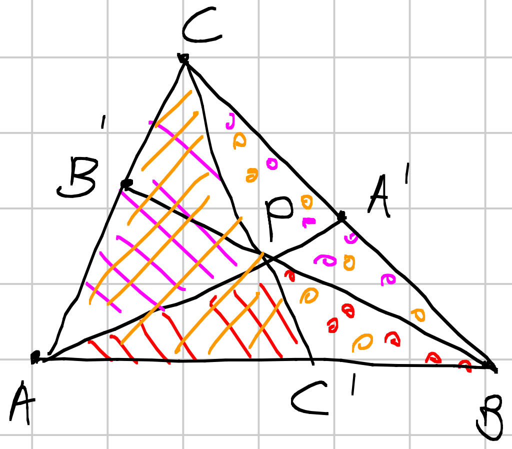
Geometria 3

Teorema di Ceva



ceviane

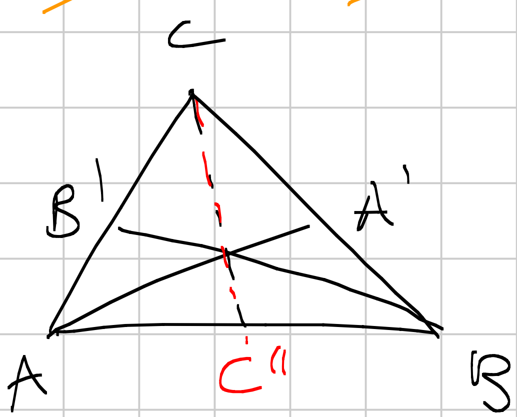
AA', BB', CC' concorrono (in un pto P) $\iff \dfrac{AC'}{C'B}\,\dfrac{BA'}{A'C}\,\dfrac{CB'}{B'A}=1$ (*)

$\Longrightarrow$

$$\frac{AC'}{C'B}=\frac{[ACC']}{[CC'B]}=\frac{[APC']}{[PBC']}=\frac{[APC]}{[CPB]}$$

(*) $$\frac{\cancel{[APC]}}{\cancel{[CPB]}}\,\frac{\cancel{[BPA]}}{\cancel{[APC]}}\,\frac{\cancel{[CPB]}}{\cancel{[BPA]}}=1$$

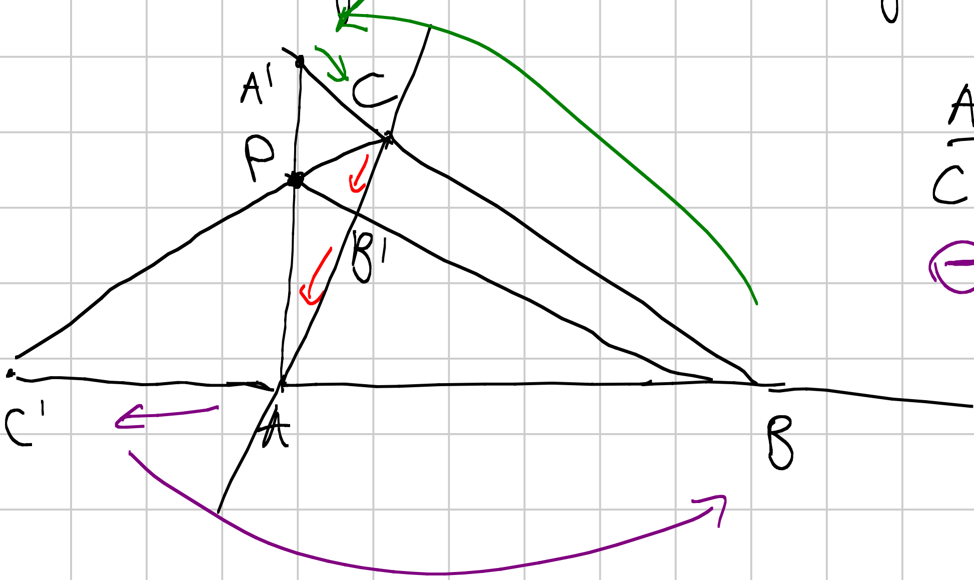
$\Longleftarrow$



$$\frac{AB'}{B'C}\,\frac{CA'}{A'B}\,\frac{BC''}{C''A}=1$$

$C'\neq C'' \Rightarrow$ le ceviane AA', BB', CC' NON concorrono

Più in generale: uso segmenti "orientati"

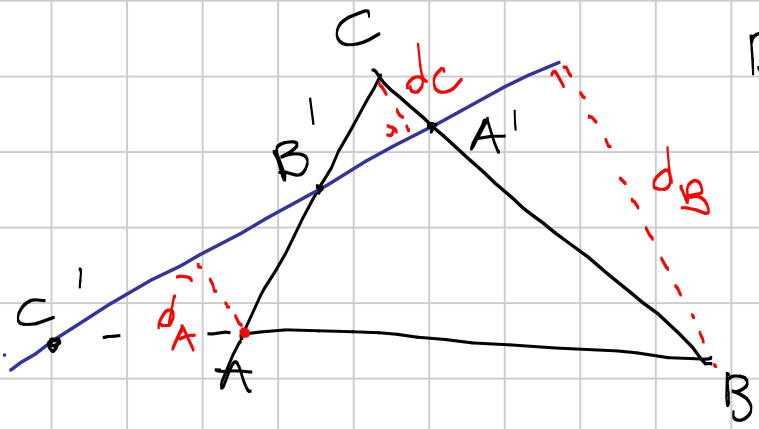


$$\frac{AC'}{C'B} \cdot \frac{BA'}{A'C} \cdot \frac{CB'}{B'A} = 1$$

$-$ $\quad -$ $\quad +$

Bonus: controllare che la dim. funzioni ancora anche con A', B', C' sui prolungamenti.

Menelao



A', B', C' su BC, AC, AB (anche sui prolungamenti)

$$\frac{BA'}{A'C} \cdot \frac{CB'}{B'A} \cdot \frac{AC'}{C'B} = -1$$

$\Longleftrightarrow$ A', B', C' sono allineati

$\Longleftarrow$
$$\frac{BA'}{A'C} = \frac{d_B}{d_C}$$
$$\frac{CB'}{B'A} = \frac{d_C}{d_A}$$
$$\frac{AC'}{C'B} = -\frac{d_A}{d_B}$$

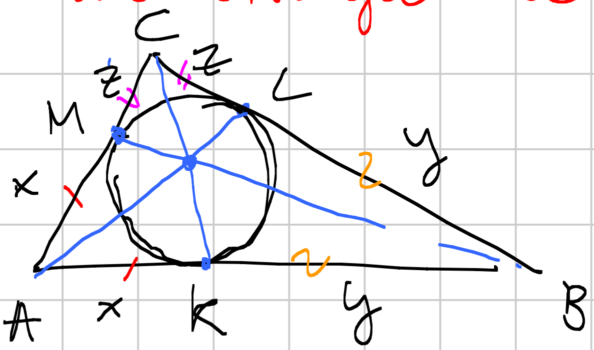
$\longrightarrow$ prodotto $= -1$

d'altra parte, darà luogo a 1.

nel disegno 3 rapporti negativi

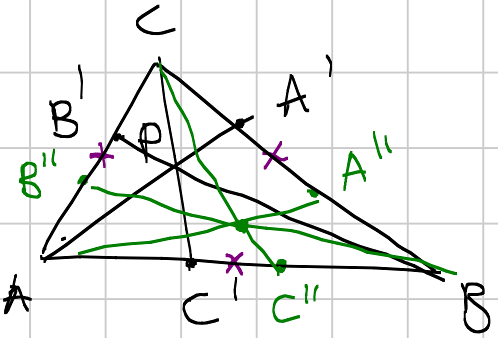
altra freccia PER ASSURDO.

Alcune conseguenze di CEVA:



$$\frac{x}{y}\,\frac{y}{z}\,\frac{z}{x} = 1$$

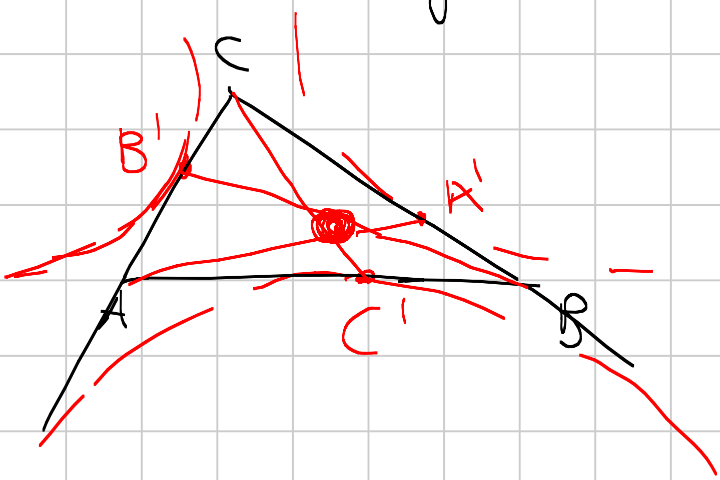
pto di Gergonne



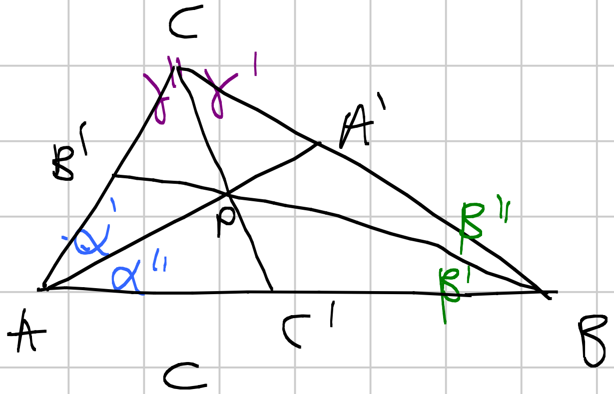
$AC'' = C'B$
$C''B = AC'$

le ceviane verdi concorrono nel coniugato isotomico di P.

COROLLARIO da fare:
le ceviane relative ai pti di tangenza degli excerchi interni ai lati concorrono (nel coniugato isotomico di Gergonne)

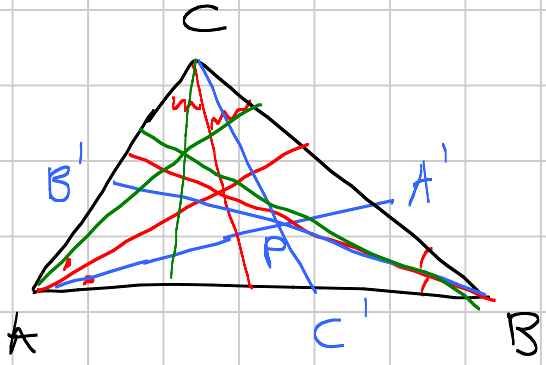


Ceva TRIGONOMETRICO



AA', BB', CC' concorrono $\Leftrightarrow$

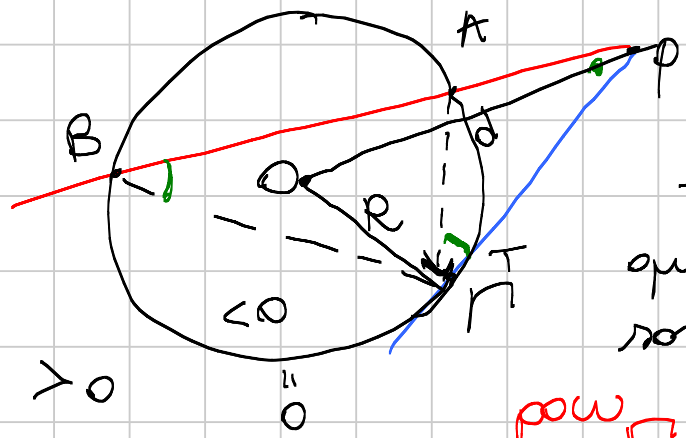
$$\frac{\operatorname{sen}\alpha'}{\operatorname{sen}\alpha''}\,\frac{\operatorname{sen}\beta'}{\operatorname{sen}\beta''}\,\frac{\operatorname{sen}\gamma'}{\operatorname{sen}\gamma''} = 1$$



le simmetriche delle ceviane concorrenti blu rispetto alle bisettrici concorrono nel "coniugato isogonale" di P (simmediane...)

$\sim \circ \sim$

POTENZE



(teorema tg/sec)

$PT^2 = PA \cdot PB$

+ 2 sec + corda ...

questi teoremi sono un fatto:

$\mathrm{pow}_\Gamma(P) = PA \cdot PB$ "è ben definita"

segmenti orientati

$$\mathrm{pow}_\Gamma(P) = d^2 - R^2$$

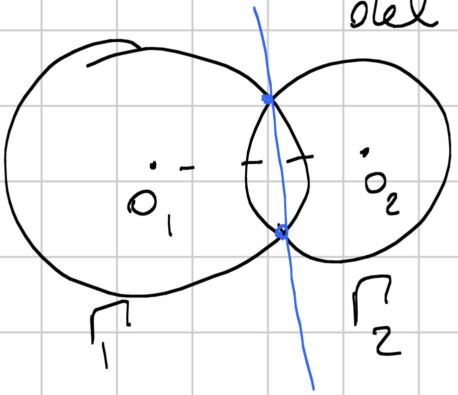
NOTA: come si calcola $\mathrm{pow}_\Gamma(P)$ in coordinate?

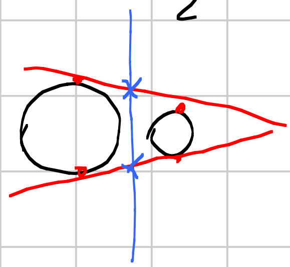
$$\Gamma: \ (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 - R^2 = 0$$

$P: \ (x_P, y_P)$

$$\mathrm{pow}_\Gamma(P) = d(P, O)^2 - R^2 = (x_P - x_0)^2 + (y_P - y_0)^2 - R^2$$

domanda: 2 circonferenze; ci sono pti del piano che hanno $pow_{\Gamma_1}(P) = pow_{\Gamma_2}(P)$? Quali?





(equazione in analitica)

il luogo di questi pti è una retta detta asse radicale, ortogonale alla congiungente i centri.

$\sim o \sim$

AFFINITÀ

in coordinate $(x,y) \mapsto (ax+by+c, dx+ey+f)$

$ae \neq bd$

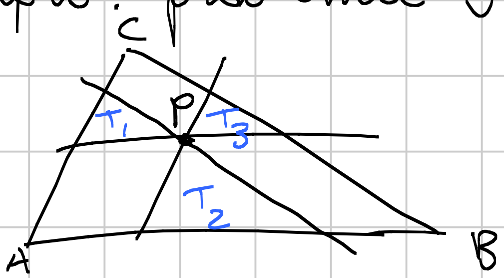
Aree si moltiplicano per $ae-bd$

affinità conservano parallelismo, collinearità (rette → rette), concorrenza, rapporti di segmenti sulla stessa retta.

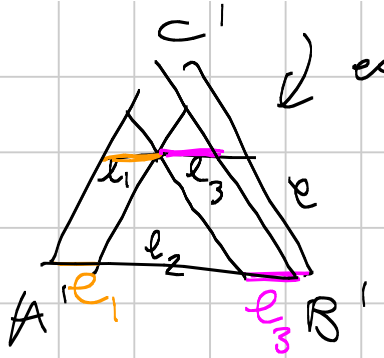
☠ angoli, perpendicolarità, circonferenze

posso mandare un triangolo in qualunque triangolo!

Esempio: problema 9



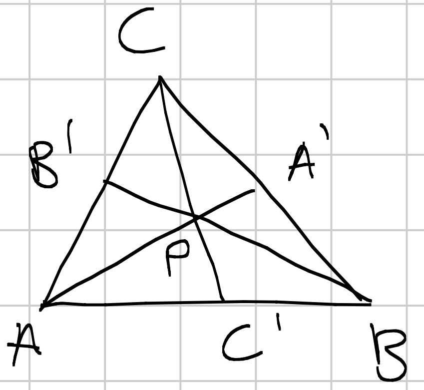
$$\sqrt{T_1} + \sqrt{T_2} + \sqrt{T_3} = \sqrt{T}$$



tesi è equivalente a:

$$l_1 + l_2 + l_3 = e$$

ovvio!



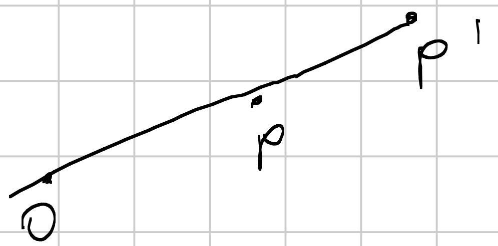
cese 6. 2004

$\frac{AP}{PA'} = x$ y   z   cicliche

TESI: $xyz = x+y+z+2$

OMOTETIE

omotetia di centro O e ragione $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$



P va in P' sulla retta OP tale che $OP' = \lambda OP$ (con segno)

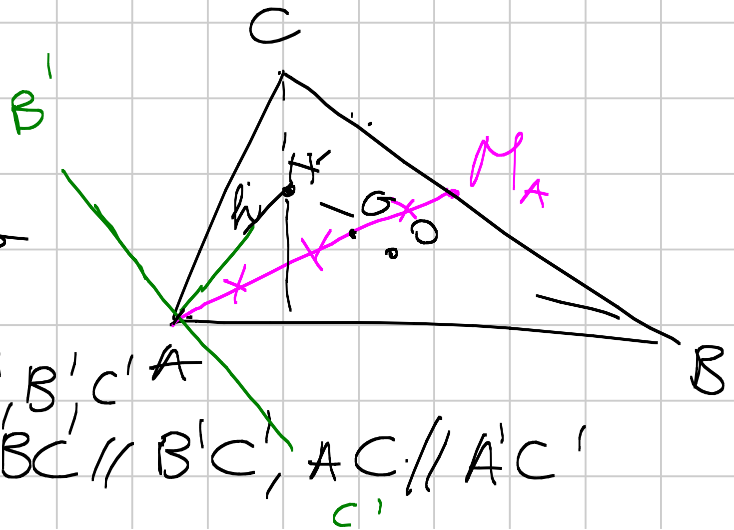
conservano "tutto"! angoli, rapporti...

in vettori/complessi omotetia di centro origine

$$z \mapsto \lambda z$$

Retta di Eulero

omotetia di centro G e ragione −2.



G → G   ABC → A'B'C'

AB // A'B', BC // B'C', AC // A'C'

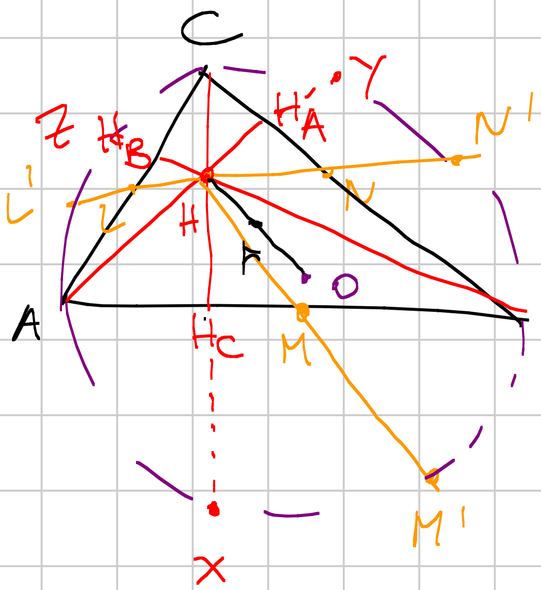
$M_A, M_B, M_C \to A, B, C$

pti medi di $B'C'$ ecc...

dove va O? assi di AB, ... $\to$ altezze di $\widehat{ABC}$

perciò $O \to H$

Circonferenza di Feuerbach



omotetia di ragione $1/2$ in H.

$O \to F$ pto medio di OH

$\Gamma \to$ circonferenza Γ' di centro F e raggio $R/2$

$X, Y, Z \to H_C, H_A, H_B$ che quindi stanno su Γ'.

$M', N', L' \to M, N, L$ che stanno su Γ'

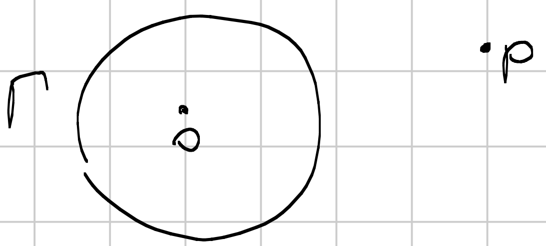
anche i pti medi di AH, BH, CH stanno su Γ'.

Γ' "circonferenza dei 9 pti".

INVERSIONE

piano $\setminus \{O\}$ ⟲

centro O, circonferenza Γ di centro O di raggio R



$P \to P'$ sulla semiretta OP

$OP \cdot OP' = R^2$

l'interno della circonferenza va fuori, l'esterno dentro, Γ in se stessa.

$O \to$ "moralmente" nel pto all'∞

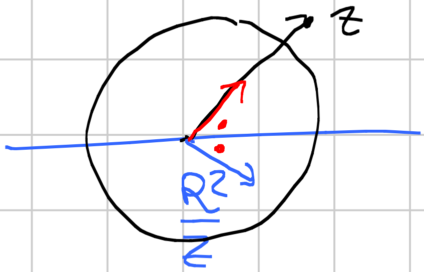
circonferenze per $O \longleftrightarrow$ rette non per O

rette per $O \to$ rette per O

circonferenze non per $O \longleftrightarrow$ circonferenze non per O.

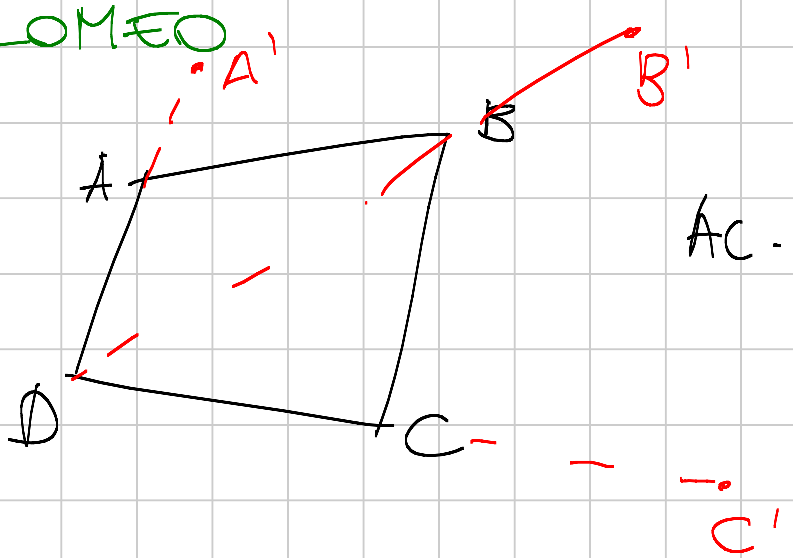
conserva angoli !

NOTA: in complessi inversione di centro O e raggio R



$$z \mapsto \frac{R^2}{\bar z}$$

TOLOMEO



$$AC \cdot BD \leq AD \cdot BC + AB \cdot CD$$

$=$

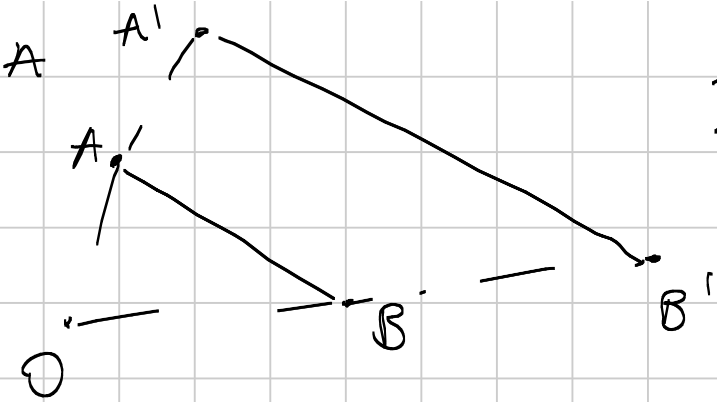
$\Longleftrightarrow$ ciclico

inverto in D con raggio R

$A'C' \leq A'B' + B'C'$ $\quad = \Longleftrightarrow A', B', C'$ allineati

$\Longleftrightarrow A, B, C$ stanno su circ. per D

LEMMA



$$\overline{A'B'} = \frac{\overline{AB}\, R^2}{\overline{OA}\cdot\overline{OB}}$$

ES. 3, 4, 6, 12, 11

importante