S15A-C2-Ludo

Titolo nota

Combinatoria geometrica

- Gli oggetti sono punti, rette, figure piane o solide (n-dim.)
- Le posizioni possono (a priori) variare con continuità

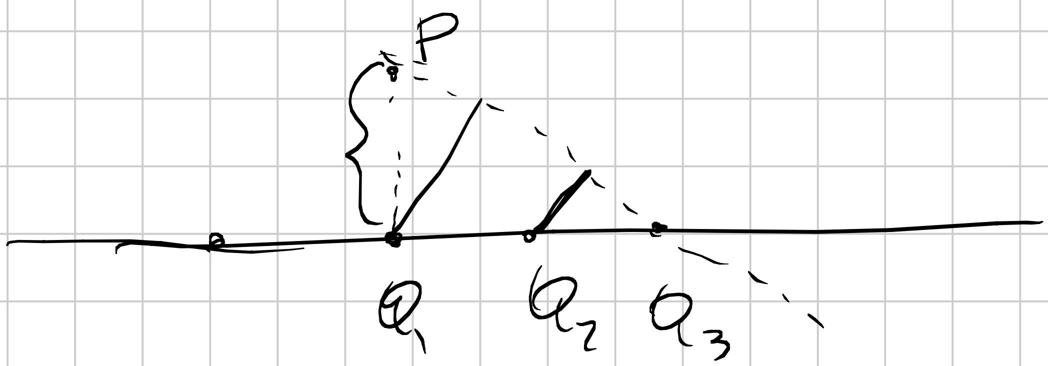
NO: scacchiere
grafi (in genere)
poligono regolare
giochi

$\mathbb{Z}^2, \mathbb{Z}^3 \notin$ (Comb. NSS...)
sottoins.

Bulgaria 2013 min S t.c. se coloro di tre colori R, G, B i punti di $\mathbb{Z}^2$ $\exists$ sempre un triangolo monocromo di area S.

Teorema di Sylvester: se $S \subset \mathbb{R}^2$ finito t.c. $\forall$ coppia $P \neq Q \in S$ $\exists$ almeno $R \neq P$, $R \neq Q$ che appartiene a S e alla retta $\overline{PQ}$, allora tutti i punti sono allineati.

<u>Dim.</u> $\exists \min \{ d(P, r) \mid P \in S, P \notin r, r \text{ passa per due punti di } S \}$



Allora o la proiez. di $P \in S$ e dista da $\overline{PQ_2}$
Q_1 meno di $d(P,r)$,

o da una parte ci sono 2 punti di S Q_2, Q_3 e
Q_2 dista da $\overline{PQ_3}$ meno di $d(P,r)$. $\square$

Teorema di Helly: se in $\mathbb{R}^2$ c'è una famiglia di (triangoli) convessi che si intersecano a 3 a 3, allora si intersecano tutti.
(se in $\mathbb{R}^n$ — — — a $n+1$ a $n+1$, allora si inters. tutti)

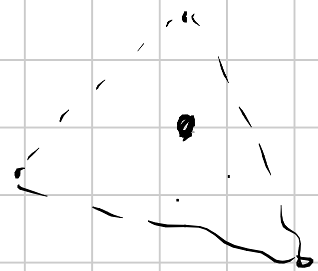
[Famiglia finita di $N \geq 3$ elementi]

<u>Dim</u> Per induzione su N

$N = 4 \qquad S_1 \dots S_4 \qquad I_k = S_1 \cap S_2 \cap \overset{k}{\wedge} S_3 \cap S_4 = \bigcap_{i \neq k} S_i$

$I_k \neq \emptyset \quad k = 1 \dots 4, \quad$ e I_k convesso.

$P_k \in I_k$



$A \cap B = \emptyset$

Nei due casi $\exists\, A, B$ t.c. $A \cup B = \{1, 2, 3, 4\}$

t.c. $\text{hull}(P_k, k \in A) \cap \text{hull}(P_k, k \in B) \neq \emptyset$

Q^4

Dico che $Q \in S_1 \cap S_2 \cap S_3 \cap S_4$

Infatti, $S_i \supset I_k \quad k \neq i \Rightarrow S_i \ni p_k \quad k \neq i$

Allora se $i \in A$, $S_i \ni p_k \quad k \in B$

quindi $S_i \supseteq \mathrm{hull}\{p_k, k \in B\}$,

quindi $S_i \ni Q$. (così se $i \in B$),

Cioè $Q \in S_i \ \forall i$, o $Q \in \cap S_i$.

Passo induttivo: $S_i \quad i = 1 \dots N+1$

$T_i = S_i \quad i = 1 \dots N-1$ ora le ipotesi
$T_N = S_N \cap S_{N+1}$ valgono per T_i

(che ha N elementi): sono convessi e

si intersecano a 3 a 3 (per ipotesi se nessun indice è N, per il passo base se c'è T_N).

$\blacksquare$

IMO 2011/2 (Windmill problem)

$|S| = n$ punti nel piano non 3 a 3 allineati

1) si sceglie una retta ℓ che passa per 1 e 1 solo punto P_1 di S
2) si ruota ℓ in senso orario attorno al punto P_1 finché non tocca un altro punto P_2
3) si ruota in senso orario attorno al punto P_2 finché . . . . . P_3

Dimostrare che si può fare in modo che tutti i punti di S sia perno di rotazione infinite volte.

---

s

n punti bianchi e n punti neri nel piano, non a 3 a 3 all.

Dimostrare che è poss. unirli con n segmenti con un estremo bianco e uno nero che non si intersecano.

BMO 2010/3 Ci sono n punti t.c. ogni triangolo è contenuto in una striscia larga 1. Dim. che tutti i punti sono in una striscia larga 2.

---

n punti P_i $\quad d(P_i, P_j) \leq 1$. Allora stanno in un cerchio di Raggio $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

---

non all. a 3 a 3.

IMO 2013/2 $\quad$ 4027 punti, 2014 blu e 2013 rossi.

Trovare il min num di rette necessarie perché con esse si possa separare il piano in regioni monocromatiche (o vuote)

RMM 2014/5 N punti t.c. $\forall p, q \in N$ esiste una permutazione σ per cui $d(p, P_i) = d(q, P_{\sigma(i)})$ $\forall i$

Quali configurazioni?

RUS 2013 ... n rette (mai 2 a 2 $\parallel$, mai incid. a 3 a 3) "in posizione generale"

Allora esiste una spezzata semplice aperta t.c. ha un (e 1 solo) segmento per ogni retta.

ROM TST 2012

Trovare gli $S \subset \mathbb{R}$ finiti t.c.

se $A, B, C, D \in S$ e $\overline{AB} \cap \overline{CD} = \{Z\}$, allora $Z \in S$.

segm. segm.

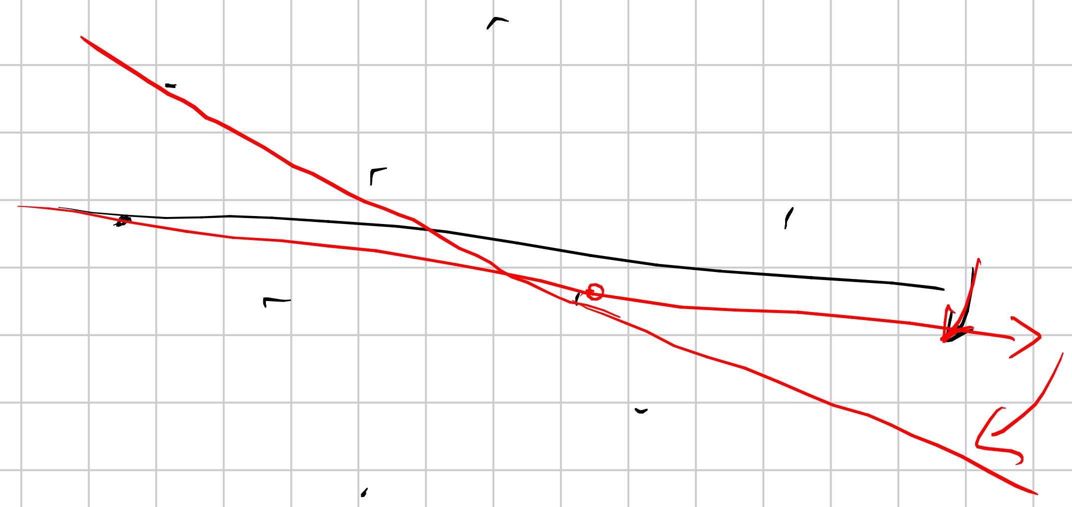
IRN 2011 TST n punti non tutti allineati, ℓ retta è <u>buona</u> se $\exists A, B$ t.c. $\sum_{i \in A} d(\ell, P_i) = \sum_{i \in B} d(\ell, P_i)$, $A \cup B = \{1 \ldots n\}$, $A \cap B = \emptyset$.

Dim che esistono infiniti punti per cui passano $n+1$ rette buone.

HKG 2008 2008 circ. C_i congruenti e non tangenti, ogni C_i interseca almeno 3 delle altre. Qual è il minimo numero di intersezioni totali?

AS-Pac. 2011 5 punti nel piano. Qual è il max del minimo degli angoli tra di loro?

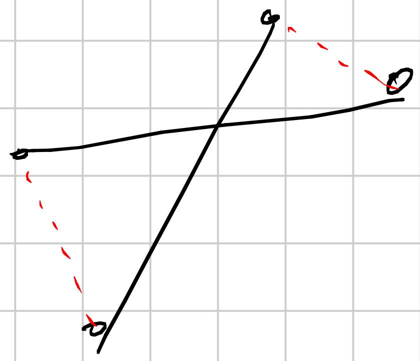
IMO 2011/2 : I punti a dx e a sx della retta sono un invariante.



Scelgo una retta t.c. la diff. tra il # di punti dai due lati è 0 (caso disp.) o 1 (caso pari)

Ma perché la retta mantenga la proprietà e assuma tutte le direzioni, deve toccare tutti i punti, perché tra le rette parallele (non parallele a quelle passanti per 2 punti) solo quella che passa per uno dei punti dell'insieme può andare bene (e una andrà bene, perché la diff. è monotona).

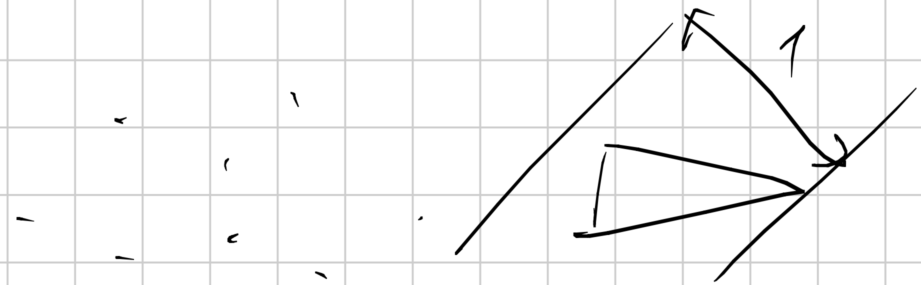
"n bianchi, n neri": cerchiamo una configurazione di segmenti per cui $\sum \ell(\text{segmenti})$ è minima. In questa i segmenti non si intersecano: per assurdo,



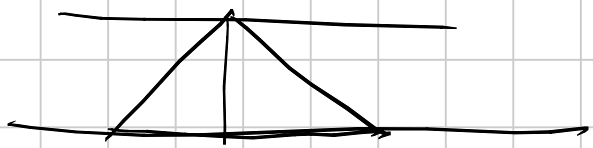
Per la dis. triangolare la somma dei due lati rossi è più piccola di quella dei lati neri

Forse dim. per induzione:

Scegliere una retta che divide in due gruppi $\neq \emptyset$ con uguale numero di bianchi e neri

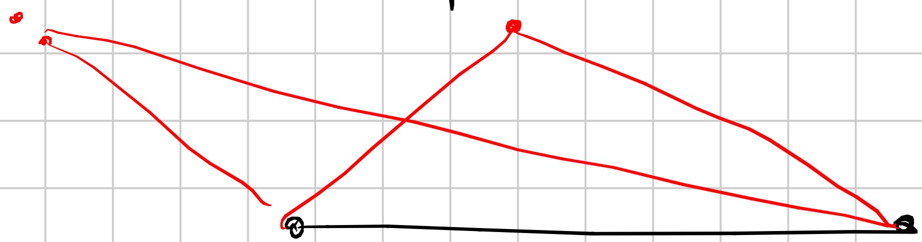


BMO 2010/3



Mi suona che 1 sia la massima altezza minima possibile

Ah! Ma allora se prendo i due punti più distanti,



qualunque 3° punto disterà meno di 1 da questa retta.

---

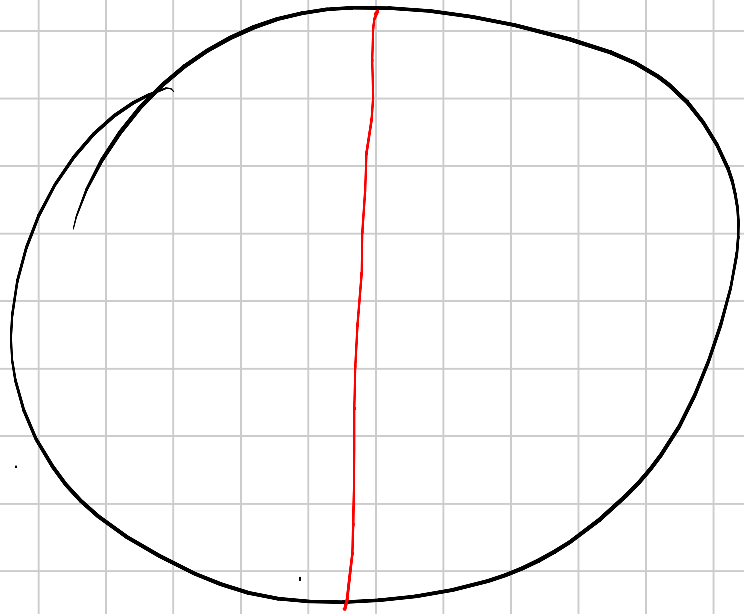
n punti con dist. ≤ 1

dice Andrea:

posso supp. che

$C \supset$ tutti i punti

e ne tocchi 3



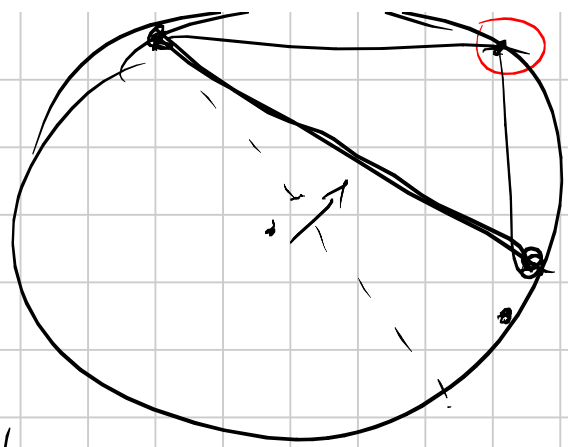
se $R_C \leq \frac{\sqrt{3}}{3}$ ok

i 3 punti formano un triangolo acutangolo

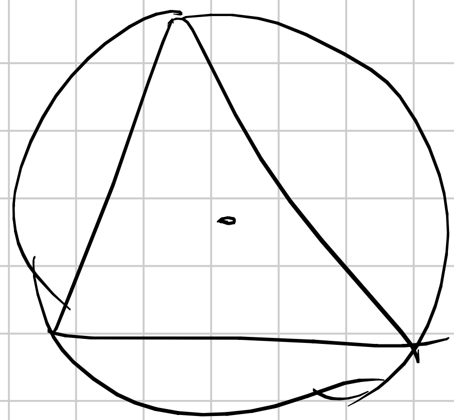
ottusangolo

rettangolo? Viene $R_C = \frac{1}{2} < \frac{\sqrt{3}}{3}$

Ottusangolo:



Sposto il centro di C
verso il lato più lungo
e in un numero finito
di passi trovo il triang. rettangolo o un triangolo
acutangolo.



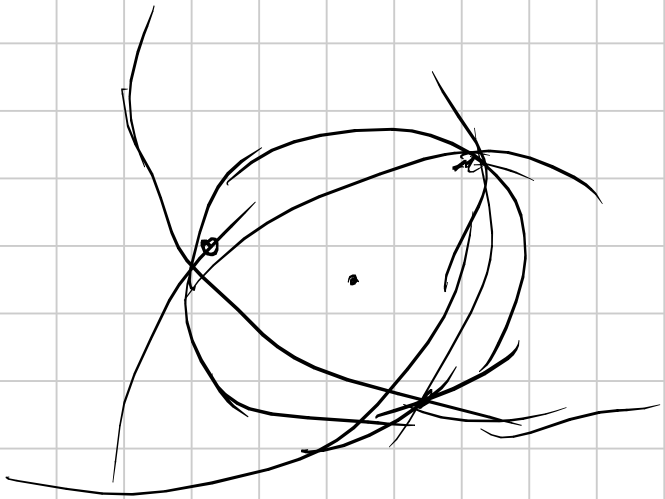
Acutangolo:

$$2R = \frac{a}{\sin \alpha}$$

a lato + lungo

$\alpha \geq 60°$

$\sin\alpha \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad R \leq \frac{a}{\sqrt{3}} \leq \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$



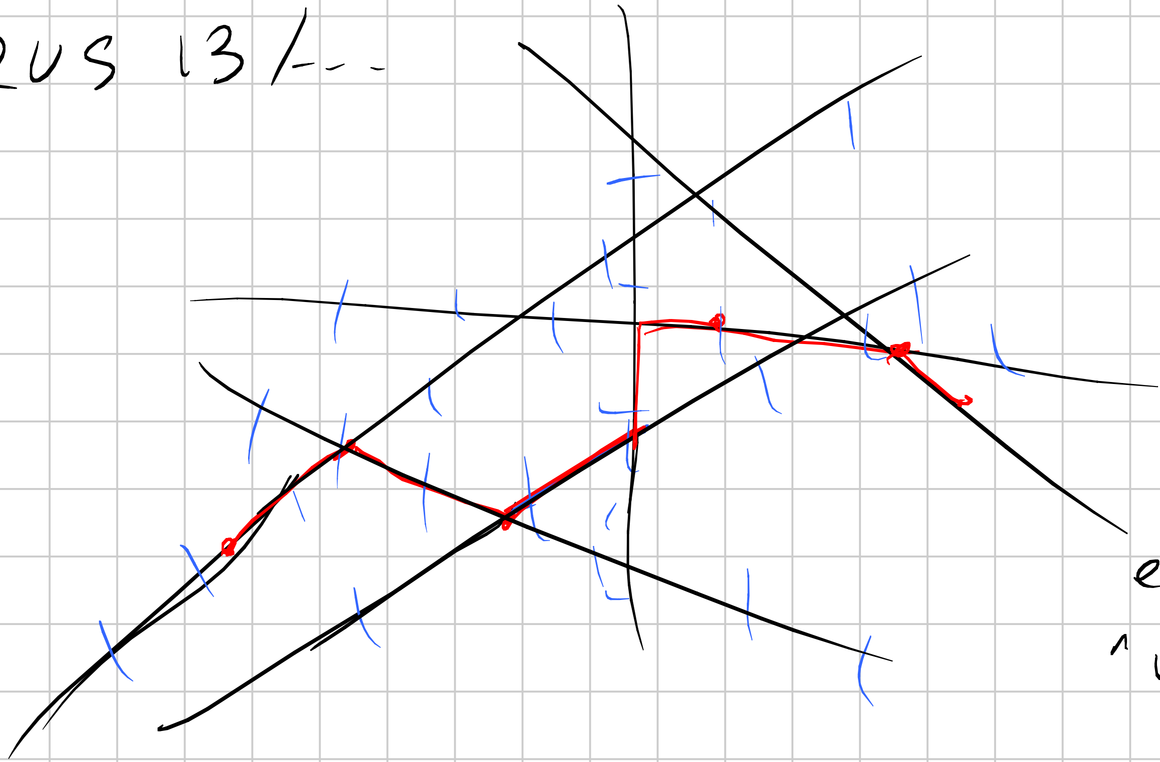
— × —

Se prendo 3 degli n punti, i cerchi di raggio $\frac{\sqrt{3}}{3}$ centrati in loro si intersecano.

Per il teo. di Helly, allora, si intersecano tutti

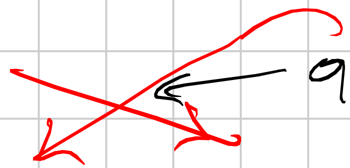
$\Rightarrow$ un punto dell'intersezione va bene come centro.

RUS 13/...



Parto da un punto a caso, cammino fino all'incrocio più vicino e cancello la retta usata.

Non posso intersecarmi per la costruzione: se

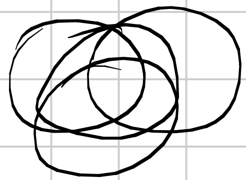


questa sarebbe stata l'incrocio più vicino.

ROM 2012 TST: si fa per casi

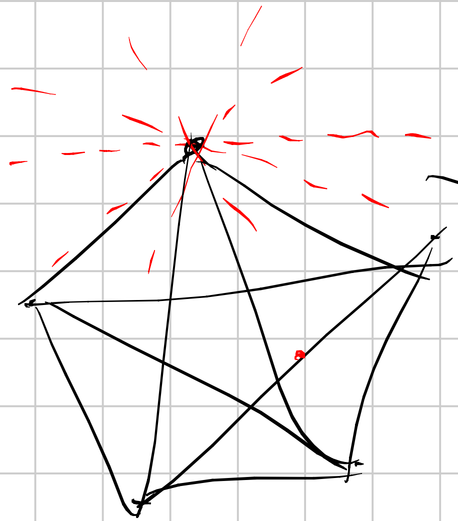
IRN 2011 Hint: per il baricentro degli n punti passano infinite rette buone.

HKG 2008 Hint: dare a ciascun punto di intersez. fra k circonf. "peso" $\frac{1}{k}$.

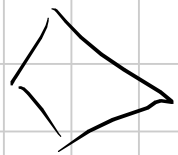


... 2008 p. inters.

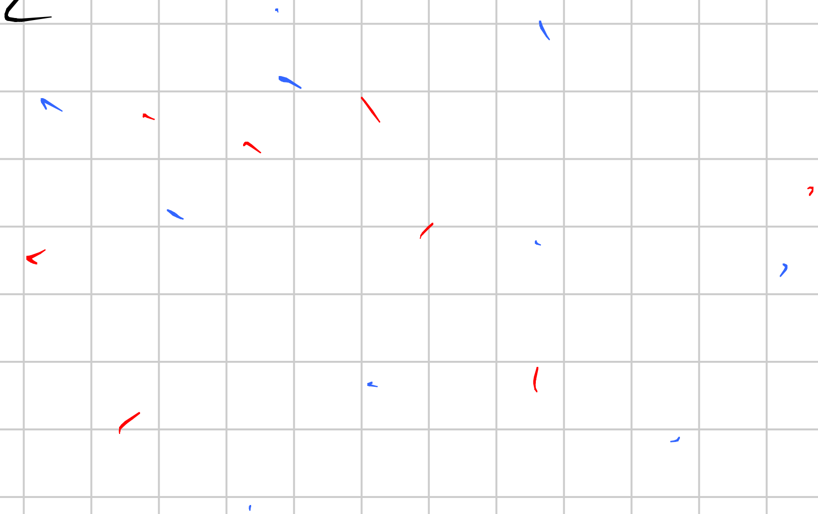
As-Pac 2011:



→ 10 angoli, uno è $\leq 36°$.

(Poi 2 casi per inv. conv. =  o )

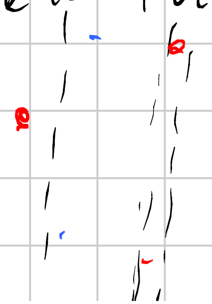
IMO 2013/2



Dim. Induzione. 2014 blu:

dico che la risp. è 2013 (k blu e k rossi → k.)

Nell'invil. convesso c'è un rosso



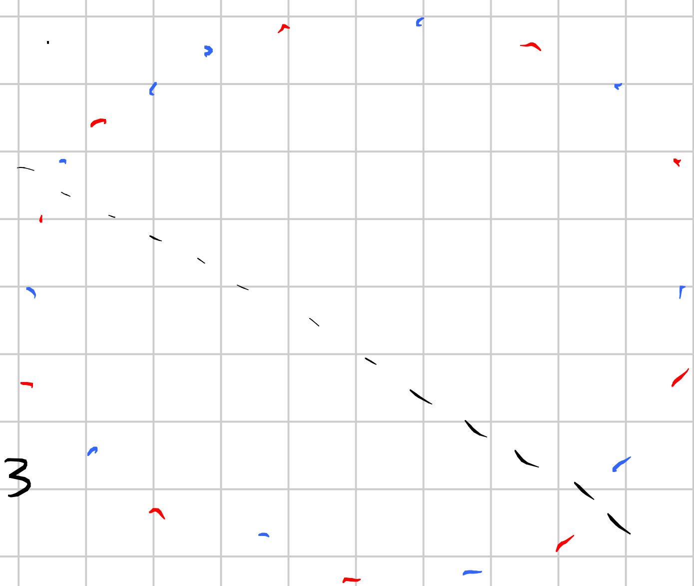
allora con 1 retta lo separo dagli altri

Poi con 1006 coppie di rette molto vicine

Separo 1006 coppie di punti rossi. $\to 2013$

Se l'invil. conv. è blu uso poi 1006 coppie di rette per 1006 coppie di punti blu.

~~$2n-2$ blu e $2n-1$ rossi $\to$ scambio rosso e blu e uso 2012 rette~~



Servono 2013?

4026 lati, da cui passare, 1 retta ne sistema ≤ 2 $\Rightarrow \geq 2013$

RΠM 2011/5

Tutti i punti stanno su una stessa circonferenza, con centro nel baricentro.

$$|P-P_j|^2 = |Q-P_{\sigma(j)}|^2$$

$$\sum_j (P-P_j, P-P_j) =$$

$$= (n-1)|P|^2 - 2\cancel{P \cdot \sum P_j} + \sum P_j^2 =$$

$$= \sum_j |Q-P_{\sigma(j)}|^2 = (n-1)|Q|^2 - 2\cancel{Q \sum P_{\sigma(j)}} + \sum P_{\sigma(j)}^2$$

$G = 0$

$$n|P|^2 = n|Q|^2$$

Caso disp. ⇒ pol. regolare

Caso pari ⇒ pol. reg. o