_C$, e manda $A_2$ in $A_3$ se la tesi vuole essere vera. Se la tesi è vera per le prime 6 rette, cfr $\omega$ va in cfr$(A_3 B_3 C_3)$ che ha centro in O (facile verifica) ed è tangente a $\omega_A, \omega_B, \omega_C$.
Inoltre I non va in O, ma il centro dell'inversione è allineato con I e O, centri di $\omega$ e cfr$(A_3 B_3 C_3)$ rispettivamente.

$pow_w(A_3) = A_3C^2$

Esercizio




IO è la retta di Eulero di DEF

N 1 - ADVANCED Guido

Titolo nota 03/09/2015

$\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$, $\subseteq \mathbb{C}$

$A$ è dominio se $ab = ac$ e $a \neq 0$ $\Rightarrow b = c$

$A \ni u$ è unità se $\exists\, v \in A$ t.c. $u \cdot v = 1$

$\{\text{unità}\} = A^\times$

$\mathbb{Z}^\times = \{\pm 1\}$ $\mathbb{Q}^\times = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$

$\mathbb{Z}[i]$ "Interi di Gauss"

$\shortparallel$

$\{a+bi : a, b \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathbb{C}$

Per dire che è un anello abbiamo verificare che ( $0, 1 \in A$ ) è chiuso per

1 · opposto
2 · somma
3 · prodotto

$x \in \mathbb{Z}[i] \Longrightarrow -x \in \mathbb{Z}[i]$

1 ✓ $x = a+bi$ $\quad = -a + (-b)i$

2 : $x = a+bi$ $\quad y = c+di$ $\quad x+y \overset{?}{=} (a+c) + (b+d)i$

3 . " " $\quad x \cdot y = (ac - bd) + (bc + ad)i$

$\mathbb{Z}[i]^\times = ?$ $\quad \pm 1, \pm i$ $\quad (i)(-i) = 1$

$$(a+bi)(c+di) = 1 =$$


$$\begin{cases} ac - bd = 1 \\ ad + bc = 0 \end{cases}$$

$$x = a+bi \longrightarrow a^2+b^2 =: N(x)$$

$$N(xy) = N(x)\cdot N(y)$$

$$x \mid z \qquad z = xy \qquad N(z) = N(x)N(y)$$

$$\Rightarrow N(x) \mid N(z)$$

$\Rightarrow$ Se $u \in \mathbb{Z}[i]^\times$ $\quad N(u) \in \mathbb{Z}^\times$

$$u = a+ib \qquad a^2+b^2 = \pm 1 \qquad \begin{matrix} a = \pm 1 & b = 0 \\ a = 0 & b = \pm 1 \end{matrix}$$

$$D \in \mathbb{Z} \qquad D \neq \square$$

$$\mathbb{Z}[\sqrt{D}] = \{a + b\sqrt{D} : a,b \in \mathbb{Z}\}$$

$$\ni \quad (a+b\sqrt{D})(c+d\sqrt{D}) = (ac + bdD) + (ad+bc)\sqrt{D}$$

$$\cancel{\sqrt{\tfrac{i}{3}} \quad \tfrac{i}{3}}$$

[Esempio a parte $\left\{ a + b\frac{i}{3} \right\}$ non è un anello] ($a, b \in \mathbb{Z}$)

$$\frac{i}{3}\cdot\frac{i}{3} \notin$$

$$\mathbb{Z}[\sqrt{D}]^\times \ni \pm 1 \qquad D = 2$$

Cerchiamo un metodo per trovare $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]^*$

- $(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2}) = +1$

$a+b\sqrt{2}$ $\qquad (1+\sqrt{2})(1+\sqrt{2}) = 3+2\sqrt{2}$

- Idea generalizzare il concetto di Norma su $\mathbb{Z}[\sqrt{D}]$
- Definire un coniugio

$x \longmapsto \cancel{\;} \quad \varphi(x)$

Definiamo un coniugio $\varphi : \mathbb{Z}[\sqrt{D}] \to \mathbb{Z}[\sqrt{D}]$

$$a+b\sqrt{D} \longrightarrow a-b\sqrt{D}$$

1. $\varphi(x+y) = \varphi(x)+\varphi(y)$
2. $\varphi(x\cdot y) = \varphi(x)\cdot\varphi(y)$ $\qquad \varphi$ è omomorfismo

$x = a+b\sqrt{D}$ $\qquad y = c+d\sqrt{D}$ $\qquad x+y = (a+c)+(b+d)\sqrt{\;}$

$$\varphi(x+y) = (a+c)-(b+d)\sqrt{D}$$

$\varphi(x)+\varphi(y) = a-b\sqrt{D} + c - d\sqrt{D} \Rightarrow$

Definiamo $N(x)$ $\qquad x \in \mathbb{Z}[\sqrt{D}]$

$$x\cdot\varphi(x) = (a+b\sqrt{D})(a-b\sqrt{D}) = a^2 - Db^2$$

$x = a+b\sqrt{D}$

$$N(xy) = xy\,\varphi(xy) = x\,y\,\varphi(x)\,\varphi(y) = (x\varphi(x))(y\varphi(y))$$

$\mathbb{Z}[\sqrt{D}]^\times = a+b\sqrt{D} = u$

$N(u) = \pm 1 = u \cdot \sigma(u) = \pm 1$

le unità $\mathbb{Z}[\sqrt{D}] = \{ a + b\sqrt{D} : a, b \in \mathbb{Z} : a^2 - Db^2 = \pm 1 \}$

Se $D > 0 \to$ ci sono ricondotti alle equazioni di Pell

Se $D < 0 \to$ è una disfatta facile

$D = -1 \to$ fatto ✓

$D < -1$ $\mathbb{Z}[\sqrt{D}]^* = \{ \pm 1 \}$

---

Def A dominio

- $a \in A$ è irriducibile se non si può scrivere come $a = x \cdot y$ e $x, y$ non sono unità di $A$ e $a \notin A^\times$

- $a \in A$ è primo se $a \mid x \cdot y \Rightarrow a \mid x$ oppure $a \mid y$ e $a \notin A^\times$

primo $\Rightarrow$ irriducibile

$p = ab \Rightarrow p \mid a$ $\quad a = p \cdot c$

$\Rightarrow p = p \cdot cb$ $\quad c \cdot b = 1$

$A = \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ $\qquad a = 2$

- 2 è irrid $\qquad$ • ma 2 non è primo

Supponiamo $2 = a \cdot b \Rightarrow \underset{\substack{4 \\ 4}}{N(2)} = N(a) \cdot N(b)$

$N(a) = N(b) = 2 \qquad a = x + y\sqrt{-5}$

$x^2 + 5y^2 = 2$ $\qquad$ Ass!

$2 \mid 6 = (1+\sqrt{-5})(1-\sqrt{-5})$

$\frac{1+\sqrt{-5}}{2} \in A$ oppure $\frac{1-\sqrt{-5}}{2} \in A$

$\underset{4}{2} \cdot 3 = 6 = (1+\sqrt{-5})(1-\sqrt{-5})$

su $\mathbb{Z}$ vale

- ogni $n$ si può scrivere come prodotto di irrid e la scomposizione è unica (a meno di ordine e di unità)

Che succede su $\mathbb{Z}[\sqrt{D}]$ ?

$\alpha \in \mathbb{Z}[\sqrt{D}]$ $\qquad \alpha = x \cdot y$

$\cancel{p_1} \cdots p_n = \cancel{q_1} \cdots q_s\, u$

$p_1 \mid q_1 \qquad q_1 = p_1 \cdot x$

Se {primi} = {irred.} $\Leftrightarrow$ A è UFD

$x \mid ab \qquad xy = ab =$

$x(p_1 \cdots p_s) = (q_1 \cdots q_r)(t_1 \cdots t_\ell)$

WLOG $x = q_1 \cdot$ unità $\Rightarrow x \mid a$ .

$\mathbb{Z}[\sqrt{D}]$

- $\mathbb{Z}[i]$ è UFD

In generale

- $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$ è UFD

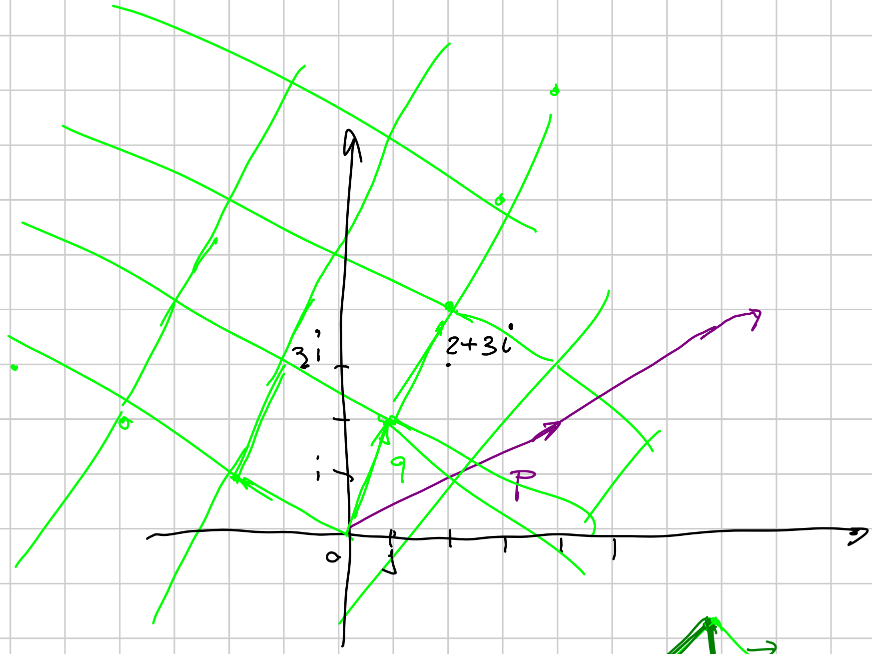
$\boxed{\text{TEO}}$

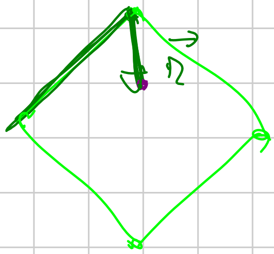
Tutti gli anelli con una divisione col resto sono UFD

Diciamo che su $A = \mathbb{Z}[\sqrt{D}]$ c'è la divisione col resto se

$\forall\, p, q \quad \exists\, r, d \quad p = q \cdot d + r$

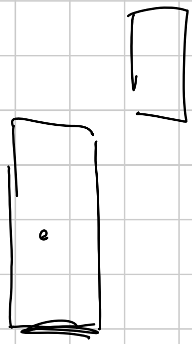
e $|N(r)| < |N(p)|$




$\exists\, d$

$p = r + q \cdot d$



Esercizio $\quad \mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$ è UFD

$\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$

2 è irriducibile ma non primo

$$2 \cdot 2 = 4 = 3 + 1 = 3 \cdot 1^2 + 1^2 = (1+\sqrt{-3})(1-\sqrt{-3})$$

Se $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$ forse UFD

$\omega \in \frac{1+\sqrt{-3}}{2} \quad \in_{\text{blue}} \quad \mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$

$B = \{a+b\omega : a,b \in \mathbb{Z}\} =$

$\omega^2 \in B \qquad \omega^2 = \omega - 1$

$(a+b\omega)(c+d\omega) = ac + bc\omega + ad\omega + bd\omega^2 =$

$(ac-bd) + (bc+ad+bd)\omega$

se $D \equiv 1 \ (4) \qquad D < 0$

2 non è primo

$2 \cdot 2 = D-1 = (\sqrt{D}-1)(\sqrt{D}+1)$

Se $D \equiv 1 \mod 4$

$\omega = \frac{\sqrt{D}-1}{2} \qquad$ ~~Bnuova~~ $B = \{a+b\omega : a,b \in \mathbb{Z}\}$

$\omega^2 = \frac{D+1}{4} - \frac{\sqrt{D}}{2} = -\frac{\sqrt{D}-1}{2} + \frac{D-1}{4} = \frac{D-1}{4} + \omega$

Se $D \equiv 1$ non ci conviene considerare $\mathbb{Z}[\sqrt{D}]$

$\mathbb{Z}\left[\frac{\sqrt{D}+1}{2}\right]$

$\hat{\imath}$

$a+b\omega \rightarrow a-b\omega \qquad x+y\sqrt{D}$

$(a+b\omega)(c+d\omega)$

$\mathcal{N}(\omega) = \omega(-\omega) = \omega^2 = \frac{D-1}{2} - \omega \in \mathbb{Z}$

$\omega = \frac{1+\sqrt{D}}{2} \longrightarrow \frac{1-\sqrt{D}}{2} = \overline{\omega}$

$\varphi(a+b\omega) \longrightarrow a+b\overline{\omega}$

$x\,\varphi(x)$

$A$ è un dominio euclideo se · è un dominio
se $\exists$ una funzione $\varphi: A\setminus\{0\} \longrightarrow \mathbb{Z}_{>0}$ t.c.
$\forall\ p, q \in A\setminus\{0\}$ $\exists\, d, r$ tali che
$p = qd + r$ e $\varphi(r) < \varphi(q)$

TEO Se $A$ è un dominio euclideo, allora vale il teo di fattorizzazione unica

---

Esercizio $x^2+1=y^p$ con $p$ numero primo

$x^2 = (y-1)(y^{p-1}+\dots+1)$

$(x+i)(x-i) = y^p$

$(x+i,\ x-i)$ MCD$(a,b)$ = MCD$(a, b-ka)$

MCD $(10, 16) = 2$ $2i$

$$(x+i, -2i) = (x+i, 2)$$

$$2 = (1+i)(1-i) = -i(1+i)^2$$

oss $1-i = -i(1+i)$

Per capire l'M.C.D (– –) dobbiamo capire se $x+i$ è multiplo di $1+i$

Se $x$ fosse pari M.C.D $= 1$

1) $(x, 1+i) \to (i, 1+i) = 1$

2) $N(x+i) = x^2+1$

1 (mod 2) $x+i \equiv 2m+i \equiv i \pmod{1+i}$

Se $x$ fosse dispari $x^2+1 \equiv 2 \pmod 4$

$\Rightarrow$ $x+i$ e $x-i$ sono coprimi

$$(x+i)(x-i) = y^p = \alpha_1^p \cdots \alpha_k^p$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+i = \alpha^p \cdot u \\ x-i = \beta^p \cdot v \end{cases} \qquad u = \pm 1, \pm i$$

$$\overline{x+i} = x-i$$

se $x+i = \alpha^p u \Rightarrow x-i = \overline{\alpha^p u} = \bar{\alpha}^p \cdot \bar{u}$

$p = 2 \longrightarrow x = \pm \quad y = 0$

$p > 2$ $\qquad -\alpha^p = (-\alpha)^p$

$$x + i = \alpha^p$$

$$x + i' = i'\alpha^p \qquad \alpha = a \pm i$$

$$\alpha = a + b i' \Rightarrow \alpha^p = \sum_{k=0}^{p} b^k i^k a^{p-k} \binom{p}{k} =$$

$$\underbrace{\sum_{\substack{k=0\\ k \text{ pari}}}^{p} b^k (-1)^{\frac{k}{2}} a^{p-k} \binom{p}{k}}_{\text{1 altro}} + \underbrace{\sum_{\substack{k=0\\ k \text{ dispari}}}^{p} b^k a^{p-k} (-1)^{\frac{k-1}{2}} i \binom{p}{k}}_{\text{intero} \cdot i}$$

$k = 2m+1$

$i^k = i(-1)^m$

$$= x + i'$$

$i'$

$$\sum_{\substack{k=0\\ k \text{ dispari}}}^{p} b^k (-1)^{\frac{k-1}{2}} a^{p-k} \binom{p}{k} = 1$$

$$= \underbrace{b\, a^{p-1} \binom{p}{1} - b^3 a^{p-3} \binom{p}{3} + \dots}_{\text{divid}} + \underbrace{b^p (-1)^{\frac{p-1}{2}}}_{\substack{\parallel\\ 1}} = 1$$

$b = \pm 1$

$$b^p (-1)^{\frac{p-1}{2}} = 1 \quad \begin{cases} (-1)^{\frac{p-1}{2}} \\ -(-1)^{\frac{p-1}{2}} \end{cases}$$

$$b = (-1)^{\frac{p-1}{2}}$$

$b = \dots$

$\pm \quad \underbrace{a^{p-1}\binom{p}{1} + a^{p-3}(\quad}\ + a^2\binom{p}{2} = 0$

$p \mid a \qquad v_p(a^2) < v_p(\quad)$

a deve essere pari

$v_2\left(a^2\binom{p}{2}\right) < v_2\left(a^k\binom{p}{k}\right) \qquad k > 2$

a volte $\quad v_2\binom{p}{k} \geq v_2\binom{p}{2} - 1$

$\dfrac{p(p-1)\cdots(p-k+1)}{k!} \qquad \dfrac{p(p-1)}{2} \qquad$ se $p \equiv 3 \pmod 4$ ✓

$$\boxed{\begin{gathered} v_2\binom{p}{k+2} \geq v_2\binom{p}{k} - 2 \\ v_2\left(a^{k+2}\binom{p}{k+2}\right) \geq v_2\left(\binom{p}{k}a^k\right) \\ \frac{p\cdots(p-k-1)}{} \\ v_2\,(p-k-1)(p-k) + 2 \geq v_2(k+1)(k+2) \end{gathered}}$$

$\dots \quad ? \quad$ :(

Trovare tutte le soluzioni $n$

$2^n = x^2 + 7y^2$ $\quad x, y$ dispari

$8 = 1 + 7 \rightsquigarrow \alpha$

$16 = 9 + 7 \cdot 1 \rightsquigarrow \beta$

$32 = 25 + 7 \cdot 1$

$2^n = (x + \sqrt{-7}\,y)(x - \sqrt{-7}\,y) = N(x + \sqrt{-7}\,y)$

per quale $n$ $\quad 2^n = N(\alpha)$ con $\alpha \in \mathbb{Z}[\sqrt{-7}]$ ?

$\alpha$ non divisibile per 2

$8 = N(\alpha)$ $\quad \cancel{64} = N(\alpha^2)$ $\quad \alpha = 1 + \sqrt{7}$

$2^7 = 16 \cdot 8 = N(\alpha \cdot \beta)$

$2^n = N(\gamma) \Rightarrow 2^{n+3} = N(\alpha \cdot \gamma)$

Abbiamo ris. l'ex per induzione a patto

di dimostrare che $2 \nmid \alpha \cdot \gamma$

$\alpha = 1 + \sqrt{-7}$ $\quad \gamma = a + b\sqrt{-7}$

$\alpha\gamma = (a - 7b) + (a + b)\sqrt{-7}$

$2^{n+3} = N(\alpha\gamma)$ $\quad N\left(\frac{\alpha\gamma}{2}\right) = \frac{2^{n+3}}{4} = 2^{n+1}$

$\frac{\alpha\gamma}{2} = \gamma \, \frac{\sqrt{-7}+1}{2}$

$A = \mathbb{Z}[\sqrt{-7}] \subseteq B = \mathbb{Z}\left[\frac{\sqrt{-7}+1}{2}\right] = \mathbb{Z}[\omega]$

$x + y\sqrt{-7} \in B$

$y = \frac{b}{2}, \quad x = a + \frac{b}{2}$

Scopo: $\cdot\ \alpha \in B \qquad \alpha = a + b\omega = x + y\sqrt{-7}$

$\cdot\ \alpha\bar{\alpha} = 2^n$

$\cdot\ \alpha \in A \qquad 2 \mid b \qquad a \nmid b$

$\omega = \frac{1+\sqrt{-7}}{2} \qquad (1+\sqrt{-7})(1-\sqrt{-7}) = 8$

$2\omega \quad 2\bar{\omega} \quad 2^3$

$\omega\bar{\omega} = 2$

$\alpha\bar{\alpha} = 2^n = \omega^n \bar{\omega}^n$

$\mathbb{Z}[\omega]^* = ?$

$N(a+b\omega) = (a+b\omega)(a+b\bar{\omega}) =$

$= a^2 + b^2 \underset{2}{\omega\bar{\omega}} + ab\,\underset{1}{(\omega+\bar{\omega})}$

$\frac{1+\sqrt{-7}}{2} + \frac{1-\sqrt{-7}}{2} = 1$

$= a^2 + 2b^2 + ab = \left(a + \frac{b}{2}\right)^2 + b^2\left(1 + \frac{3}{4}\right) = 1$

$\Rightarrow a = \pm 1, \quad b = 0 \qquad a + b\omega = \pm 1$

$\alpha\bar{\alpha} = \omega^n \bar{\omega}^n$

$\alpha = \omega^a \bar{\omega}^b \qquad \alpha = \pm\, \omega^a \bar{\omega}^b$

$\alpha\bar{\alpha} = \omega^a \bar{\omega}^b \bar{\omega}^a \omega^b = (\omega\bar{\omega})^{a+b}$.

$a+b=n$

$\omega^a\bar{\omega}^b = \quad (\omega\bar{\omega})^2 = 4 \mid \alpha \quad$ in $B$

$a, b \geq 2 \quad$ No

$\alpha = 4\beta = 2(2\beta) = 2($un multiplo in $\mathbb{Z}[\sqrt{-7}])$

$\beta \in B \qquad 2\beta \in A$

$\alpha = \pm\omega^n, \pm\omega^{n-1}\bar{\omega}, \pm\bar{\omega}^{n-1}\omega, \pm\bar{\omega}^n$

$\omega^n \quad \cancel{\quad} \quad \omega^3 = \left(\frac{1+\sqrt{-7}}{2}\right)^3 =$

$\frac{1+(-7)\sqrt{-7}+3\sqrt{-7}-7\cdot 3}{8} = \frac{-20-4\sqrt{-7}}{8} \notin A$

Guess $\omega^n \notin B$

$\Downarrow$

$\omega^n = a_n + b_n\omega \qquad b_n \equiv 1 \pmod 2$

~~dimos~~

Dim $\times$ induzione : $a_n \equiv 0 \quad b_n \equiv 1 \pmod 2$

$\omega^{n+1} = (a_n + b_n\omega)\omega = a_n\omega + b_n\omega^2 = *$

$\omega^2 = ? \qquad \omega^2 - (\omega+\bar{\omega})\omega + \omega\cdot\bar{\omega} = 0$

$\omega^2 - \omega + 2 = 0 \qquad \omega^2 = \omega - 2$

$* \quad a_n\omega - 2b_n + b_n\omega =$

$\Rightarrow a_{n+1} = -2b_n \qquad b_{n+1} = a_n + b_n$

$= \omega^n \qquad \pm \bar{\omega}^n \not\in$

$n \geq 2$

$\bar{\omega}\omega^{n-1} = (\omega\bar{\omega})\omega^{n-2} = 2\omega^{n-2}$

$\bar{\omega}\omega^{n-1} \in A \setminus 2A$

$\pm \bar{\omega}\cdot\omega^{n-1}$ è una soluzione al nostro problema

$\pm \omega \bar{\omega}^{n-1}$

$\forall n \geq 2 \qquad \omega\bar{\omega} = 2$

$x^2 + 7y^2$

$\cancel{x+p}$

$$\begin{cases} \omega\bar{\omega}^{n-1} = x + y\sqrt{-7} \\ \bar{\omega}\omega^{n-1} = x - y\sqrt{-7} \end{cases}$$

$x = \bar{\omega}^{n-1} + \omega^{n-1}$

Consolazione della faccenda

$$v_2\left[\binom{p}{2} a^2\right] < v_2\left[\binom{p}{2k} a^{2k}\right]$$

$$v_2 \quad \frac{p(p-1)}{2} a^2 \quad \lneqq \quad v_2\left[\frac{p\cdot(\cdots(p-2k+1)}{2k!} a^{2k}\right] = \binom{p-2}{2k-2}\frac{p(p-1)}{2k(2k-1)} a^{2k}$$

$\cancel{v_2}$

$\gneqq$

$$V_2\left(\frac{p(p-1)}{2k(2k-1)}a^{2k}\right)$$

$$\geq$$

$$V_2\left(\frac{p(p-1)}{4}a^2\right)+V_2\left(\frac{a^{2k-2}}{k}\right)$$

Hope : $V_2\left(\frac{a^{2k-2}}{k}\right)>0$

$$\geq$$

$$V_2\left(\frac{2^{2k-2}}{k}\right)>0$$

---

$y^2+2=x^3 \leftarrow$ Esercizio

---

<u>Eq. di Pell</u>

$x^2-Dy^2=1 \qquad x,y\in\mathbb{Z} \qquad D>0$

$D\neq\square$

$(x+\sqrt{D}y)(x-\sqrt{D}y)=1$

$x+y\sqrt{D}\in\mathbb{Z}[D]^\times$

$x^2-8y^2=1 \qquad 9-8=1$

Se $u$ è unità di $\mathbb{Z}[\sqrt{D}]$ anche $u^n$ è unità $\forall n$

se $u,v\in\mathbb{Z}[\sqrt{D}]^\times \rightarrow u\cdot v\in\mathbb{Z}[\sqrt{D}]^\times$

1) Esistono unità non banali
2) Che struttura ha $\mathbb{Z}[\sqrt{D}]^\times$
È vero che sono tutte della forma $\pm u_0^n$
per una certa $u_0$?

1) Risp.: sì
2) Risp: sì

$\mathbb{Z}[\sqrt{D}] \subseteq \mathbb{R}$

$\alpha \in \mathbb{Z}[\sqrt{D}]$ $|\alpha|$

Definisco $u_0$ = minimo tra $\{ u \in \mathbb{Z}[\sqrt{D}]^\times : u > 1 \}$

$u = a + b\sqrt{D}$ $u > 1$

$\frac{1}{u_0}$ $a - b\sqrt{D}$

$1$

$u > \sqrt{D} > 1$

$u_n \to \alpha$

$\frac{u_n}{u_{n+1}} > 1$ $\frac{u_n}{u_{n+1}} = v < \sqrt{D}$

$\to 1$

$u_0$

$u = \pm u_0^n$? uno tra $\pm u$ $\pm u^{-1}$ è $> 1$

per assurdo $u > 1$ $u > u_0$

$\exists n \quad u_0^n \leq u < u_0^{n+1}$

se $u_0^n < u \quad u_0 > \frac{u}{u_0^n} > 1$ ✓

Per dimostrare la 1) conviene giocare con le divisibilità in $\mathbb{Z}[\sqrt{D}]$

$u_0 > 1$

$\alpha \quad N(\alpha) = M \quad \alpha, \alpha u_0, \alpha u_0^2$

- <u>Idea</u> vado in cerca di $\infty$ $\alpha_n \in \mathbb{Z}[\sqrt{D}]$

a) che hanno tutti la stessa norma

b) se 2 di questi si dividono a vicenda ho finito

$\alpha = \beta\gamma \qquad \beta = \alpha\delta = \beta\gamma\delta \Rightarrow \delta\gamma = 1$

Per il passo a) dimostro che $\exists$ $\infty$ ele di $\mathbb{Z}[\sqrt{D}]$ $N(\alpha) \leq 2\sqrt{D}+1$

$\alpha = a + b\sqrt{D} \qquad N(\alpha) = a^2 - Db^2 < \text{cost}$

$\Leftrightarrow \frac{a^2}{b^2} - D < \frac{\text{cost}}{b^2}$

$\frac{a}{b}$ approssima bene $\sqrt{D}$

**Lemma** (Teo di Dirichlet)

ogni irrazionale $\alpha$ ammette $\infty$ $\frac{p}{q}$ ($p, q$ coprimi)

t.c. $\left|\frac{p}{q} - \alpha\right| \leq \frac{1}{q^2}$

**Dim** FATTA DA POL ☺

$\left|\frac{p}{q} - \sqrt{D}\right| < \frac{1}{q^2} \Longrightarrow \frac{p}{q} < \sqrt{D} + 1$

$\frac{p^2}{q^2} - D = \left(\frac{p}{q} - \sqrt{D}\right)\left(\frac{p}{q} + \sqrt{D}\right) \leq \frac{1}{q^2}\left(2\sqrt{D} + 1\right)$

$p^2 - Dq^2 \leq 2\sqrt{D} + 1$

$\Rightarrow$ troviamo infinite $\alpha_n$ : $N(\alpha_n) = M$

$M$ costante $< 2\sqrt{D} + 1$

$\alpha_n = a_n + b_n\sqrt{D}$ $\quad m$ e $n$

$a_n \equiv a_m \pmod{M}$

$b_n \equiv b_m \pmod{M}$

$\exists\ \alpha, \beta$ t.c. $N(\alpha) = N(\beta) = M$

$\alpha - \beta$ è divisibile per $M$

$\alpha \equiv \beta\ (M)$ $\qquad \beta = \alpha + M\gamma$

$\bar{\beta} = \bar{\alpha} + \overline{M}\,\bar{\gamma} = \bar{\alpha} + M\bar{\gamma}$

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha\bar{\beta}}{\beta\bar{\beta}} = \frac{\alpha\bar{\beta}}{\alpha\bar{\alpha}} = \frac{\alpha\bar{\beta}}{n} = \frac{\alpha\bar{\alpha} + n\bar{\gamma}\alpha}{n}$$

$$= 1 + \bar{\gamma}\alpha \in \mathbb{Z}[\sqrt{D}]$$

$\beta \mid \alpha \qquad \alpha \mid \beta$

$\Longrightarrow \exists$ una unità non banale in $\mathbb{Z}[\sqrt{D}]$

---

- $x^2 - y^2 D = n$

$\alpha = x + y\sqrt{D} \qquad \alpha_1, \dots, \alpha_n \quad$ t.c.

tutte le soluzioni sono del tipo

$\alpha_i u_0^n$

$\alpha > 0 \qquad \alpha u_0^n \qquad n \in \mathbb{Z}$

$\{1, u_0\}$

$(x, y) \qquad \frac{x}{y} \quad \tilde{\ } \quad ,$