Algebra 1 - Senior 2015 - Gioacchino

Titolo nota 23/08/2015

Polimomi

Che cos'è un polinomio?

$$P(x) = \underbrace{a_n}_{\text{coefficiente}} \underbrace{x^{n}}_{\text{parte letterale}} + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$$

~~Quest~~. Cos'è il grado di un polinomio? Il max exp a cui compare elevata la x

- Coeff. direttivo: a_n
- Polinomio monico: $a_n = 1$

Grado di un pol. costante $\neq 0$ è 0!

Dove sono i coefficienti?

$\mathbb{R} \to$ reali

$\mathbb{Z} \to$ interi $\qquad \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$

$\mathbb{Q} \to$ razionali

$\mathbb{C} \to$ complessi

$\mathbb{Z} / \mathbb{Q}$

DIVISIONE EUCLIDEA $\quad a > 0,\ b > 0$

Per i numeri $\longrightarrow$ $\exists!\ q, r$ t.c. $a = qb + r$ con $0 \leq r < b$

Per i polinomi $\longrightarrow$ Dati $a(x)$ e $b(x)$

$\exists!\ r(x), q(x)$ t.c. $a(x) = b(x) q(x) + r(x)$

e $0 \leq \deg r(x) < \deg b(x) \ \vee\ r(x) = 0$

Dim: x Induzione ... formalizzata usando l'algoritmo.

sul deg del dividendo.

$$\begin{array}{l|l} x^4 \quad\quad +3x+1 & x^2+x+1 \\ \hline -x^4 -x^3-x^2 & x^2-x \\ \hline // \quad -x^3-x^2+3x+1 & \\ \quad\quad +x^3+x^2+x & \\ \hline \quad\quad\quad 4x+1 & \end{array}$$

$$x^4+3x+1 = (x^2+x+1)(x^2-x)+4x+1$$

Attenzione! Se i coeff. di $a(x)$ e $b(x)$ sono in $\mathbb{Q}$, anche quelli di $q(x)$ e $r(x)$ lo sono?
(stessa cosa per $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$)
Se i coeff. di $a(x)$ e $b(x)$ sono in $\mathbb{Z}$, anche quelli di $q(x)$ e $r(x)$ sono in $\mathbb{Z}$?
NON È DETTO! (sono, a priori, in $\mathbb{Q}$).
Sono in $\mathbb{Z}$ se $b(x)$ è monico.

$$\begin{array}{l|l} 3x^2 \quad\quad +1 & 2x+1 \\ \hline -3x^2-\frac{3}{2}x & \frac{3}{2}x-\frac{3}{4} \\ \hline \quad -\frac{3}{2}x+1 & \\ \quad +\frac{3}{2}x+\frac{3}{4} & \\ \hline \quad\quad +\frac{7}{4} & \end{array}$$

Massimo comune divisore

per i numeri

- Dati a, b $\quad a>0 \quad b>0$
  si dice $MCD(a,b)=d$ $\underline{\text{il}}$ numero $d>0$
  t.c. $d \mid a \wedge d \mid b$
  e se $\exists\ c$ t.c. $c \mid a$ e $c \mid b \rightarrow c \mid d$
- Th. Bézout. Dati $a,b>0$
  $\exists\ r, s$ t.c. $ar+bs=d=MCD(a,b)$

Per i polinomi

Dati $a(x)$, $b(x)$ si dice $MCD(a(x),b(x))=d(x)$
il polinomio monico t.c.
$d(x) \mid a(x) \wedge d(x) \mid b(x)$
e se $\exists\ c(x)$ t.c. $c(x) \mid a(x)$ e $c(x) \mid b(x) \rightarrow c(x) \mid d(x)$

- Dati $a(x)$, $b(x)$
  $\exists\ r(x), s(x)$ t.c. $a(x)r(x)+b(x)s(x)=d(x)$

Conseguenza della divisione

Def. α radice di $P(x) \iff P(\alpha) = 0$

Ruffini **Th.** $P(\alpha)$ è il resto della divisione di $P(x)$ per $(x-\alpha)$

Dim. Per il th. di divisione $\exists\, q(x), r(x)$ t.c.

$$P(x) = (x-\alpha)\, q(x) + r(x)$$

costante / zero

Perchè
- $r(x) = 0$
- $0 \le \deg r(x) < \deg(x-\alpha)$

$r(x)$ è una costante che chiamo r

$$P(x) = (x-\alpha)\, q(x) + r$$

Valuto in α

$$P(\alpha) = r$$

C.1. Se α è una radice $\xrightarrow{\text{Per def.}} P(\alpha) = 0 \xrightarrow{\text{RUFFINI}}$ il resto della divisione di $P(x)$ per $x-\alpha$ è $0 \longrightarrow$

$\longrightarrow P(x) = (x-\alpha)\, Q(x)$ senza resto.

Quindi se $P(\alpha) = 0 \longrightarrow P(x) = (x-\alpha)\, Q(x)$

Oss. Ho un polinomio di grado n di cui conosco $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ radici distinte. Com'è fatto?

$$P(\alpha_1) = 0 \longrightarrow P(x) = (x-\alpha_1)\, Q(x)$$

$$P(\alpha_2) = (\alpha_2 - \alpha_1)\, Q(\alpha_2)$$

$\overset{\shortparallel}{0} \implies Q(\alpha_2) = 0 \rightarrow Q(x) = (x-\alpha_2)\, R(x)$

E così via...

Quindi è fatto così $\quad P(x) = c(x-\alpha_1)\cdots(x-\alpha_n)$

Oss. $P(x)$ a coeff. interi $\quad a, b$ due interi.

Considero il polinomio $Q(x) = P(x) - P(b)$

Quanto vale $Q(b)$? $\quad Q(b) = P(b) - P(b) = 0$

$$Q(x) = (x-b)\, R(x)$$

$$P(x) - P(b) = (x-b)\, R(x)$$

$$P(a) - P(b) = (a-b)\, R(a)$$

$$\boxed{a-b \mid P(a) - P(b)}$$

x^2+1 $\quad 3 \to 10$ $\quad 7 \to 50$ $\qquad 7-3 \mid 50-10$ ✓

Th. Un polinomio di grado n non può avere più di n radici

Dim. per ind. su n P.B. $n=1$ ok.
Suppongo che sia vera fino a n

$\underline{n+1}$ P.a. suppongo che abbia + $(n+1)$ radici.
Ne scelgo una α_1

$P(x) = (x-\alpha_1)\,Q(x)$ ha grado n, x hp induttiva ha al più n radici

Quindi $P(x)$ ha al più $(n+1)$ radici

IDENTITÀ POLINOMI $\rightarrow$ $P(x)$ e $Q(x)$

Se due polinomi di grado n coincidono su $n+1$ valori, allora sono identici.

Perché $R(x) = P(x) - Q(x) \longrightarrow$ ha al max grado n
Quindi ha al max n radici.

$$\text{Ma } R(\alpha_1) = \dots = R(\alpha_{n+1}) = 0$$

Quindi deve essere il caso che $P(x) - Q(x) = 0$.

$$P(x) = Q(x)$$

Domanda Se conosco la valutazione in $x_1, \dots, x_{n+1}$ di $P(x)$ di grado n

$$P(x_1) = y_1$$
$$\vdots$$
$$P(x_{n+1}) = y_{n+1}$$

Riesco a scrivere $P(x) = ?$

Sì: INTERPOLAZIONE DI LAGRANGE

Idea: Cerchiamo un polinomio che valga 1 su x_1 e 0 su $x_2, \dots, x_{n+1}$

$$a_1(x) = \frac{(x-x_2)\cdot\ldots\cdot(x-x_{n+1})}{(x_1-x_2)\cdot\ldots\cdot(x_1-x_{n+1})}$$

$$a_2(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_3)\cdot\ldots\cdot(x-x_{n+1})}{(x_2-x_1)\cdot(x_2-x_3)\cdot\ldots\cdot(x_2-x_{n+1})}$$

$$\vdots$$

$$a_{n+1}(x) = \dots$$

Dico che $p(x) = y_1 a_1(x) + \dots + y_{n+1} a_{n+1}(x)$

$$p(x_1) = y_1 + 0 = y_1$$
$$p(x_2) = y_2$$
$$\vdots$$
$$p(x) = \sum_{j=1}^{n+1} \left(y_j \prod_{\substack{i=1,\dots,n+1 \\ i \neq j}} \frac{(x - x_i)}{(x_j - x_i)} \right)$$

Es. $(1,2)$ $(3,4)$ $(5,6)$ $p(1)=2$ $p(3)=4$ $p(5)=6$

A voi

α_1 è radice $p(x) = (x-\alpha_1)\, q(x)$ UFD

$$p(x) = \dots (x-\alpha_1)^k \dots$$

$k \overset{def}{:=}$ molteplicità di α_1

Si può definire la derivata formale di un polinomio

$$p(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i x^i$$
$$p'(x) \underset{def}{=} \sum_{i=0}^{m} i\, a_i x^{i-1}$$

$$\big(a(x)\, b(x) \big)' = a'(x)\, b(x) + a(x)\, b'(x)$$

Se α ha molt. k

$p(x) = (x-\alpha)^k q(x)$ $q(\alpha) \neq 0$

$p(\alpha) = 0$ $p'(\alpha) = k(x-\alpha)^{k-1} q(x) + (x-\alpha)^k q'(x)$

$p'(\alpha) = 0$

$\vdots$

$p^{(k-1)}(\alpha) = 0$ $p^{(k)}(x) = k!\, q(x) + (x-\alpha) \cdot \text{ROBA}$

$p^{(k)}(\alpha) \neq 0$

Come sono fatte le radici razionali di un polinomio a coeff. interi?

$$p(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0 \qquad a_i \in \mathbb{Z}$$

Suppongo che $x = \frac{p}{q}$ sia radice $(p,q)=1$

$$a_n \frac{p^n}{q^n} + \dots + a_1 \frac{p}{q} + a_0 = 0$$

$$a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} q + \dots + a_1 p q^{n-1} + a_0 q^n = 0$$

multiplo di p

multiplo di q

$-a_0 q^n$ = multiplo di p

$p \mid a_0 q^n$

$p \mid a_0$

$a_n p^n$ = multiplo di q

$q \mid a_n p^n$

$q \mid a_n$

Conclusione: possono solo essere $\frac{\text{divisori } a_0}{\text{divisori } a_n}$ (con segno)

Conseguenza: Se $a_n = 1$

Un polinomio monico a coeff. interi se ha una radice razionale, questa non può altro che essere intera

($\mathbb{Z}$ è INTEGRALMENTE CHIUSO)

Esercizietto a, b, c distinti interi

$\exists\ p(x)$ a coeff. interi t.c.

$p(a) = b \quad p(b) = c \quad p(c) = a$

Teorema fondamentale dell'algebra

Qualsiasi polinomio a coeff. $\mathbb{C}$ si fattorizza (in modo unico) in prodotto di fattori lineari su $\mathbb{C}$.

$$p(x) = c\prod_{i=1}^{n}(x-\alpha_i)$$

$p \downarrow$ grado n

α_i sono a priori complessi.

α_i potrebbero essere anche uguali

$$x^2+1 = (x+i)(x-i)$$

$$x^n - 1$$

Le soluzioni si chiamano radici n-esime dell'unità

$$\omega = \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) = e^{i\frac{2\pi}{n}}$$

È una radice?

$$\left(e^{i\frac{2\pi}{n}}\right)^n - 1 = \underbrace{e^{i2\pi}}_{=1} - 1 = 0$$

$$\cos 2\pi + i\sin 2\pi, \quad \cos 2\pi = 1, \quad \sin 2\pi = 0$$

Le altre sono $\omega^2, \dots, \omega^{n-1}$ + ω + 1 $\rightarrow$ sono n

$$\omega^2 = e^{i\frac{2\pi}{n}\cdot 2} = \cos\left(\frac{2\pi}{n}\cdot 2\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{n}\cdot 2\right)$$

In generale sono $\omega^k = e^{i\frac{2\pi}{n}\cdot k} = \cos\left(\frac{2\pi}{n}\cdot k\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{n}\cdot k\right)$

$$x^n - 1 \underset{\text{in } \mathbb{C}}{=} \prod_{i=0}^{n-1}(x-\omega^i) \qquad \omega = e^{i\frac{2\pi}{n}}$$

Def. radice primitiva dell'unità (di ordine d) è un numero t.c. $x^d = 1$

$x^i \neq 1 \quad \forall i = 1, \dots, d-1$

Considero $x^n - 1 = 0$ radici n-esime dell'unità

Prendo z una di queste radici.

Essendo $z^n = 1$, $\exists$ il minimo d t.c. $z^d = 1$, ovvero l'ordine di questa radice.

Che relazione c'è fra d e n?

$d \mid n$.

Se n non è multiplo di d, $n = ad + r \quad 0 < r < d$

$$\begin{cases} z^n = z^{ad+r} = 1 \\ z^d = 1 \end{cases} \Rightarrow z^r = 1$$

Ma no! Perché d era il più piccolo

Oss. Radici n-esime dell'unità

$a_1 \mid n$

$a_2 \mid n$

$1 \quad a_1 \quad a_2 \quad \dots \quad n$

ordine

$1 \quad \phi(a_1) \quad \phi(a_2) \quad \dots \quad \phi(n)$

$\phi(n) :=$ # di numeri coprimi con n, + piccoli di n

$\phi(5) = 4 \qquad 1\,2\,3\,4$

$(x - 1)(x - \omega) \dots (x - \omega^{n-1})$

$\uparrow \quad \uparrow$

$1 \quad n$

$$x^n - 1 = \prod_{d \mid n} \Phi_d(x)$$

$$\Phi_d(x) = \prod_{\substack{\alpha_i \\ \text{rad. primitiva} \\ \text{di ordine } d}} (x - \alpha_i)$$ = Polinomio ciclotomico di ordine d

→ I polinomi ciclotomici hanno coeff. interi (X Induzione...)
Esercizio
→ sono irriducibili su $\mathbb{Q}$

$$x^3-1 = \underbrace{(x-1)}_{\substack{\uparrow\\ \text{la radice} \\ \text{di ordine } 1}} \underbrace{(x^2+x+1)}_{\substack{\downarrow \\ (x-\omega)(x-\omega^2) \\ \shortparallel \\ \Phi_3(x)}}$$

$$x^2-1 = \underbrace{(x-1)}_{\substack{\text{la rad.} \\ \text{di ordine } 1}} \underbrace{(x+1)}_{\substack{\text{la rad.} \\ \text{di ordine } -1 \\ \Phi_2(x)}}$$

$$x^4-1 = \underbrace{(x-1)}\ \underbrace{(x+1)}\ \underbrace{(x^2+1)}_{\substack{\downarrow \\ \Phi_4(x)}}$$

$$x^5-1 = (x-1)\underbrace{(x^4+x^3+x^2+x+1)}_{\Phi_5(x)}$$

$$x^6-1 = \underbrace{(x-1)}_{\substack{\text{di ordine} \\ 1}} \underbrace{(x^2+x+1)}_{\substack{\text{di ordine} \\ 3}} \underbrace{(x+1)}_{\substack{\text{di ordine} \\ 2}} \underbrace{(x^2-x+1)}_{\substack{\text{di ordine} \\ 6}} \longrightarrow \Phi_6(x)$$

$$x^7-1 = (x-1)\underbrace{(x^6+x^5+\dots+1)}_{\Phi_7(x)}$$

$$x^8-1 = (x-1)(x+1)\underbrace{(x^2+1)}\ \underbrace{(x^4+1)}_{\text{di ordine } 8} \quad \Phi_8(x)$$

$$x^9-1 = \underbrace{(x-1)}_{1}\underbrace{(x^2+x+1)}_{3}\underbrace{(x^6+x^3+1)}_{9} \longrightarrow \Phi_9(x)$$

Ho una radice primitiva 3^a dell'unità.

$$\Phi_3(x) = x^2+x+1 \longrightarrow \omega^2+\omega+1=0$$

Fattorizzazioni in $\mathbb{R}$

Coniugio $\quad z = a + bi$

$\bar{z} = a - bi$

Mostra $\quad \overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w}$

$\overline{zw} = \bar{z}\,\bar{w}$

$z = a+bi \qquad \{zw\} = (ac-bd) + (ad+bc)i$

$w = c+di \qquad \overline{zw} = (ac-bd) - (ad+bc)i$

$\bar{z} = a-bi \qquad \bar{z}\,\bar{w} = (a-bi)(c-di) =$

$\bar{w} = c-di$

$= ac - adi - bci - bd =$

$= (ac-bd) - (ad+bc)i$

$$\boxed{(\bar{z})^n = \left(\overline{z^n}\right)}$$

$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \qquad \overline{i\mathbb{R}} = -i\mathbb{R}$

1° fatto: Un polinomio a coeff. reali se ha una radice complessa ha anche la sua coniugata come radice

$a_n x^n + \dots + a_0 \qquad a_i \in \mathbb{R}$

$a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0 = 0 \qquad z \in \mathbb{C}$

$\overline{a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0} = \bar{0}$

$\overline{a_n z^n} + \dots + \overline{a_1 z} + \overline{a_0} = 0$

$\overline{a_n}\,\overline{z^n} + \dots + \overline{a_1}\,\bar{z} + \overline{a_0} = 0$

$a_n (\bar{z})^n + \dots + a_1 \bar{z} + a_0 = 0$

$\downarrow$

$\bar{z}$ è una radice

$p(x) = (x-\alpha_1)\cdot\ldots\cdot(x-\alpha_j)\cdot\underbrace{(x-z_1)\cdot(x-\bar{z}_1)}\cdot\ldots$

$\downarrow$

$(x^2 - \bar{z}_1 x - z_1 x + z_1\bar{z}_1)$

$(x^2 - (\bar{z}_1 + z_1)x + z_1\bar{z}_1) \in \mathbb{R}[x]$

$$z_1 = a + bi \qquad z_1 + \overline{z_1} = 2a = 2\,\mathrm{Re}(z_1)$$
$$\overline{z_1} = a - bi \qquad z_1 \overline{z_1} = (a+bi)(a-bi) = a^2 + b^2 = |z|^2$$

<u>Corollario</u> Ogni polinomio su $\mathbb{R}$ si fattorizza come fattori lineari + fattori quadratici

Esercizi
$(64, 65, 69, 70, 74, 75)^{+3}$ pag. 13

11 pag 23

- Per quali n $x^2 + x + 1 \mid x^{2n} + x^n + 1$

$$\begin{cases} x + y + z = a \\ x^2 + y^2 + z^2 = b^2 \\ x^3 + y^3 + z^3 = a^3 \end{cases}$$ Fissati a, b

68 - 72 - 73 - 77 - 78 + sistema + 11 / + $P(a)$ $P(b)$ $P(c)$ + $x^{2n} + x^n + 1$

$a - b \mid b - c$

$a - b \mid a - c$

$a - c \mid b - a$

Su $\mathbb{Q}$

$$1 + x + \dots + x^{1023} \overset{\text{PARZ}}{=} (x+1)(1 + x^2 + \dots + x^{1022}) = \dots$$

Trucco: $$\frac{\boxed{x^{1024} - 1}}{x-1} = \frac{(x^{512}-1)(x^{512}+1)}{x-1} = \frac{\cancel{(x-1)}(x+1)(x^2+1)\dots(x^{512}+1)}{\cancel{x-1}}$$

$$= (x+1)\underbrace{(x^2+1)}_{\Phi_4(x)} \dots \underbrace{(x^{512}+1)}_{\Phi_{1024}(x)}$$

72 $p(2) = a$

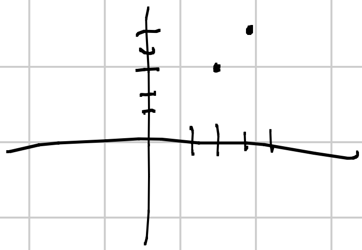
$p(a) = a+2$

Determinare i poss. valori di a.

$$a-2 \mid p(a)-p(2) = 2$$

$$a-2 = \begin{matrix} +1 \\ -1 \\ +2 \\ -2 \end{matrix} \longrightarrow a = \begin{matrix} +3 \\ +1 \\ +4 \\ 0 \end{matrix}$$

- $p(2) = 3$
  $p(3) = 5$
  $p(x) = 2x-1$ ✓



- $p(2) = 1$
  $p(1) = 3$
  $p(x) = -2x+5$ ✓
- $p(2) = 4$
  $p(4) = 6$
  $p(x) = x+2$ ✓
- $p(2) = 0$
  $p(0) = 2$
  $p(x) = -x+2$ ✓

Sia α radice di $x^3 - x + 1$

$$\boxed{\alpha^3 - \alpha + 1 = 0} \xrightarrow{\text{ISOLO}} \alpha = \alpha^3 + 1 \longrightarrow \alpha^3 = (\alpha^3+1)^3 =$$

$$= \alpha^9 + 3\alpha^6 + 3\alpha^3 + 1$$

$$\downarrow$$

$$\alpha^9 + 3\alpha^6 + 2\alpha^3 = -1$$

Quanto vale $\alpha^9 + 3\alpha^6 + 2\alpha^3$?

$$\alpha^3 = \alpha - 1$$

$$\alpha^9 = (\alpha^3)^3 = (\alpha-1)^3 = \alpha^3 - 3\alpha^2 + 3\alpha - 1 =$$

$$= \alpha - 1 - 3\alpha^2 + 3\alpha - 1 =$$

$$= -3\alpha^2 + 4\alpha - 2$$

$$\alpha^6 = (\alpha^3)^2 = (\alpha-1)^2 = \alpha^2 - 2\alpha + 1$$

$$\alpha^3 = \alpha - 1$$

Le sommo $-3\alpha^2 + 4\alpha - 2 + 3(\alpha^2 - 2\alpha + 1) + 2(\alpha - 1)$

$$\cancel{-3\alpha^2} + \cancel{4\alpha} - 2 + \cancel{3\alpha^2} - \cancel{6\alpha} + 3 + \cancel{2\alpha} - 2 = -1$$

$\alpha^3 = \alpha - 1$

Quanto vale $\alpha^{17} - 16\alpha^{14} + \alpha^5$

$\alpha^{17} = \alpha^2 \cdot (\alpha^3)^5 = \dots$

77. (S-G)

$$x^4 + 4y^4 = \overbrace{x^4 + 4x^2y^2 + 4y^4} - 4x^2y^2 =$$
$$= (x^2 + 2y^2)^2 - (2xy)^2 =$$
$$= (x^2 + 2xy + 2y^2)(x^2 - 2xy + 2y^2)$$

78 $(a^2+b^2)(c^2+d^2) =$
$$= a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2 + 2abcd - 2abcd =$$
$$= (ac+bd)^2 + (ad-bc)^2$$

$z = a + bi \qquad |z| = \sqrt{a^2+b^2}$

$w = c + di \qquad |w| = \sqrt{c^2+d^2}$

$zw = (ac - bd) + i(ad + bc)$

$$|zw| = \sqrt{(ac-bd)^2 + (ad+bc)^2}$$
$$\shortparallel$$
$$|z||w|$$
$$\shortparallel$$
$$\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{c^2+d^2}$$

11. $P(z)$ ha grado 2002 $\quad \underbrace{\alpha_i}_{\text{radici}} \neq \alpha_j \quad \forall i, j$

$\exists\, a_1, \dots, a_{2002}$ t.c.

se $P_1(z) = z - a_1$

$P_{n+1}(z) = P_n(z)^2 - a_{n+1}$

allora $P(z) \mid P_{2002}(z)$

Sol. Ho bisogno che $P_{2002}(\alpha_i) = 0 \quad \forall i = 1, \dots, 2002$

Supponiamo $P_{n-1}(\alpha_1) = \dots = P_{n-1}(\alpha_{n-1}) = 0$

Posso scegliere a_n in modo che

$\underbrace{P_n(\alpha_1) = \dots = P_n(\alpha_n)}= 0$?

$$P_n(z) = P_{n-1}(z)^2 - a_n$$

Per avere, ad es., $P_n(\alpha_1) = 0$

$\cancel{P_n(\alpha_1)} = \cancel{P_{n-1}(\alpha_1)}^2 - a_n \rightarrow a_n = 0$

$P_n(\alpha_n) = \underbrace{P_{n-1}(\alpha_n)^2}$

Passo base: Scelgo a_1 in modo che

$$P_1(\alpha_1) = -P_1(\alpha_2)$$

$$\alpha_1 - a_1 = -(\alpha_2 - a_1)$$

$$\alpha_1 - a_1 = a_1 - \alpha_2$$

$$\boxed{\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} = a_1}$$

$$P_1(\alpha_1) = \alpha_1 - a_1 = \alpha_1 - \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} = \frac{2\alpha_1 - \alpha_1 - \alpha_2}{2} = \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2}$$

$$P_1(\alpha_2) = \alpha_2 - a_1 = \alpha_2 - \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} = \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2}$$

Domanda: $P_2(z) = P_1(z)^2 - a_2$

$P_2(\alpha_1) \overset{?}{=} P_2(\alpha_2)$

Quindi

$P_2(\alpha_1) = P_2(\alpha_2)$

Scelgo a_2 in modo che

$$\underset{\left(P_2(\alpha_2)\right)}{\overset{\shortparallel}{P_2(\alpha_1)}} = -P_2(\alpha_3)$$

$$P_1(\alpha_1)^2 - a_2 = -\left(P_1(\alpha_3)^2 - a_2\right)$$

$$P_1(\alpha_1)^2 - a_2 = a_2 - P_1(\alpha_3)^2$$

$$a_2 = \frac{P_1(\alpha_1)^2 + P_1(\alpha_3)^2}{2}$$

$$\begin{array}{ccccccc} & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \dots & \alpha_{2001} & \alpha_{2002} \\ P_2 & k & k & -k & & & \\ P_3 & h & h & h & -h & & \end{array}$$

$\overset{\shortparallel}{P_2^2} - \underline{a_3}$

$$\begin{array}{cccccc} P_{2001} & w & w & \dots & w & -w \end{array}$$

$$P_{2002}(z) = P_{2001}^2(z) - a_{2002}$$

Scelgo $a_{2002} = w^2$, quindi

$$P_{2002}(\alpha_i) = \underset{\underset{w^2}{\shortparallel}}{P_{2001}^2(\alpha_i)} - w^2 \leq 0 \quad \forall i = 1, \dots, 2002$$

Idea: $\underbrace{x^2+y^2+z^2}$

(x,y,z)
(x,z,y)
(y,z,x)
(y,x,z)
(z,x,y)
(z,y,x)

Ogni espressione simmetrica si scrive come funzione delle simmetriche elementari

$s = x+y+z$
$q = xy+yz+xz$
$p = xyz$

$$x^2+y^2+z^2 = (x+y+z)^2 - 2(xy+yz+zx) = s^2 - 2q$$

$$x^3+y^3+z^3 =$$

$$x^3+y^3+z^3 - 3xyz = (x+y+z)(x^2+y^2+z^2 - xy - yz - xz) = s(s^2-3q)$$

$$x^3+y^3+z^3 = s^3 - 3sq + 3p$$

<u>Es.</u> $x^2y + xy^2 + xz^2 + x^2z + yz^2 + y^2z$

$\vdots$