G2 ADVANCED Anér

Titolo nota 04/09/2015

(1) **IMO 15/3** ABC acutangolo, $AB > AC$. Γ circoscritta al ABC, H ortocentro, Q su Γ con $H\hat{Q}A = 90°$, K su Γ con $H\hat{K}Q = 90°$. Assumiamo A, B, C, K, Q distinti e in quest'ordine su Γ. Allora le circoscritte a KQH e FKM si tangono, ove F è il piede dell'altezza da A e M è il punto medio di BC

(2) **IMO 12/5** ABC rettangolo in C. D piede altezza da C. X sul segmento CD. K sul segmento AX con $BK = BC$. L sul segmento BX con $AL = AC$. $M = AL \cap BK$. Allora $MK = ML$.

(3) **IMO 10/2** ABC con incentro I, Γ circ. circoscritta. $AI \cap \Gamma = D$. E sull'arco $\overset{\frown}{BDC}$, F sul segmento BC, con $B\hat{A}F = E\hat{A}C < \frac{1}{2} B\hat{A}C$. G pto medio di IF. Allora $DG \cap EI$ sta su Γ.

(4) **RMM 13/3** $ABCD$ inscritto in ω. $AB \cap CD = P$. $AD \cap BC = Q$. $AC \cap BD = R$. M pto medio di PQ.

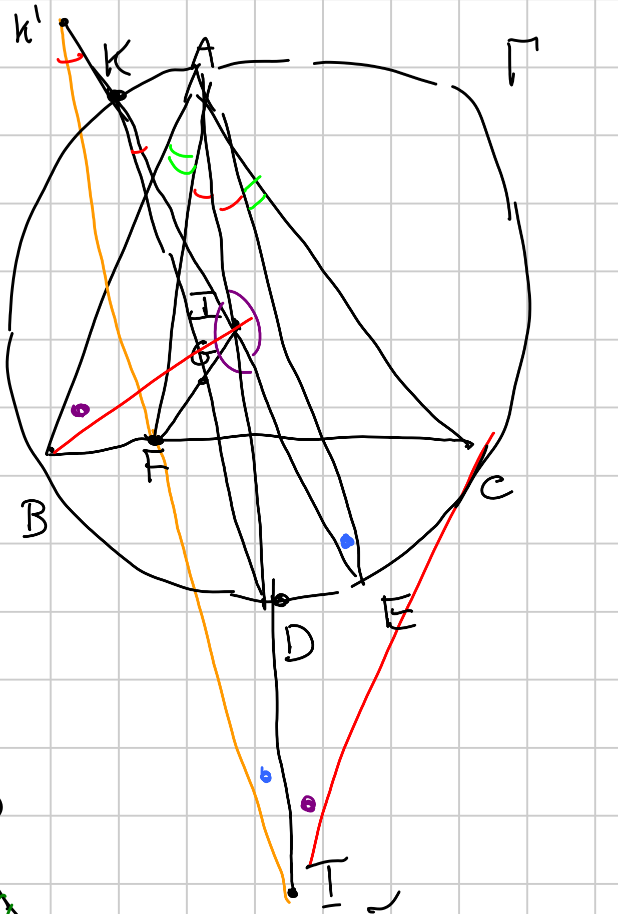
K è l'intersezione del segmento MR con ω. Allora cfr (KPQ) e ω sono tangenti.

(5) RMM 12/6 potenziato

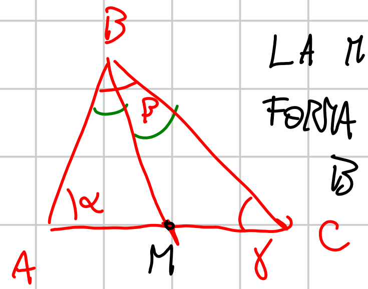
ABC triangolo, I incentro, O circocentro, ω circ. inscritta che tange i lati in A_1, B_1, C_1 ($A_1 \in BC$ etc.). ω_A è la cfr per B e C tangente a ω in A_2; ω_B e ω_C definite in modo analogo, così come B_2 e C_2. $A' = \omega_B \cap \omega_C$ diverso da A, B', C' analoghi. Allora

$AA', BB', CC', \underbrace{A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2}_{\text{potenziamento dell'originale}}, OI$ concorrenti

(3)



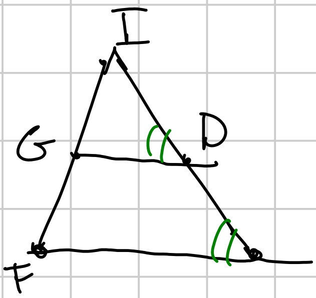
Tesi: $K \in \Gamma$



LA MEDIANA FORMA ANGOLI BRUTTI

$\Downarrow$

"I PUNTI MEDI" NON AIUTANO NELL'ANGLE CHASING



Idea: procurarsi altri punti medi

Fatto: I, B, C, I_a sono su una cfr di centro D con diametro II_a

Inversione risp. a A con $R^2 = AB \cdot AC$ + simmetria risp. ad AI

$\Gamma \longleftrightarrow BC \qquad B \longleftrightarrow C \qquad E \longleftrightarrow F$

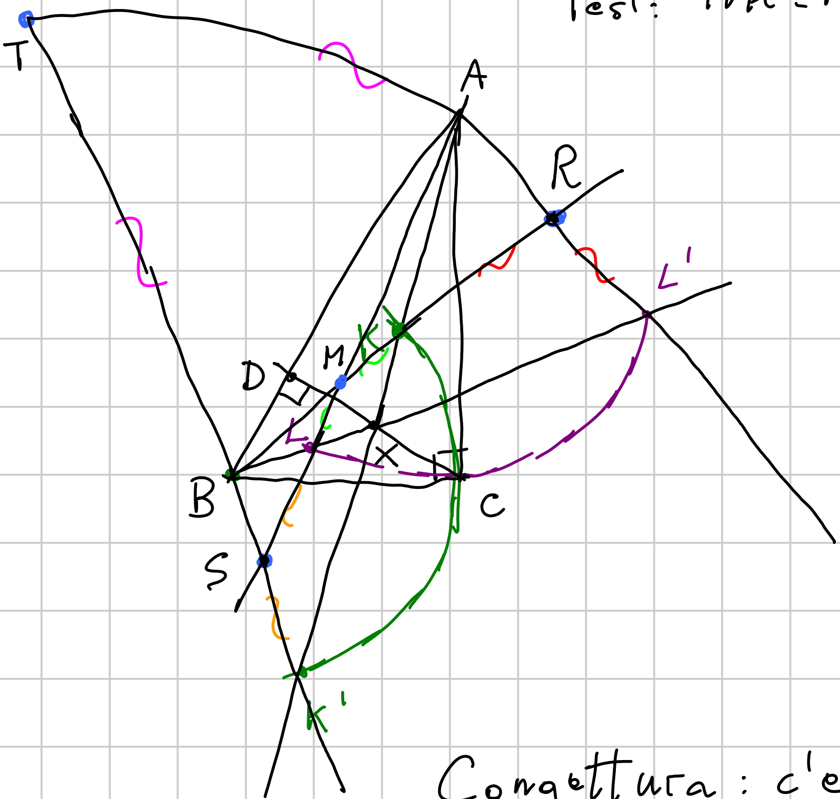
$I \longleftrightarrow I_a$

$AIE \sim AFI_a$ e ora è fatta.

---

(2)

Tesi: $MK = ML$



Aggiungo K', L' e gli analoghi di M, confidando che la tesi sia ancora vera

Nuova tesi:

$MK = ML$
$SK' = SL$
$RK = RL'$
$TK' = TL'$

Congettura: c'è addirittura una cfr tangente a TS MR in K, K', L, L'.

Principio generale (Una retta interseca una cfr in 2 punti). Quando una costruzione geometrica prevede, passando in coordinate (es. cartesiane), la soluzione di un'equazione di 2° grado, è una buona idea considerarle entrambe insieme.

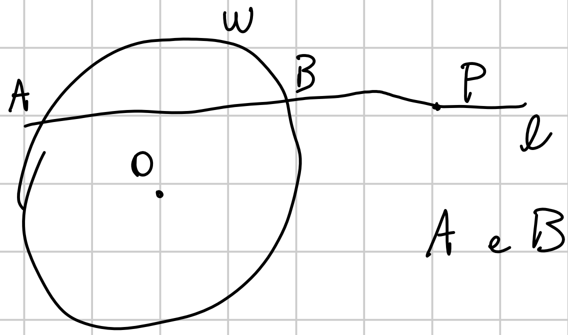
Motivo algebrico $x^2 + ax + b$ ha due soluzioni

$x_1 = \dfrac{-a + \sqrt{a^2 - 4b}}{2} \qquad x_2 = \dfrac{-a - \sqrt{a^2 - 4b}}{2}$. Le espressioni contengono radicali e (probabilmente) non sono razionali = funzioni algebriche

Usarne una sola garantisce calcoli impostati.

Insieme invece x_1 e x_2 hanno buone proprietà: conosciamo la somma $-a$ e il prodotto b.

Esempio geometrico

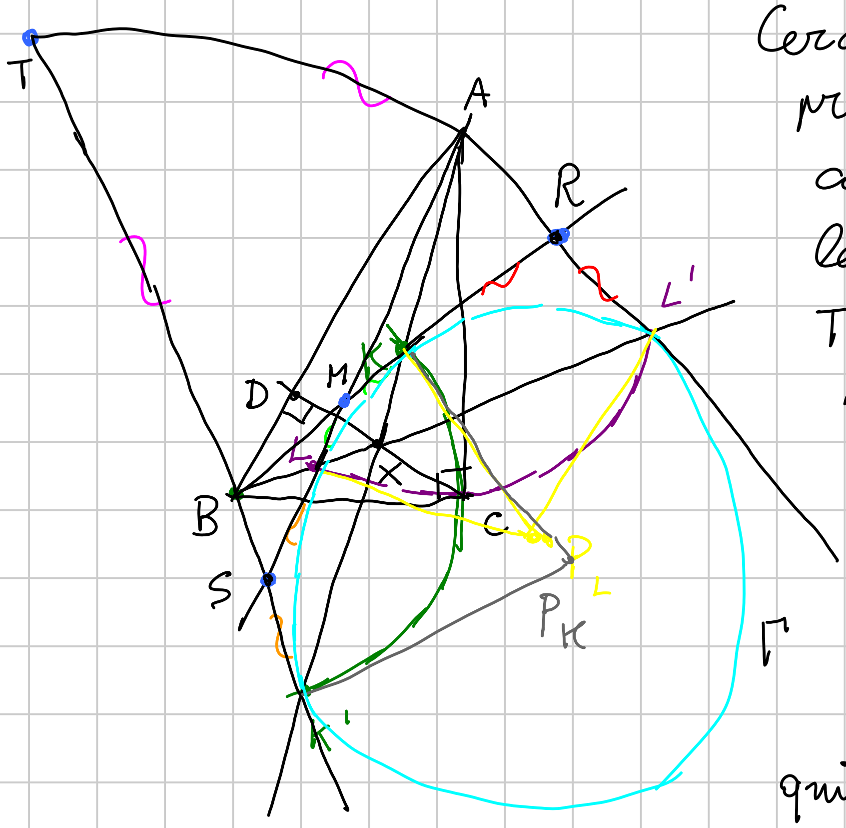


ω generica, P generico, ℓ per P generica

$$\ell \cap \omega = \{A, B\}$$

A e B hanno buone proprietà insieme

- Il pto medio di AB è la proiez. di O su ℓ (corrisponde alla somma)
- $PA \cdot PB = pow_\omega(P) = \underbrace{PO^2 - R^2}_{\text{"semplice"}}$ (corrisponde al prodotto)



Cerco il centro della presunta Γ della congettura. Traccio le normali ai lati di TRMS per K, K', L, L'

Uniamo L e L' perché soluzioni della stessa equazione di 2° grado trova P_L

$$AC^2 = AD \cdot AB$$

quindi invertendo in A con raggio AC

$B \leftrightarrow D \qquad L \leftrightarrow L \qquad C \leftrightarrow C \qquad L' \leftrightarrow L'$

B, L, L' allineati $\Rightarrow ADLL'$ ciclico

$\Rightarrow ADLL'P_L$ è ciclico. $A\hat{D}C = 90° = A\hat{L}P_L$

da cui DC passa per P_L

Inoltre $AP_L \perp LL' = BX$

$$P_L = CD \cap (\text{ortogonale per } A \text{ a } BX)$$
$$P_K = CD \cap (\quad " \quad " \quad , B \text{ a } AX)$$

$P_L = P_K =$ ortocentro di ABX. Lo chiamo $P = P_L = P_K$

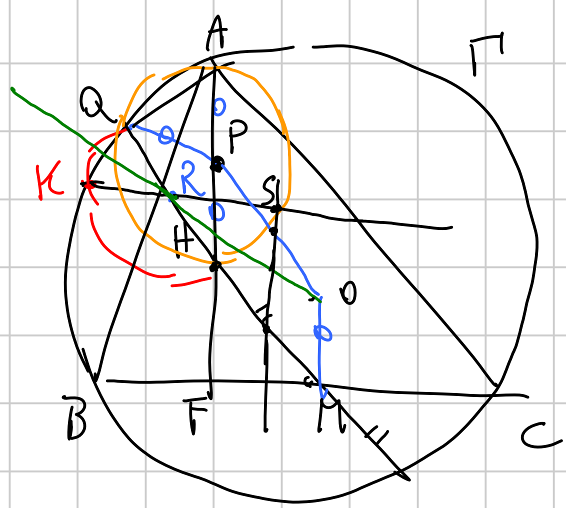
Ciò che so è che $PK = PK'$ e che $PL = PL'$

Si conclude con 2 osservazioni:

- Una sfe tangente da qualche parte a $MRTS$ esiste perché $TR - TS - SM + RM = 0$ perché?

Finire per casa

1



Fatto:
Q è allineato con M e H
(angoli + argomenti di Feuerbach)

Sia P medio di AH

$$\boxed{\vec{AP} = \vec{PH} = \vec{OM}}$$ Fatto noto

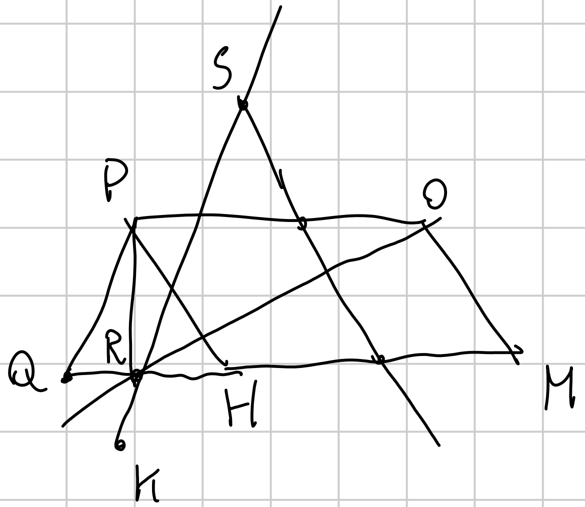
Q = proiezione di A su HM

R := pto medio di QH

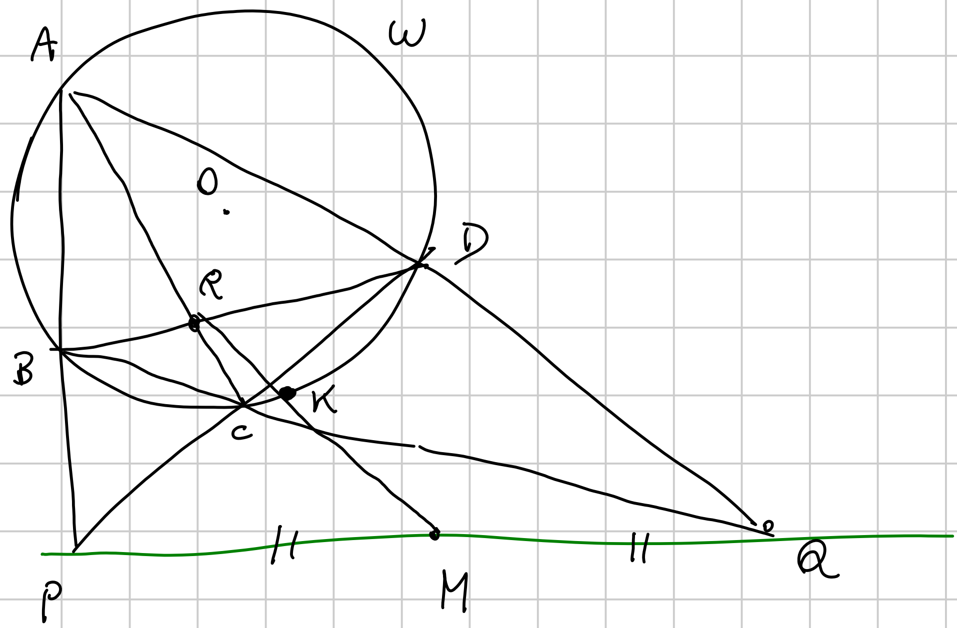
K = simmetrico di Q rispetto a OR

S : KR ∩ mediana di POMH (che è un parallelogramma)

Tesi: SK = SM



RMM 13/3



Tesi: cfr (PKQ) tange ω

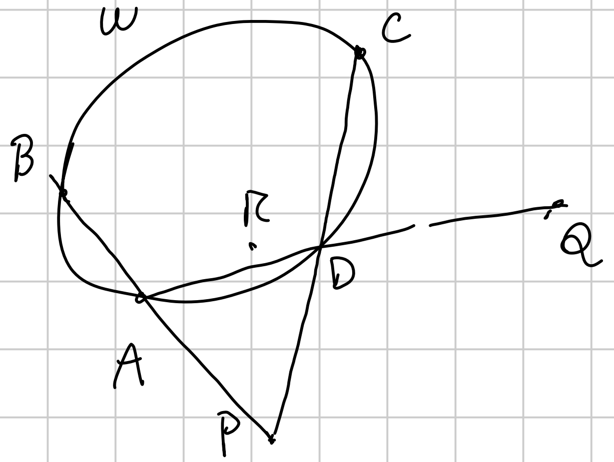
Fatto P = polo di RQ e cicliche

(Fatto O, P, Q, R è un sistema ortocentrico)

Viceversa, dati ω, P, Q, R con

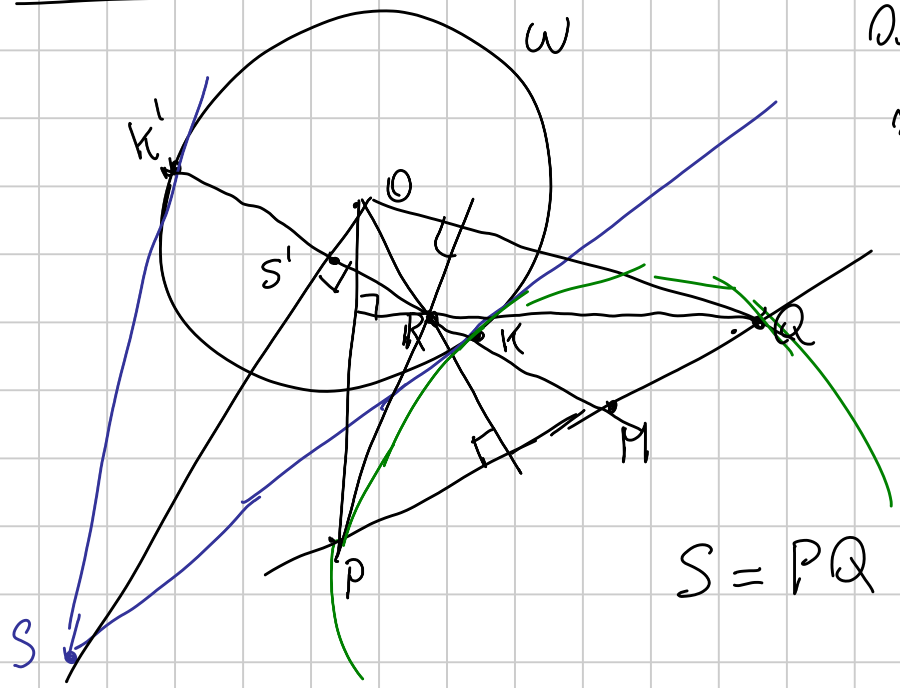
P = polo di RQ e cicliche, ∀ A ∈ ω si

può costruire $ABCD$ inscritto con lati e diagonali che si intersecano a coppie in P, Q, R



$AD \cap BC \in \mathrm{pol}\, P$

Morale I punti A, B, C, D sono pressoché inutili, visto che tutta la costruzione dipende da P, Q, R, ω



Aggiungo K', nello spirito di usare entrambe le intersezioni

$\mathrm{pol}(S) = KK' \ni R$

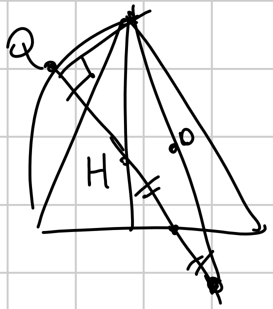
$S \in PQ = \mathrm{pol}(R)$

$S = PQ \cap (\text{perp per } O \text{ a } MR)$

proprietà dell'inversione

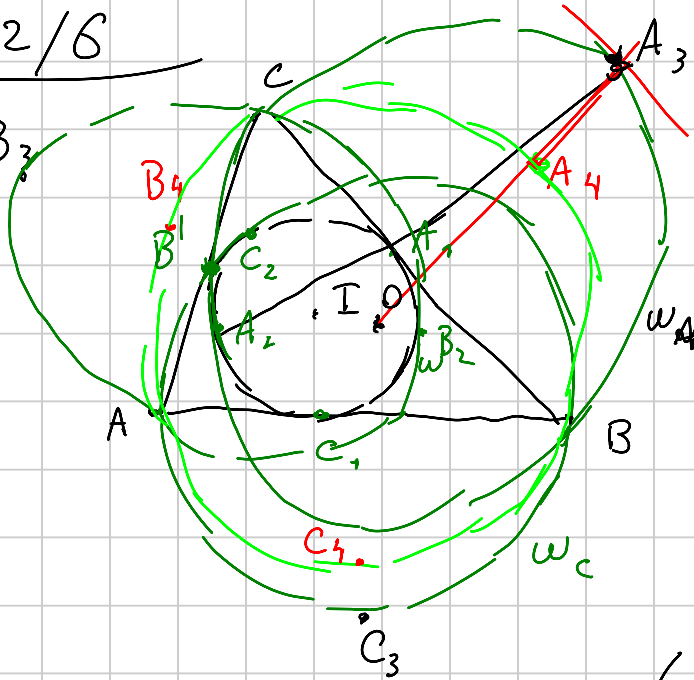
$SK^2 = SS' \cdot SO = SP \cdot SQ$

$OS'PQ$ è ciclico



SK tange $\mathrm{cfr}\,(PQK)$

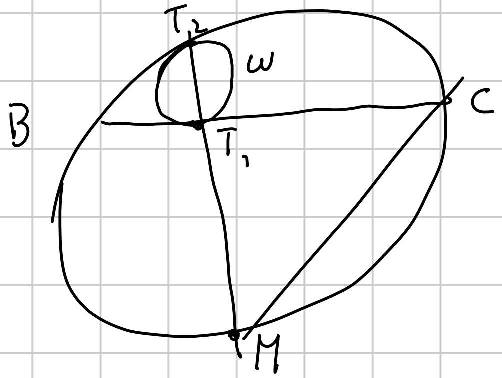
RMM 12/6



AA', BB', CC' concorrono ω_A nel centro radicale di $\omega_A, \omega_B, \omega_C$

$A_1 A_2 A_3$ sono allineati (A_3 è il pto medio dell'arco BC in ω_A)

Fatto

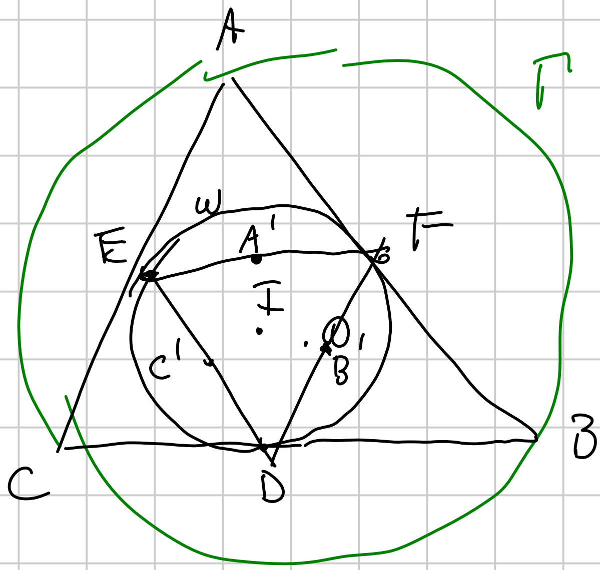


$pow_\omega(M) = MC^2$

Fatto C'è un inversione nel centro radicale (+ simmetria centrale) che lascia invariate $\omega_A, \omega_B, \omega_C$, e manda A_2 in A_3 se la tesi vuole essere vera. Se la tesi è vera per le prime 6 rette, cfr ω va in cfr $(A_3 B_3 C_3)$ che ha centro in O (facile verifica) ed è tangente a $\omega_A, \omega_B, \omega_C$.
Inoltre I non va in O, ma il centro dell'inversione è allineato con I e O, centri di ω e cfr $(A_3 B_3 C_3)$ rispettivamente.

$\mathrm{pow}_w(A_3) = A_3C^2$

Esercizio



IO è la retta di Euler di DEF