Combinatoria 1 - Basic TESS

Titolo nota 22/08/2015

- Conteggi
- Double-Counting (D-C)

Conteggi

- somma $A = B \cup C$, $\boxed{B \cap C = \emptyset}$ DISGIUNTI
  $\Rightarrow \#A = \#B + \#C$

- prodotto $A = B \boxed{\times} C$ INDIPENDENTI
  $\Rightarrow \#A = \#B \cdot \#C$

Es banali

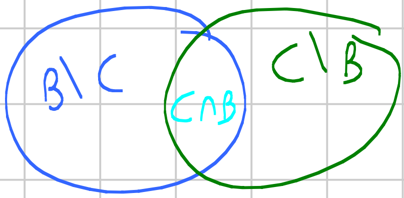
Permutazioni $= n!$

Funzioni da A a B $= \#B^{\#A}$

Coeff. Binomiali $[x^k y^{n-k}] (x+y)^n =: \binom{n}{k}$

Principio Inclusione-Esclusione

$A = B \cup C$, ma non so niente di $B \cap C$



$= A = B\setminus C \cup C\cap B \cup C\setminus B$

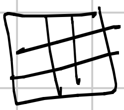
$$\#A = \#B\setminus C + \#C\cap B + \#C\setminus B$$
$$= \#B + \#C\setminus B$$
$$= \#B + \#C - \#C\cap B$$

In generale:

$$A = \bigcup_{i=1}^{n} B_i$$

$$\#A = \sum_{i=1}^{n} \#B_i - \sum_{i,j=1,\, i\neq j}^{n} \#(B_i\cap B_j) + \sum_{i,j,k} \#(B_i\cap B_j\cap B_k) - \dots + (-1)^n \#\bigcap_{i=1}^{n} B_i$$

T1 - 2015 n° 5



colorare con 2 colori
senza sottoquadrati 2x2 tutti bianchi

i B_i sono gli insiemi che contengono le colorazioni con l'i-esimo angolo 2x2 bianco e nessuna condizione sui colori delle altre caselle

configurazioni buone =

Σ tutte le conf. possi $-$ Σ quelle con 1 2x2 bianco
$+$ Σ quelle con 2 2x2 bianchi $-$ ... 3 $+$ ... 4

$= 2^9$ $\quad = 4\cdot 2^5$

$= 4\cdot 2^3 + 2\cdot 2^2$ $\quad = 4\cdot 2^1$ $\quad = 1$

Le funzioni surgettive da A a B

di funzioni surg. =

di tutte $-$ # funzioni che lasciano 1 elemento
$+$ ... ne lasciano 2 $-$ 3 $+$ ...
=

#A = a
#B = b

$$b^a - b(b-1)^a + \binom{b}{2}(b-2)^a - \dots + (-1)^n\binom{b}{n}(b-n)^a + \dots$$

TF 2014 n° 4

Quante sono le funzioni da $f:\{1,\dots,2014\}\to\{1,\dots,4\}$
con $\#\mathrm{Im} f = 3$

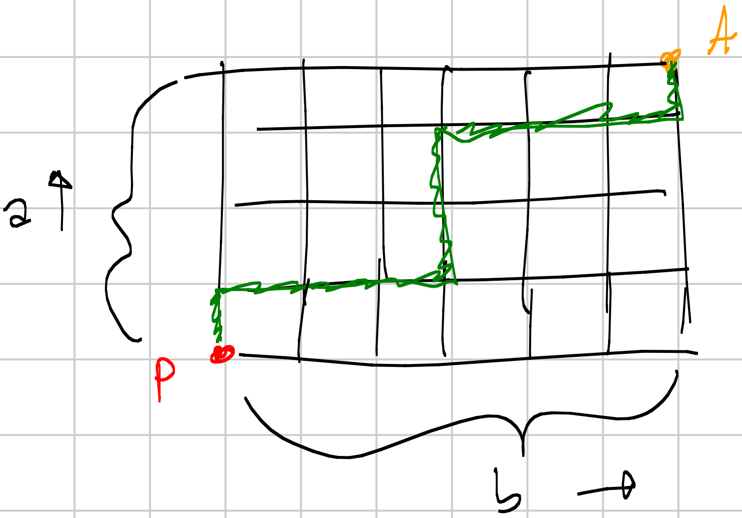
Sol: $4\cdot 3^{2014} - \binom{4}{2}\cdot 2^{2014} + \binom{4}{3}\cdot 1^{2014}$

- bigezione

$f : A \to B$ bigettiva

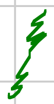
$\# A = \# B$

Es: i cammini monotoni



I passi consentiti sono solo ↑ o →

$f : \{\text{cammini monotoni}\} \to \{\text{stringhe di } \overset{\#a}{\uparrow} \text{ e } \overset{\#b}{\rightarrow}\}$

a  associo $\uparrow \rightarrow \rightarrow \rightarrow \uparrow \uparrow$ _ _

$f^{-1}(f) = Id$

$\Rightarrow$ # cammini monotoni sono $\binom{a+b}{b}$

IMO 2011 - 4

n pesi $2^0, 2^1, \dots, 2^{n-1}$

da mettere su una bilancia a 2 piatti

Contare il numero di modi di piazzarli in modo che dopo ogni aggiunta di un peso il piatto a destra sia + pesante di quello a sx

Sol: cerco di ricondurmi al caso n-1

Chiamo $A_n = \{$ modi di piazzare n pesi $\}$

Cerco una mappa $f : A_n \to A_{n-1}$

$f(\text{modo}_n)$ = la sequenza dei pesi trascurando il più piccolo (2^0)

$2^3 d, 2^4 d, 2^2 s, 2^0 s, \dots$

$\downarrow f$ $\quad$ $\times$

$2^3 d, 2^4 d, 2^2 s, \dots$

$\downarrow g$ (dimezzo i pesi)

$2^2 d, 2^3 d, 2^1 s, \dots$

$g \circ f$ è la vera funzione

Quante volte ottengo la sistemazione X

il peso 2^0 — al primo posto $\to 1$

al secondo $\to 2$

⋮

all'ultimo posto $\to 2$

ci sono sempre $2n-1$ sistemazioni con n pesi che vengono mappate nella sistemazione X ($\forall$ scelta di X)

$$\# A_n = (2n-1) \cdot \# A_{n-1}$$

$$\# A_n = (2n-1)!! = (2n-1)(2n-3) \cdot \ldots \cdot 1$$

- ricorsione

legge su una successione $a_0, a_1, a_2, \ldots$

$$a_{n+1} = f(a_n) \quad \text{es. base}$$

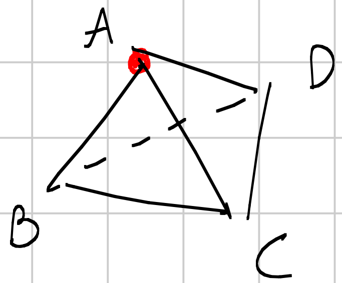
$$a_{n+1} = f(a_n, a_{n-1}, \ldots, a_{n-k})$$

$$a_{n+1} = f(a_n, \ldots, a_1)$$

ancora + complicato

$$a_{n+1} = f(a_n, \ldots, a_1, n)$$

es. fattoriale $f_n = n \cdot f_{n-1}$



la pulce saltella di vertice in vertice, partendo da A

Calcolare (ricorsivamente) il numero di modi di tornare in A dopo n salti

È utile distinguere dove si può trovare la pulce dopo n salti

distinguo A_n := # modi per tornare in A
B_n := # modi per non tornare in A

$$\begin{cases} A_n = B_{n-1} \\ B_n = 3 \cdot A_{n-1} + 2 \cdot B_{n-1} \end{cases}$$

$$\rightsquigarrow \quad A_{n+1} = 2A_n + 3A_{n-1}$$

$A_0 = 1$, $A_1 = 0$; $A_2 = 3$, $A_3 = 6$, $A_4 = 21$

Problema per casa: la pulce si muove su un cubo

D - C

L'idea è cercare di calcolare (o stimare) una quantità in modi diversi

Es banale (ma non troppo)

voglio calcolare $\sum_{i=1}^{n} i$

1	2	3	...	n
n	...	3	2	1

$\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{n}$

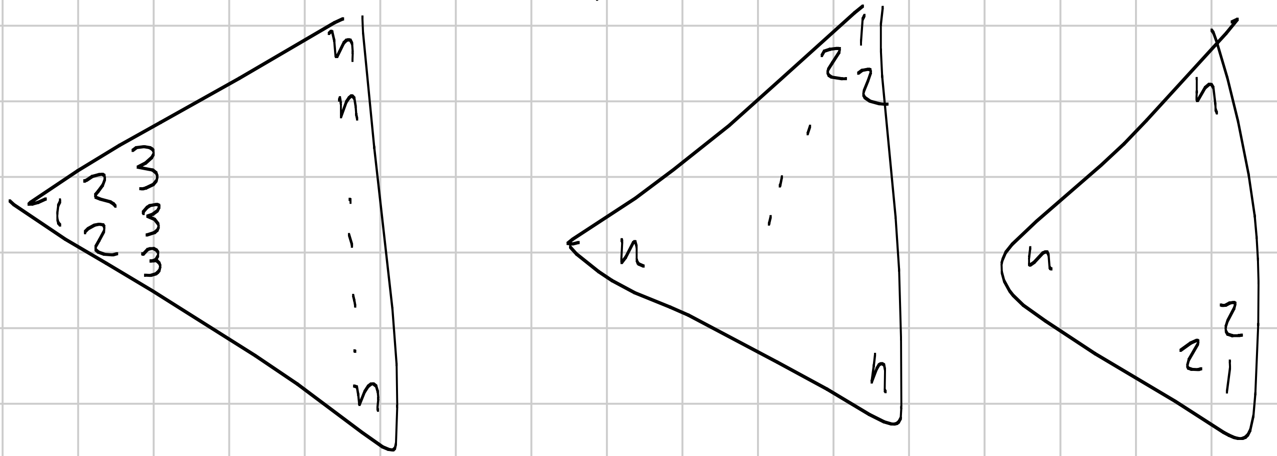
Sia Q la somma della tab

$$2\sum_{i=1}^{n} i = Q = n\cdot(n+1)$$

per righe   per colonne

Es 2:

voglio sommare $\sum_{i=1}^{n} i^2$



poi metto in pila i 3 piani

$$3\sum_{i=1}^{n} i^2 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{per piani}}}{=} Q \underset{\substack{\uparrow \\ \text{per colonne}}}{=} (2n+1)\cdot \#\text{colonne}$$

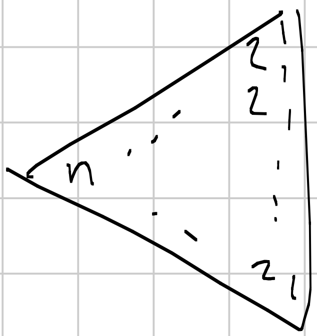
$$\#\text{colonne} = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$(2n+1)\,\frac{n(n+1)}{2}$$

T1 2015 n° 6

Voglio calcolare $\displaystyle\sum_{i=1}^{2014} i\,(2015-i)$

$$\sum_{i=1}^{n} i\,(n+1-i)$$



faccio le 3 rotazioni e le impilo

$$3\sum_{i=1}^{n} i\,(n+1-i) = Q = (n+2)\,\frac{n(n+1)}{2}$$

(nell'es 6 $\displaystyle\sum_{\sigma\in I} f(\sigma)$)

11 D-C dimostra P.I.E.

vogliamo calcolare la cardinalità dell'unione di insiemi qualsiasi

$$\# \bigcup B_i = \sum \# B_i - \sum \# B_i \cap B_j + \ldots$$

mi chiedo un elemento $x \in \bigcup B_i$ quante volte compare a dx

es $x \in \bigcup_I B_i \setminus \bigcup_J B_j$

IMO 2015 n° 1

$S = \{$ alcuni punti nel piano $\}$

S è equilibrato se $\forall A, B \in S$ $\exists C \in S : AC = BC$

S è eccentrico se $\forall A, B, C \in S$ non $\exists P \in S : PA = PB = PC$

per quali n esiste un equ e ecc?

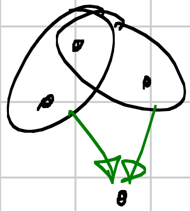
Soluzione

con 4 mi pare di non riuscirci

la prima cond. mi fornisce una funzione

$f : \{\text{coppie in } S\} \to S$

se $\#S = 4$ ho 6 coppie
un punto viene preso da 2 coppie



conto le coppie su n elementi $\binom{n}{2}$

conto (anzi stimo) quante coppie forniscono lo stesso punto equidistante

Prendiamo il punto P che è immagine (secondo f) di più coppie sia Q il numero di volte che è imm.

se voglio ecc $\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor \geq Q$

per pigeonhole $Q \geq \left\lceil \frac{\binom{n}{2}}{n} \right\rceil$

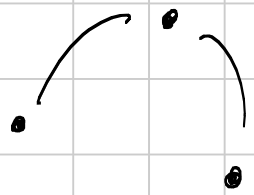
$$\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor \geq \left\lceil \frac{n(n-1)}{n \cdot 2} \right\rceil$$

$$\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor \geq \left\lceil \frac{n-1}{2} \right\rceil$$

Per n pari non ho speranza.

Grafo

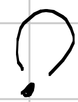
(V, E) $\quad$ V è l'insieme dei vertici
e $E \subseteq V^2$ è l'insieme degli archi



se il grafo è non orientato
allora $(v_i, v_j) \in E$
$\Rightarrow (v_j, v_i) \in E$

altrimenti è detto orientato - diretto

tante volte non c'è (v_i, v_i)



dato $v_i \in V$, $deg(v_i) = \#$ archi che coinvolgono v_i

$$\sum_{v_i \in V} deg(v_i) = ?$$

un arco, che contributo dà a questa somma?

$$\sum_{v_i \in V} deg(v_i) = \sum_{e_i \in E} 2 = 2\#E$$

Es dal Senior 2002 C1 - 10

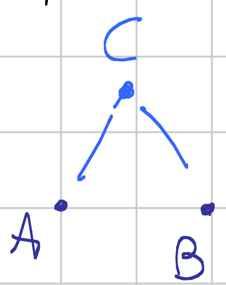
sono in un grafo :

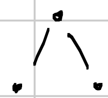
$\#V = 12k$

$\forall A \in V, \quad \deg(A) = 3k+6$

$\forall A, B \in V, \quad \exists^{\text{esattamente}} N$ vertici che sono collegati a entrambi

Le ipotesi parlano di strutture del tipo



Sia Q = il numero di  nel grafo

$$\binom{12k}{2} \cdot N = Q = 12k \cdot \binom{3k+6}{2}$$

conto per gli estremi

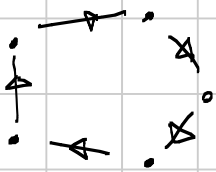
conto per vertici

$$N = \frac{12k \binom{3k+6}{2}}{\binom{12k}{2}} = P(k) + \frac{R(k)}{D(k)}$$

viene intero solo per $k = 3$

Esercitazione

20 città 18 aerei

- 
- $\forall$ città $\exists \geq 3$ aerei che la visitano

- $\forall$ arco, $\exists \leq 1$ aereo che lo percorre

Dimostrare che il grafo è connesso

Dimostrare che non potete spaccare il grafo in 2 o più componenti connesse

Altri esercizi:

P. 18 97, 104-106
alcuni punti (≥ 2) degli es. 114, 115, p. 19

- Ad uno stage prendono parte 72 stagisti. Al test ciascuno risolve almeno un esercizio. Dimostrare che $\exists$ un insieme non vuoto di problemi t.c. il numero di stagisti che li ha risolti tutti è pari

- Un quadrato 6X6 è tassellato con 2X1. Dimostrare che esiste un taglio orizz. o verticale del quadrato 6x6 che non taglia nessun 2x1

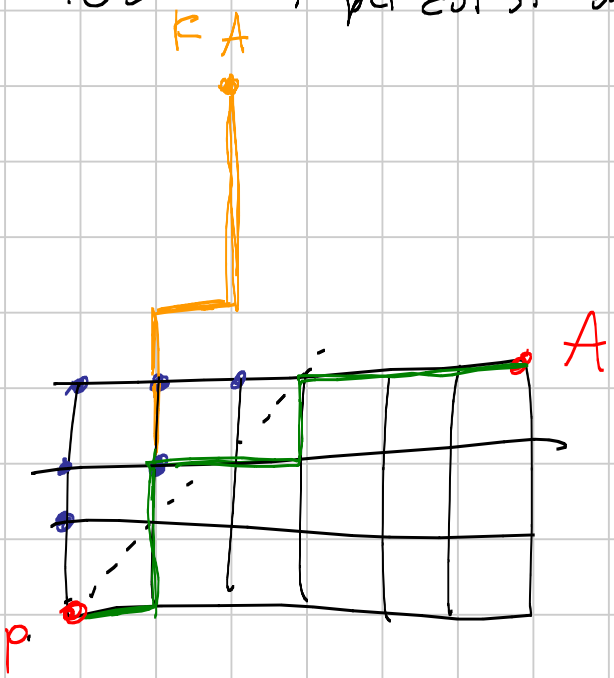
Soluzione problemi dell'esercitazione

Es 104-106

104 - 2ª parte $\qquad \#\text{modi} = \dfrac{(m+n+p)!}{m!\,n!\,p!} =: \dbinom{m+n+p}{m,n,p}$

105 tutti i possibili - tutti i cattivi (passano per (5,5))

106 i percorsi da P a A senza •



Anche qui i buoni sono tutti - i cattivi

e' un cattivo

Costruisco una bigezione $f : \{\text{cattivi}\} \to \{P \to FA\}$ percorsi

Dimostro che f è una bigezione

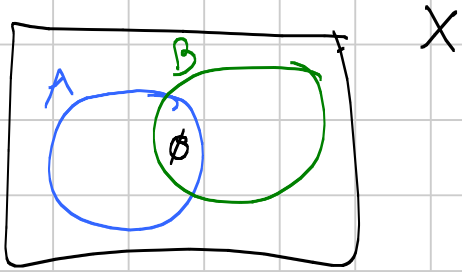
e concludo dicendo che i buoni sono

$$\binom{m+n}{n} - \binom{m+n}{n-1} \stackrel{?}{=} \frac{\binom{m+n}{n}}{n}$$

per casa verificatela, o confutatela

Es 114 e 115

$$\#\{(A,B)\in Y^2 : A\cap B=\emptyset\}$$



Conto a partire dagli elementi di X

un $x\in X$ può stare in $A\setminus B$ $\quad B\setminus A \quad X\setminus A\cup B$

quindi ci sono $3^{\#X} = 3^n$

$$\sum_{(A,B,C)\in Y^3} |A\cap B\cup(X\setminus C)|$$

anche qui se conto per elemento è più facile

quante volte compare $x\in X$ nella somma?

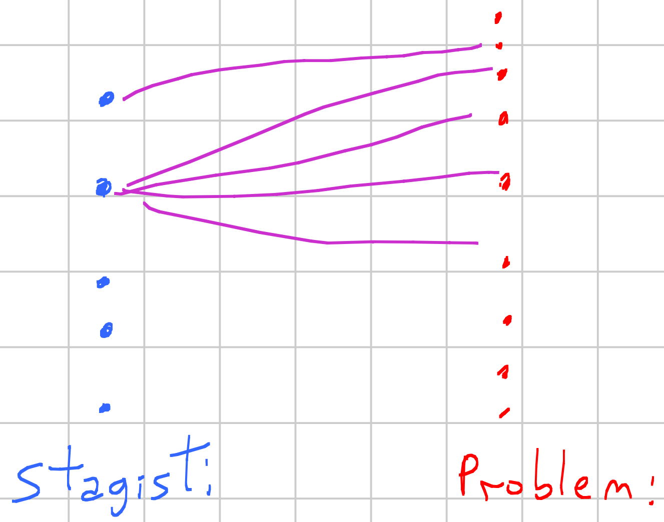
$x \in A,\ x \in B \quad \vee \quad x \notin C$

si sommano (p. i. e.) i 2 casi

se vogliamo calcolare il caso $x \in A$ e $x \in B$

Scegliamo A e B senza tener conto di x (4^{n-1} possibili scelte) poi metto x sia in A che in B

- Il problema degli stagisti



Scegliamo S un sottoinsieme di problemi chiamiamo n_S = # di stagisti che ha risolto tutti i problemi in S

$$Q = \sum_{S \subseteq P,\, S \neq \emptyset} n_S$$

Quante volte lo stagista i compare nella somma?

$$Q = \sum_{i \in O} \left(2^{m_i} - 1\right)$$ dove m_i è il # di

problemi che i ha risolto.

Per l'ipotesi ogni addendo $2^{m_i}-1$ è dispari

$\Rightarrow$ Q è pari

ma allora, almeno un S è t.c. n_S è pari.

- dal TST 15 B1

20 città con 18 aerei

Prendiamo una componente connessa C di n città e a aerei;

$$Q = \text{la somma dei gradi di } C$$

$$6n \underset{\#}{\leq} Q \underset{\#}{=} 2\#E_C = 2\cdot 5a = 10a$$

ogni aereo porta 5 archi alla componente C

$$\frac{Q}{2} \leq \binom{n}{2} \qquad Q \underset{\#}{\leq} n(n-1)$$

$\# + \# \Rightarrow n(n-7) \geq 0 \Rightarrow n \geq 7$

7	8	9	10
13	12	11	10

$m + m$

$+ m$

$6n \le 10a$ $3n \le 5a$

$10a \le n(n-1)$

$n = 7$, $a \geq 5$ non torna

$n = 8$ $a \geq 5$ $a \le 5$

$n = 9$ $a \geq 6$ $a \le 7$

$n = 10$ $a \geq 6$ $a \le 9$

Oss finale : i gradi sono pari

$\rightarrow$ fa cadere $n = 8$

per $n = 10$ $a \le 8$ $\rightarrow$ cade (aereri ≤ 18)

$n = 9$ anche $n = 11$

$a = 7$ $\rightarrow$ $a \le 11$

cade anche $n = 9$

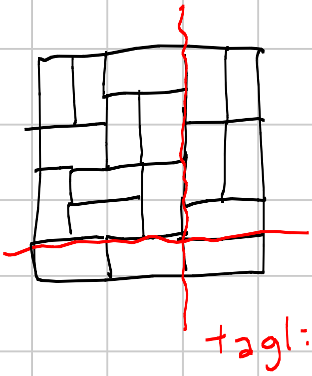
il numero di archi è $7 \cdot 5$, al max 36

$\Rightarrow$ i 2 vertici dell'arco mancante hanno grado dispari.

— 6×6 da tassellare con 2×1

$\Rightarrow$ c'è un taglio

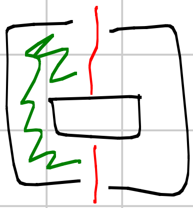
Contiamo i "blocca-tagli" $= Q$



$Q = 18$

$Q \geq 10$

Oss. finale: non posso bloccare un taglio con una sola tessera



$\rightarrow Q \geq 2 \cdot 10$