Algebra 3

Titolo nota — marzo — 26/08/2015

Successioni, ricorrenze, eq. funzionali.

(I) Progressioni aritmetiche e geom.

$x_0, x_1, x_2, x_3, \dots$ in progr aritm.

★ se $x_n - x_{n-1}$ è costante $\rightsquigarrow d$ RAGIONE

★ $\Leftrightarrow$ $\dfrac{x_{n+1} + x_{n-1}}{2} = x_n$

es $0, 1, 2, 3, 4, \dots$

$x_n = ?$ in termini di x_0, n, d

$$x_n = x_0 + nd$$

$x_0, x_1, \dots, x_n, \dots$ in progr geom se:

★ $\sqrt{x_{n+1} \cdot x_{n-1}} = x_n \quad \forall n$

$\Updownarrow$?

★ x_{n+1}/x_n è costante $\rightsquigarrow \alpha$

$1, 2, 4, 8, 16 \dots$

$1, 0, 0, 0, 0, \dots$

$X_n = ?$ $\qquad\qquad$ $X_n = X_0 \cdot \alpha^n$.

---

oss. se $\alpha > 0$, $X_0 > 0$ $\qquad$ ARITM $\longleftrightarrow$ GEOM

X_n geom $\Longrightarrow$ $\log X_n$ aritm.

Succ. per ricorrente:

$$A: \begin{cases} X_0 = X_0 \\ X_{n+1} = X_n + d \end{cases}$$

$$G: \begin{cases} X_0 = X_0 \\ X_{n+1} = \alpha X_n \end{cases} \qquad S: \begin{cases} X_0 = 2 \\ X_{n+1} = \text{num. di lettere che mi muovo per scrivere } X_n \end{cases}$$

$$S: \begin{cases} X_0 = 12 \\ X_{n+1} = \text{num di divisori di } X_n + \text{num. di potenze di } X_{n-3} \text{ che sono} < 1000000 \end{cases}$$

- Ce ne sono alcune che sono più "ragionevoli".

"lineari"

$$\begin{cases} X_0 = X_0 \\ X_{n+1} = a X_n + b \end{cases}$$

X_n in funzione dei parametri (a, b, X_0) ed n!

X_0

$X_1 \quad aX_0 + b$

$X_2 \quad a^2 X_0 + ab + b$

$X_3 \quad a^3 X_0 + a^2 b + ab + b$

$X_4 \quad a^4 X_0 + a^3 b + a^2 b + ab + b$

$\vdots$

quindi $\quad x_n = a^{n} \cdot x_0 + b\left(a^{n-1} + a^{n-2} + \dots + a + 1\right)$

dim (per induzione).

in alternativa: $\Rightarrow \; y_{n+1} = a y_n \leftarrow$ la forma

$$x_n = y_n + k \quad \text{per un certo } k.$$

$$x_{n+1} = a x_n + b$$

$$y_{n+1} - k = a(y_n - k) + b$$

$$y_{n+1} = a y_n + \boxed{b + k - ak}$$

$= 0$ se

$b + k - ak = 0$

$\Rightarrow (1-a)k = -b$

$\Rightarrow k = b/(a-1)$

$x_n - \frac{b}{a-1}$ è una progr. geom. di ragione $\alpha = a$ che parte da $x_0 - \frac{b}{a-1}$

$$x_n - \frac{b}{a-1} = a^n\left(x_0 - \frac{b}{a-1}\right) \Rightarrow x_n = a^n x_0 + \frac{1-a^n}{1-a} b$$

es trovare l'errore !

Succ. per ricorrenza da due termini precedenti:

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1}, \quad F_0 = 0, \; F_1 = 1$$

0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377 ...

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right). \quad ?!$$

$$\begin{cases} x_{n+1} = a x_n + b x_{n-1}. \\ x_0 = \text{fissato}. \\ x_1 = \text{fissato}. \end{cases}$$

Sarà mica che $x_n = \lambda^n$ funziona? (cioè soddisfa la ricors.)

$$x_n = \lambda^n \rightsquigarrow \lambda^{n+1} = a\lambda^n + b\lambda^{n-1} \rightsquigarrow$$

$$\lambda^2 - a\lambda - b = 0 \implies \lambda \text{ radice di } x^2 - ax - b.$$

λ, μ

$x_n = \alpha\lambda^n$ e $x_n = \beta\mu^n$ funzionano.

$x_n = \alpha\lambda^n + \beta\mu^n$ funziona!

Sono tutte?

$x_0 = \text{fissato} \longrightarrow x_0 = \alpha\lambda^0 + \beta\mu^0$

$x_1 = \text{fissato} \longrightarrow x_1 = \alpha\lambda + \beta\mu$

da questo si ricavano α e β.

Se $\lambda = \mu$:

$$\begin{cases} \alpha + \beta = x_0 \\ \lambda\alpha + \mu\beta = x_1 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} \alpha + \beta = x_0 \\ \alpha + \beta = x_1/\lambda. \end{cases}$$

Se $\lambda = \mu$ cerco anche sol. della forma $x_n = n \cdot \lambda^n$.

es. verificare che funziona (e che si possono ricavare α, β).

Fibonacci: $x^2 - x - 1 = 0$

$$\frac{1+\sqrt{1+4}}{2} = \phi \quad \text{(RAPP. AUREO)}$$

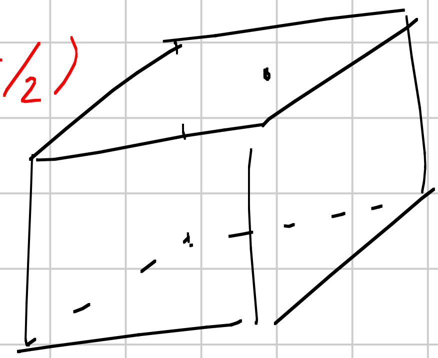
$$\frac{1-\sqrt{1+4}}{2} = -\frac{1}{\phi} = \psi$$

$$F_n = \alpha\phi^n + \beta\psi^n$$

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 0 & \rightarrow \alpha = -\beta \\ \alpha\varphi + \beta\psi = 1 & \rightarrow (\varphi - \psi)\cdot\alpha = 1 \end{cases}$$

$$\alpha = \frac{1}{\varphi - \psi} = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

es (SNS '15/2)



la parte dal soffitto / pavim.

Gn $1/5$ → soffitto / pavim.

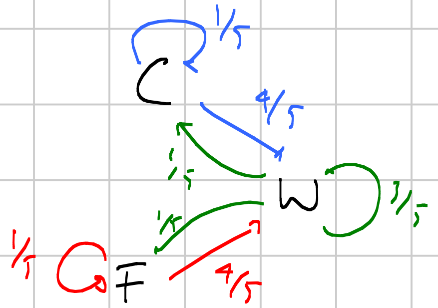
GL $1/5$ → in una delle 4 pareti.

la parte da 1 parete → $1/5$ soffitto, → $1/5$ pavim., → $1/5$ su una delle altre pareti

qual è la prob. che al passo n-esimo sia sul soffitto.

Diamo dei nomi: w_n (pareti), f_n (pavim.), c_n (soffitto).

$$(w_0, f_0, c_0) = (0, 0, 1)$$



$$\begin{cases} W_{n+1} = \frac{4}{5} C_n + \frac{3}{5} W_n + \frac{4}{5} f_n \\ C_{n+1} = \frac{1}{5} C_n + \frac{1}{5} W_n \\ f_{n+1} = \frac{1}{5} f_n + \frac{1}{5} W_n \end{cases}$$ $\longleftarrow$ ulate

$C_n = ?$

<u>osi</u> $d_{n+1} = C_{n+1} - f_{n+1} = \frac{1}{5}(C_n - f_n) = \frac{d_n}{5}$

$$d_n = \left(\frac{1}{5}\right)^n \implies C_n = f_n + \left(\frac{1}{5}\right)^n$$

$$\begin{cases} W_{n+1} = \frac{4}{5} C_n + \frac{3}{5} W_n + \frac{4}{5}\left(C_n - \left(\frac{1}{5}\right)^n\right) \\ C_{n+1} = \frac{1}{5} C_n + \frac{1}{5} W_n \end{cases} \rightsquigarrow W_n = 5C_{n+1} - C_n$$

$$\hookrightarrow \begin{cases} W_{n+1} = \frac{8}{5} C_n + \frac{3}{5} W_n - \frac{4}{5}\left(\frac{1}{5}\right)^n \\ \text{---} \rightsquigarrow C_{n+2} = \frac{1}{5} C_{n+1} + \frac{1}{5} W_{n+1} \end{cases}$$

$$C_{n+2} = \frac{1}{5} C_{n+1} + \frac{8}{25} C_n + \frac{3}{25} W_n - \frac{4}{25}\left(\frac{1}{5}\right)^n$$

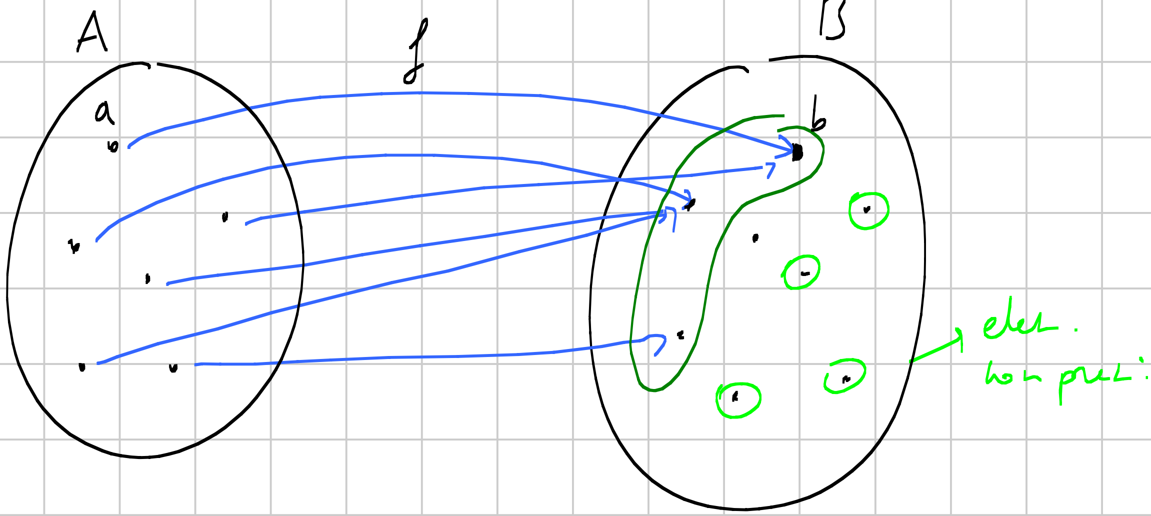
$$C_{n+2} = \frac{1}{5} C_{n+1} + \frac{8}{25} C_n + \frac{3}{5} C_{n+1} - \frac{3}{25} C_n - \frac{4}{25}\left(\frac{1}{5}\right)^n.$$

$$C_{n+2} = \frac{4}{5} C_{n+1} + \frac{1}{5} C_n \left(- \frac{4}{25}\left(\frac{1}{5}\right)^n\right) \longrightarrow \text{ignore}$$

$$C_{n+3} = \frac{4}{5} C_{n+2} + \frac{1}{5} C_{n+1} - \frac{1}{5} \cdot \left[\frac{4}{25} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^n\right]$$

Equaz. funzionali.

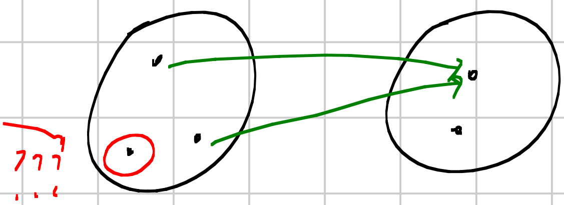
Un'eq. funz. è un'equazione la cui incognita è una funzione.



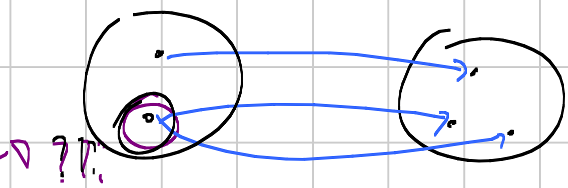
$f : A \longrightarrow B$ $\qquad$ $f(a) = b$

$f : a \longmapsto b$ $\qquad$ `$\mapsto$`

non è una funzione:



f è obbligata a rispondere ad un elem. $a \in A$, è obbligata a dirgli esattam. dove andare.



funzione $\neq$ formula.

$f : A \longrightarrow B$

dominio (A) $\qquad$ codominio (B)

$f(A) = \{$elem. colpiti$\}$

$= \underline{\text{immagine}}$ di f.

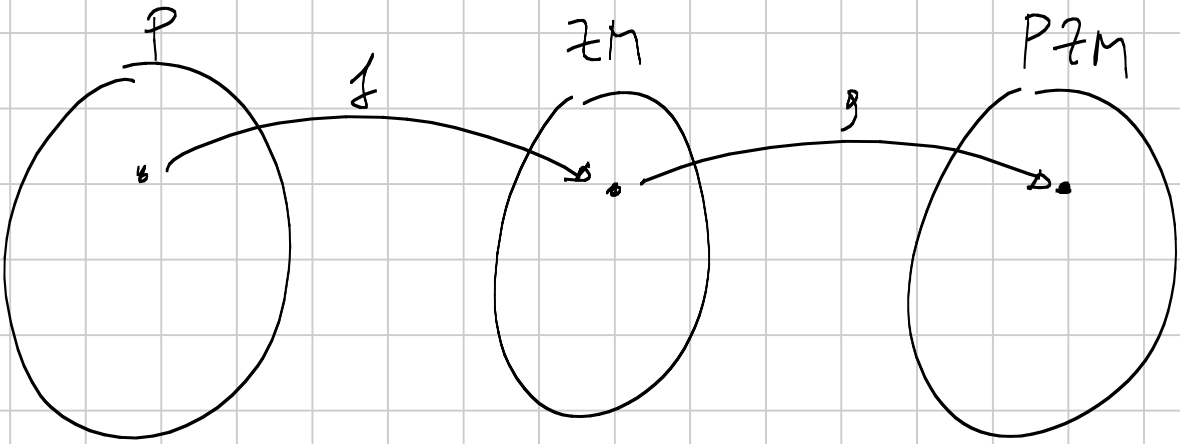
nota: $f(A)$ può essere più piccolo di B.

- f si dice suriettiva (surgettiva) se $f(A) = B$

- f si dice iniettiva se $f(a) = f(a') \Rightarrow a = a'$.

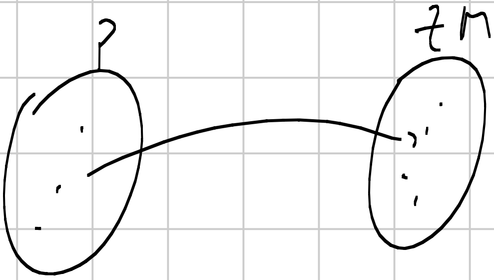
$$a \neq a' \Rightarrow f(a) \neq f(a').$$

Date due funzioni, ogni tanto si possono comporre

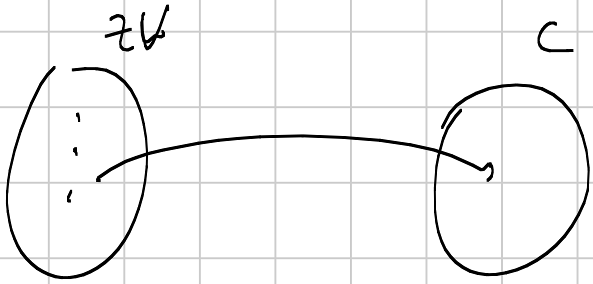


$\longrightarrow$ $g(f(x)) : x \longmapsto f(x) \longmapsto g(f(x))$. :)

$\approx$ $(g \circ f)(x)$ ("prima f"). :(



?!! no componibili



es $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ t.c. $(f(x))^2 = x^2 \ \forall x$.

$$f(x)^2 = x^2 \iff f(x) = \pm x$$

può dipendere da x!!

$f(x) = x$

due soluzioni. NO

$f(x) = -x$

molto sbagliato.

$f(x) = |x|$, $f(x) = -|x|$.

$$f(x) = \begin{cases} x & x \in \mathbb{Q} \\ -x & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}.$$

le sol. sono una marea!

Sost., ad ogni punto x associata un segno (a caso).

$f(0) = 0$. (unica certezza).

es. se f è crescente $\Rightarrow f(x) = x$

es (equazione di Cauchy) trovare tutte le $f: \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$

tali che $f(x+y) = f(x) + f(y) \quad \forall x,y \in \mathbb{Q}$

metto $x=y=0$: $\cancel{f(0+0)} = \cancel{f(0)} + f(0) \Rightarrow f(0) = 0$.

mettere $y=0$: $f(x) = f(x) + f(0)$ .. non dà altre info.

metto $x=y=1$: $\boxed{f(2) = 2f(1)}$

metto $x=2, y=1$: $f(3) = f(2) + f(1) = 3f(1)$.

$f(n)$? mi aspetto $f(n) = n f(1)$. (induzione)

$f(1)$ determina $f(n)$ $\forall n$.

metto $x=y$ $\quad f(x+x) = f(x) + f(x) \longrightarrow f(2x) = 2f(x)$

metto $y=2x$ $\quad f(3x) = f(2x) + f(x) = 3f(x)$.

(stessa ind.)

$$f(nx) = n f(x). \qquad (\star)$$

Voglio calcolare $f(1/2)$. Uso $(\star)$ con $n=2$, $x=1/2$.

$$f(2 \cdot 1/2) = 2 \cdot f(1/2) \Rightarrow f(1/2) = \tfrac{1}{2} f(1)$$

$f(1/3)$? $\quad f(1/3) = 1/3 \cdot f(1)$ .. $\quad f(1/n) = \frac{1}{n} f(1)$

$$f(a/b) = f(a \cdot 1/b) = a \cdot f(1/b) = \frac{a}{b} f(1)$$

Chiamiamo $k = f(1)$.

Se f è una sol., allora $f(x) = kx$.

<u>NON</u> abbiamo finito!

$f(x) = kx$ soddisfa l'eq. iniziale?

$$k(x+y) = f(x+y) = f(x) + f(y) = kx + ky. \quad \text{ok.}$$

Upgrade: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$?

Ci sono una marea di soluzioni dell'eq. di Cauchy

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \quad \text{sui reali.}$$

es
- f è limitata sull'intervallo $[0,1]$ $\Longrightarrow$ sol. è det.

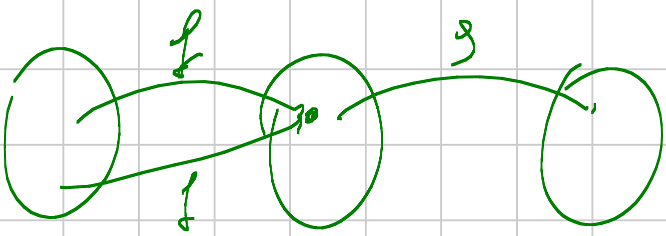
  $\exists M > 0$ costante t.c. $f(x) \leq M \quad \forall x \in [0,1]$.
- f è monotòna (cioè cresc. o decrescente)
- f è continua.

es trovare tutte le $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ t.c.

$$f(f(n)) = n+1 \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

oss! f è iniettiva.

[più in generale, se $g \circ f$ è iniettiva allora f è iniettiva]

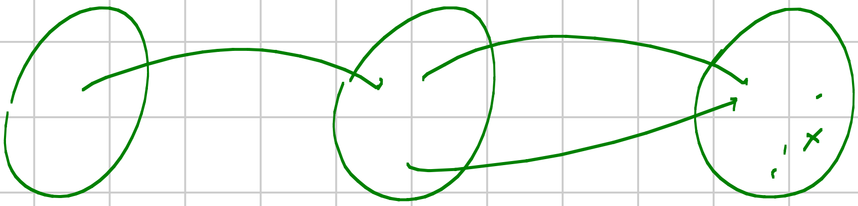


$f(x) = x \qquad g(x) = x^2$

$f: \mathbb{N} \to \mathbb{Z} \qquad g: \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$

oss 2 f è suriettiva.

[in gen. se $g \circ f$ è suriettiva, allora g è suriettiva]



oss $3 = 1+2$ f è bigettiva. (iniettiva + suriettiva).

$$f(f(n)) = n+1.$$

$$f(n)+1 = \underbrace{f(f}(f(n))) = f(n+1)$$

Sto applicando $f(f(x)) = x+1$ con $x = f(n)$.

$\to$ questo ci dice che $f(n) = f(0)+n \quad \forall n.$

(sembra venire per induzione) $\to$ avanti e indietro!

quanto può fare $f(0)$?

applico con $n = f(0)$

$$f(f(0)) = 1$$

$$f(0) + f(0) = 2f(0) \longrightarrow 2f(0) = 1. \ ↯.$$

non ha soluzioni.

es 90, 91 p. 16~

es 4, 6, 7, 9, 10 p. più avanti

es 4 $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monotone t.c.

$$f(x+f(y)) = y + f(x)$$

$\to f(?)$

$x=0$: $f(f(y)) = \underbrace{y + f(0)}_{\text{bijettiva!}}$ $\Rightarrow f$ bijettiva

$y=0$ $f(f(0)) = 0 + f(0) \Rightarrow \cancel{f}(f(0)) = \cancel{f}(0) \Rightarrow$

$f(0) = 0$.

(basta l'iniettività di f).

$\Rightarrow f(f(y)) = y \quad \forall y$.

monotone $\longrightarrow$ Cauchy?

Come si rende più Cauchy? $\boxed{y = f(z)}$

$$f(x + \underbrace{f(f(z))}) = f(x) + f(z)$$

$$f(x+z) = f(x) + f(z) \xrightarrow{\text{Cauchy}} f(x) = kx \quad \forall x$$

$$f(x + f(y)) = k(x + ky) = kx + k^2 y$$

$$y + f(x) = y + kx$$

$$\cancel{kx} + k^2 y = y + \cancel{kx} \Longleftarrow k = \pm 1 .$$

$$\cancel{f(x) = \pm x} \qquad f(x) = x$$

$$f(x) = -x \qquad \text{Sol. } f(100) = \pm 100 .$$

es 6

$$x_{n+1} = 6x_n - 2\sum_{k=0}^{n} x_k = 6x_n - 2x_n - 2\sum_{k=0}^{n-1} x_k$$

$$- \qquad x_n = 6x_{n-1} - 2\sum_{k=0}^{n-1} x_k$$

$$x_{n+1} - x_n = 6x_n - 6x_{n-1} - 2x_n$$

$$x_{n+1} - \cancel{x_n} = \cancel{4}^{\,5} x_n - 6x_{n-1}$$

$$x^2 - 5x + 6 \begin{cases} 2 \\ 3 \end{cases}$$

Cavillo: ricavo x_1 dalle condizioni iniziali

$$x_1 = 6x_0 - 2x_0 = 4$$

es 7 idea $\frac{\sqrt{2}}{4}(1+\sqrt{2})^n \rightsquigarrow$ compare nella sol. di un'eq. per ricorrenza a 2 termini.

$$\frac{\sqrt{2}}{4}(1+\sqrt{2})^n + \beta(\sqrt{2}-1)^n$$

→ Sol. gen. di una ricorsione

$$X_n = a X_{n-1} + b X_{n-2}$$

$$x^2 - ax - b = \left(x - (\sqrt{2}+1)\right)\left(x - (\sqrt{2}-1)\right)$$

$$= x^2 - x\sqrt{2} + 1$$

prendo $1-\sqrt{2}$ invece di $\sqrt{2}-1$

$\rightsquigarrow$

$$x^2 - 2x - 1$$

$$X_{n+1} = 2X_n + X_{n-1}$$

prendo $\beta = -\frac{\sqrt{2}}{4}$ e prego che vengano interi:

$$X_0 = 0$$

$$X_1 = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left((\sqrt{2}+\cancel{1}) - (\cancel{1}-\sqrt{2})\right) = 1$$

X_i interi.

posso ricavare le classi di resto di X_i mod 7

$$X_n = \frac{1}{2\sqrt{2}}(1+\sqrt{2})^n - \frac{1}{2\sqrt{2}}(1-\sqrt{2})^n$$ → molto piccolo

per $n>2$ X_n è l'intero più vicino a $\frac{1}{2\sqrt{2}}(1+\sqrt{2})^n$

e per n pari $X_n = \left\lfloor \frac{(1+\sqrt{2})^n}{2\sqrt{2}} \right\rfloor$

per n dispari $X_n = \lceil \quad \rceil = \lfloor \quad \rfloor + 1$

es 9 Modo contoso: $X_n = \alpha\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \beta\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$

per qualche α e β.

Compaiono al mod delle $\sqrt{5}$ (al denom.)

$$X_{4091} = \alpha \cdot \sum_{k=0}^{4091} \binom{4091}{k} \frac{\sqrt{5}^k}{2^n} + \beta \sum_{k=0}^{4091} \binom{4091}{k} \frac{(-\sqrt{5})^k}{2^n}$$

Se α e β sono fatti bene tutte le cose con $(\sqrt{5})^{2h+1}$ si semplificano

↳ resta una cosa che non ha più delle radici.

Modo furbo Ricavare le sol. della sequenza mod. 4091.

λ^n sarà una sol. della ricorsione?

$$\lambda^2 - \lambda - 1 = 0 \pmod{4091}$$

$$\lambda^2 - 2 \cdot \overset{e}{\cancel{\left(\tfrac{1}{2}\right)}} \cdot \lambda - 1 \equiv 0$$

e = inv. di 2 mod 4091

$$\lambda^2 - 2\cdot 2046\cdot\lambda + (2046)^2 \equiv 2046^2 + 1$$

$$(\lambda - 2046)^2 \equiv 1023 + 1 = 1024 = 32^2$$

$$2046^2 = \left(\frac{4091+1}{2}\right)^2 = \boxed{\cancel{\frac{4091}{2}\left(\frac{4091+1}{2}\right)}} + \frac{4091+1}{4}$$

$$\frac{2046}{2} = 1023$$

$$\lambda - 2046 \equiv \pm 32 \pmod{4091}.$$

$$\lambda_1, \lambda_2 = 2046 \pm 32$$

$\alpha\cdot\lambda_1^n + \beta\cdot\lambda_2^n$ sono tutte le sol.

$$X_{4091} = \alpha\cdot\lambda_1^{4091} + \beta\cdot\lambda_2^{4091} \equiv$$

$$\equiv \alpha\cdot\lambda_1 + \beta\lambda_2 \equiv X_1 = 1$$

$$X_{4091} - 1 \equiv 0 \pmod{4091}$$

<u>es 10</u> $\quad f(xf(x) + f(y)) = f(x)^2 + y$

$x = 0$, $\quad f(f(y)) = f(0)^2 + y \Rightarrow f$ bijettiva

$0 = f(f(0)) = f(0)^2 \qquad f(0) = 0$

$\exists\, \alpha$ t.c. $f(\alpha) = 0 \qquad x = \alpha \qquad f(f(y)) = y$

Sost. a x $f(z)$

$$x f(x) = f(z) \cdot f(f(z)) = z \cdot f(z)$$

$$\begin{cases} f(z \cdot f(z) + f(y)) = \underbrace{f(f(z))^2}_{= z^2} + y \\ f(z \cdot f(z) + f(y)) = f(z)^2 + y \end{cases}$$

$\Rightarrow$ $f(z) = \pm z$ (segno dipende da z)

Suppongo che ci siano x, y t.c. $f(x) = x$, $f(y) = -y$

$$f(x^2 - y) = x^2 + y$$

$\downarrow$

$x^2 - y$ $\qquad$ Sol se $y = 0$

$-x^2 + y$ $\qquad$ Sol se $x = 0$

$\Rightarrow$ $f(x) = x$, $f(x) = -x$ uniche sol.