Combinatoria 2 - Basic

TESS

Titolo nota

25/08/2015

Tecniche combinatoriche

Problemi di esistenza e di non esistenza

Esistenza

Costruttiva

- mostrare l'esempio
- induzione
- algoritmi
  - uso di invarianti (false)
  - greedy

Non costruttive

- per assurdo
- pigeonhole
- principio dell'estremale

Non Esistenza

- invarianti (vere)
- colorazioni
- D - C

Invarianti

Abbiamo un sistema dinamico (che varia) a causa di mosse - cambiamenti periodici

un'invariante è una quantità legata al sistema che non varia mossa dopo mossa

Prototipo di esempio
ho un sistema, delle regole, config. iniziale A una finale B e voglio dimostrare che non posso passare da A a B
In questo caso trovo Q invariante e noto che $Q(A) \neq Q(B)$

Esempio banale:

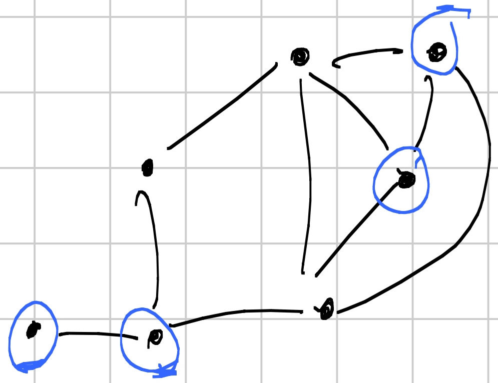
Ho una scacchiera 8×8 bianca e nera al solito
mosse: - inverto il colore in una riga
- " " colonna
- " in un quadrato 2×2

Posso raggiungere una configurazione con tutte le caselle bianche tranne il quadratino in alto a DX?

NO, la quantità Q = la parità delle bianche
mosse: 1) prima ho b bianche e $8-b$ nere
dopo ne ho $8-b$ e b ✓
2) =

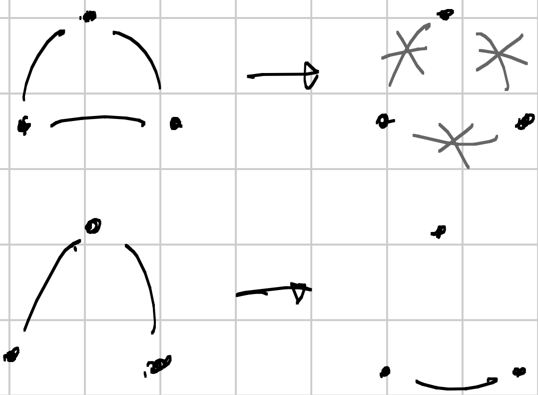
3) prima ne ho 6 branche e 4-6 nere
dopo - - - 4-6 6 ✓

C2 - 8 (dal Senior 2002)



Alberto e Barbara fanno delle mosse:

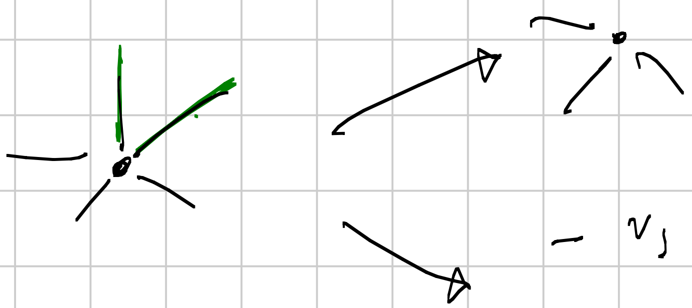
-
-



Quando qualcuno non può più effettuare mosse perde

Dimostrare che l'esito non dipende dalle mosse fatte

Q. è, per ogni vertice v_i è la parità del grado

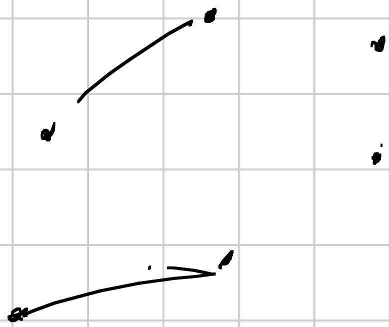


$deg(v_i)$ cala di 2

- v_i è il vertice della V → cala di 2
- v_i non " " → non cambia

So che un config. è finale quando

$\deg(v_i) < 2 \quad \forall i$



Devo mostrare che raggiungo una conf. finale

$|E|$ diminuisce ad ogni mossa di 3 o di 1

→ osservo che la parità di $|E|$ cambia ad ogni mossa

So contare quanti archi ci saranno alla fine

saranno $\dfrac{\#\{\text{vertici con } \deg(v_i) \equiv 1 \ (2)\}}{2}$

so quanti sono all'inizio

so quanti cambiamenti di parità mi occorrono

→ so chi fa l'ultima mossa

Esercizio 118 (p.20)

a, b, c mosse sono: scelgo a, b
li sostituisco con
$\frac{3a-4b}{5}, \frac{4a+3b}{5}$

L'invariante è $a^2+b^2+c^2$

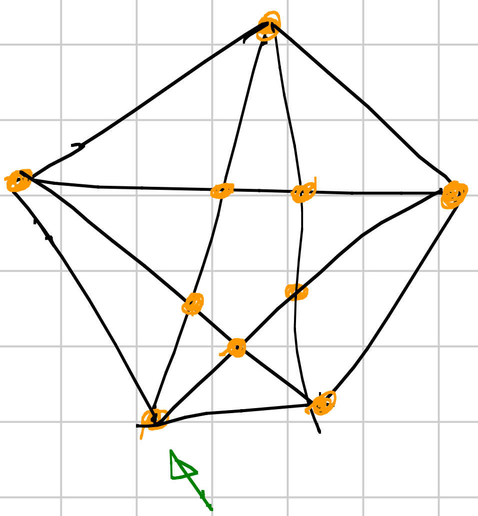
prima ho a^2+b^2

dopo ho $\frac{9a^2-12\cdot 2ab+16b^2}{25}+\frac{16a^2+12\cdot 2ab+9b^2}{25}$

$10, 8, 15 \longrightarrow 12, 13, 14$

$\sum \square = 389 \neq \sum \square = > 400$

Problemino



Scelgo un segmento (diagonale o lato) e cambio stato alle lampadine che trovo

Voglio spegnerle tutte

Q. = la parità delle 5 dentro

Problemino:

alla lavagna ci sono scritti alcuni numeri (interi)
ad ogni mossa posso scegliere un X e aggiungere $2X+1$

e $\dfrac{X}{X+2}$

Ad un certo punto vedo scritto 2010

dimostrare che anche all'inizio c'era 2010

Sol: se sommo numeratore e denominatore ottengo la stessa cosa

$$\frac{a}{b} \to \frac{2a}{b}+1 = \frac{2a+b}{b} \to 2(a+b)$$

$$\searrow \frac{\frac{a}{b}}{\frac{a}{b}+2} = \frac{a}{a+2b} \to 2(a+b)$$

la somma tra num e den raddoppia

se alla fine ho $\underline{2010}$ la somma è dispari
$ 1$

Alla fine ho che la somma num+den
ottiene un 2 in più

BST 15 - B1

ci sono tanti numeri scritti su dei cartellini
ad ogni mossa posso prendere
a, b e sostituirli con i cartellini

$a+b$ e $a+b$

All'inizio ci sono tutti 1

voglio dimostrare che dopo X mosse

la somma complessiva è aumentata Y volte

Uso il prodotto

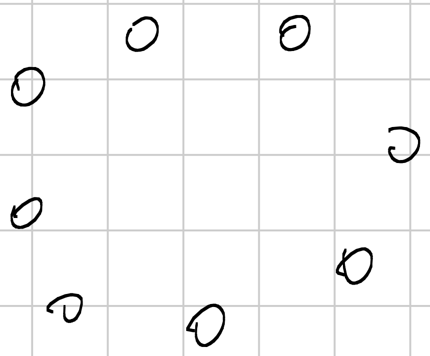
Prima è Pab, poi è $P(a+b)^2$

voglio trovare il rapporto $\frac{P(a+b)^2}{Pab}$ minimo

il rapporto è almeno 4

Poi stimo la somma con AM-GM

Problemino



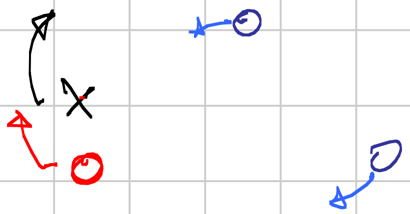
n-agono

le pile di monete sono $1, 2, 3, \dots, n$

mosse sono:
scelgo 2 monete
e le sposto una
e una

Spostare tutto su un vertice. quale?

Invariante: somma delle distanze da un vertice



Non funziona esattamente
ma mi basta prendere
modulo n

Principio dell'estremale

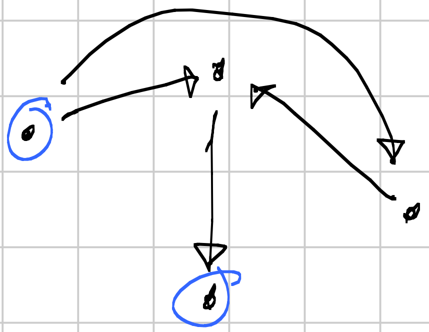
Ho tanti oggetti e ne voglio 1 che abbia una certa proprietà P

Scelgo una quantità Q associata ad ogni vertice e scelgo uno di quelli che ha Q minima o massima

Verificate che quell'oggetto verifica P

Supponendo per assurdo che non verifichi P dimostrate che potete variare di poco l'oggetto e ottenerne uno con Q più piccola o grande

Es: C2-5 (2002)

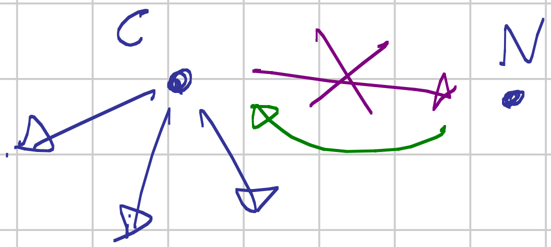


Dimostrate che esiste un vertice dal quale potete andare dovunque

(versione duale: c'è un vertice nel quale potete sempre arrivare)

Scelgo come Q il numero di città che posso raggiungere

Supponiamo x assurdo che quella con Q massimo non raggiunge tutte le altre



Da N posso raggiungere più città che non da C

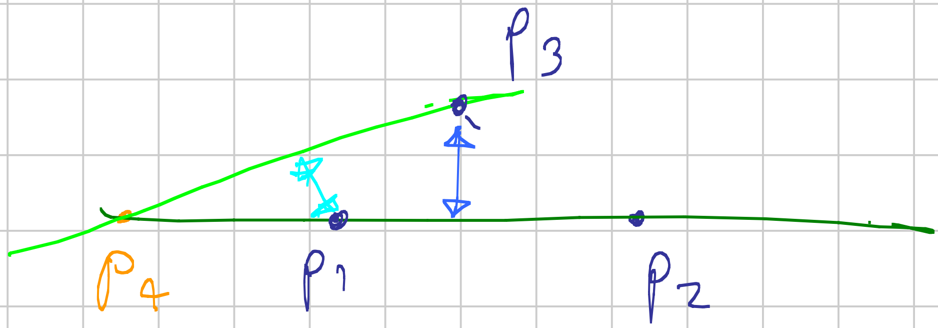
Teorema di Sylvester

S è un insieme finito di punti nel piano tale che se scegliete $p_1, p_2 \in S$ allora $\exists\, p_3 \in S$ allineato con p_1 e p_2 (p_1, p_2, p_3 tutti diversi)

$\Rightarrow$ S è $\subseteq$ retta

Dim: prendiamo le terne (p_1, p_2, p_3) e consideriamo $Q(p_1, p_2, p_3)$ s la distanza tra p_3 e la retta per p_1 e p_2

Prendiamo la terna che minimizza questa quantità e che sia > 0 (per assurdo)



Algoritmi greedy

Voglio costruire qualche oggetto

e per farlo seguo un algoritmo

Alcune volte funziona una tecnica del tipo: adesso faccio la cosa migliore al momento

BST 2014 n° 7

Ho alcuni pesi che in totale sommano a n (intero). Voglio posizionare questi pesi su k scatole in modo che su ciascuna ce ne sia ≤ 1. So che i pesi sono tutti ≤ 1. Determinare (in funzione di n) il minimo k.

Sol: se prendo tutti i pesi da $\frac{1}{2}+\varepsilon$, non posso metterne 2 nella stessa. Mi escono al massimo $2n-1$ pesi.

Speriamo che il minimo k sia $2n-1$

L'algoritmo che seguo è questo:

prendo il peso più grosso e lo metto nella scatola più vuota

Se per assurdo non riesco a finire vuol dire che mi rimane un peso p

$\Rightarrow$ in ogni scatola ho $> 1-p$

in tutto dentro le scatole ho $> (1-p)(2n-1)$

Il peso complessivo è

$$n > \underbrace{(1-p)(2n-1)}_{\text{il peso nelle scatole}} + \underbrace{p}_{\text{quello che mi rimane}}$$

$$p(2n-2) > n-1$$

$$p > \frac{1}{2}$$

Però avevo già messo $> (2n-1)\frac{1}{2}$ +

e mi rimane $> \frac{1}{2}$ =

$n > n$ Assurdo

Esercizi

p. 19, 20 116, 117, 120, 122, 123

125

p 31 15, 13

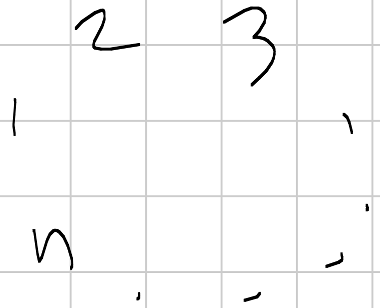
- Un grafo ha almeno un arco. Dimostrate che è possibile dividere i vertici in 2 insiemi in modo che gli archi tra i 2 insiemi sono $\geq$ di quelli interni agli insiemi.

116 Q = parità della somma

$n \equiv 1, 2 \ (4)$

117 $Q = \sum_{i=0}^{1006} (A_{2i} - A_{2i+1})$

120



A_i = # pedine sul vertice i

$$Q = \sum_{i=0}^{n-1} i A_i \pmod{n}$$

122 $\dots, x, y, \dots$ e $x > y$

$\hookrightarrow y+1, x$

$\hookrightarrow x-1, x$

L'idea è cercare un'invariante che cresce e mostrare che ha un tetto

$$\begin{array}{cccc} 1 & 2 & & n \\ (x_1, & \dots & , & x_n) \end{array}$$

$$\sum_i i x_i$$

$x, y \qquad y+1 \quad x \qquad x-1 \quad x$

$i \quad i+1$

$ix+(i+1)y \overset{?}{\leq} i(y+1)+(i+1)x \qquad i(x-1)+(i+1)x$

$y \overset{?}{\leq} i+x$

$\leq$

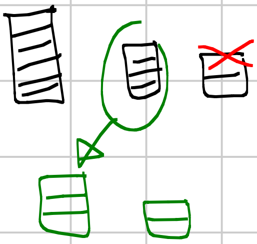
$(i+1)y \leq -i+ix+x$

$\hookrightarrow \leq (i+1)(x-1)$

$-(i+1) \overset{?}{\leq} -i$

Potevo usare dei pesi che crescevano di più

123



$$Q = \sum_i a_i^2$$

sicuramente diminuisce

$$(a+b)^2 \to a^2+b^2$$

Quante sono al max le mosse di tipo a)? $\sum a_i$

Quante sono al max le mosse di tipo b)? $\sum (a_i-1)$

$$Q' = 2\sum a_i - \#\text{colonne}$$

Per casa 121

125 Prendo il più piccolo

$$\begin{array}{ccc} & b_1 & \\ b_4 & \boxed{a} & b_2 \\ & b_3 & \end{array}$$

$$a = \frac{b_1 + b_2 + b_3 + b_4}{4}$$

$$a \leq b_i$$

$$a \leq \frac{\sum b_i}{4}$$

$$\Rightarrow a = b_i$$

ad ogni passo vedo sempre lo stesso numero

C2-15 $\quad P_n = \{2^n, 2^{n-1}\cdot 3, \dots, 3^n\}$

$Y \subseteq P_n \quad S_Y$ è la somma

$\forall$ reale r : $\quad 0 \leq r \leq 3^{n+1} - 2^{n+1}$

$\exists\, Y$: $\quad 0 \leq r - S_Y \leq 2^n$

Sol: Approccio greedy

Prendo il + grande peso p tale che, detto Y l'insieme costruito al passo prec,

$S_{Y \cup \{p\}} \leq r$

Perché funziona?

Supponiamo ora che rimanga con

Y t.c. $\quad S_Y \leq r$, ma non $r \leq 2^n + S_Y$

e che detto p il peso + piccolo rimasto

valga $\quad S_Y + p > r$

Quindi ho che $\quad 2^n + S_Y < r$

$$S_Y + p > r$$

$\Rightarrow \quad p > 2^n$

Avrò usato i pesi

$$\underbrace{2^n,\ 2^{n-1}\cdot 3,\ 2^{n-2}\cdot 3^2,\ \dots\ 2^{n-r}\cdot 3^r}_{\text{blocco consecutivo di pesi che ho già preso}},\ \text{altro ma non } p$$

poi c'è p e poi ci sono gli altri.

Consideriamo ora il primo peso tra $\underbrace{\quad}$ che ho usato. È vero che potevo usare P_i?

In quel caso ci stava $2^{n-i}3^i$ $\tilde{y}$

non ci stava p

però ho

$$S_{\tilde{y}} + 2^{n-i}3^i \leq r$$

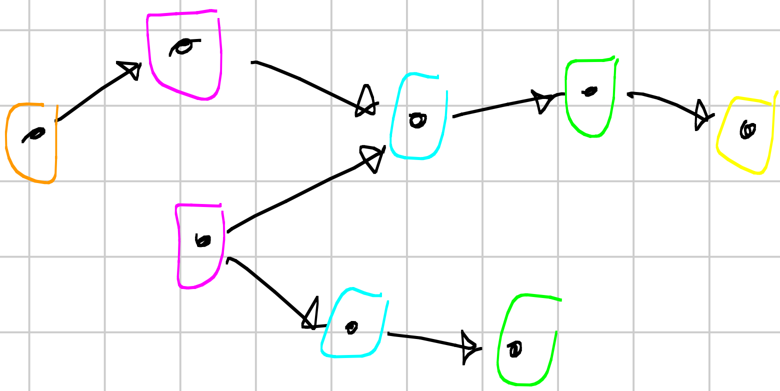
$$S_{\tilde{y}} + p > r$$

ma non si era verificato $r - S_{\tilde{y}} \leq 2^n$

$$r - S_{\tilde{y}} > 2^n$$

$$S_{\tilde{y}} + 2^n < r$$

C2-13



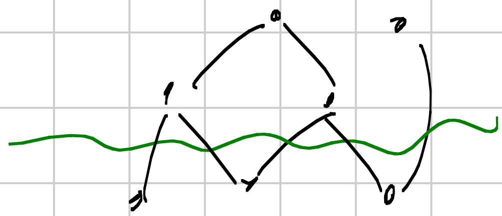
Il numero di colori è la massima lunghezza di un cammino = h

Induzione sul numero di vertici (di solito)

↳ stavolta su n

Prendo i vertici che non hanno alcuna uscita, li coloro con un colore e passo al grafo rimanente (ne esiste qualcuno perché è aciclico)
Sul grafo rimanente la lunghezza massima è n-1, per ipotesi induttiva posso colorarlo con n-1 colori

- (Problemino anonimo)



Scelgo la suddivisione in 2 t.c.

massimizzi il # archi tra le 2 parti:

Oss: ogni vertice ha + amici dall'altra parte per ogni v_i ho a_i vertici dalla stessa parte e b_i dall'altra.

$$a_i \leq b_i$$

$$\sum_{i}^{n} a_i \leq \sum b_i$$

2 #Archi interni $\leq$ 2 # archi in mezzo