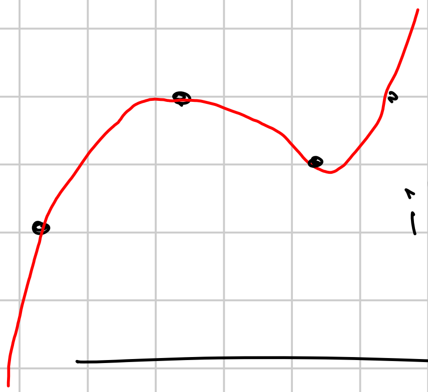
Interpolazione:

$x_i \neq x_j$ per $i \neq j$



Teo: Dati $n+1$ coppie (x_i, y_i)

$\exists!$ polinomio di grado $\leq n$

il cui grafico ci passa

Unicità: se ne ho due, $p(x)$, $\rho(x)$

$p(x) - \rho(x)$ ha $n+1$ zeri

(ed è di grado n)

Esistenza:

Strategia 1: sistemone lineare

$$a(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & & & & \vdots \\ 1 & \cdots & & & x_n^n \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

Fatto: questa matrice (matrice di Vandermonde) è invertibile (se $x_i \neq x_j$ $\forall\, i \neq j$)

Metodo 2: aggiusto un coefficiente per volta

$(x_0, y_0) \quad (x_1, y_1) \quad (x_2, y_2) \quad (x_3, y_3)$

sistemo x_0 — sistemo x_1 senza rovinare x_0 — sistemo x_2 senza rovinare x_0, x_1

$$y_0 + \frac{(x - x_0)}{x_1 - x_0} \cdot (y_1 - y_0) + \boxed{\frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}} \cdot \ldots$$

(Forma di Newton)

Metodo 3: aggiusto un termine per volta, in modo uno indipendente dall'altro

Sarebbe bello avere tanti polinomi $L_i(x)$ tali che $L_i(x_i) = 1 \quad L_i(x_j) = 0$ per $i \neq j$ (e grado $\leq n$)

In questo modo, il poli. di interpolazione è $p(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i L_i(x)$.

$$L_i(x) = \prod_{j \neq i} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}.$$

Polinomi (base) di Lagrange

Ogni pol. di grado n è comb. lineare dei L_i

Analogamente nell'altro metodo, base di Newton

$$1, \quad \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}, \quad \frac{(x - x_1)(x - x_0)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_0)}, \quad \ldots$$

Se i nodi sono $0, 1, 2, \ldots n$, la base di Newton è 1, $\frac{x}{1}$, $\frac{x(x-1)}{2\cdot 1}$, $\frac{x(x-1)(x-2)}{3\cdot 2\cdot 1}$

"polinomi binomiali" $\binom{x}{k}$.

<u>Oss</u>: stessa dim. del teo. cinese del resto

$$\begin{cases} x_0 \equiv y_0 \ (m_i) \\ \vdots \\ x_k \equiv y_k \ (m_k) \end{cases} \qquad L_i = \prod_{j \neq i} m_j \cdot \left(\text{inverso di } m_j \text{ modulo } i\right)$$

$p(x) = x^3 - 2$

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
p(0) & & p(1) & & p(2) & & p(3) & & p(4) & & p(5) & & p(6) & & \dots \\
-2 & & -1 & & 6 & & 25 & & 62 & & 123 & & 214 & & \dots \\
 & 1 & & 7 & & 19 & & 37 & & 61 & & 91 & & \dots & \\
 & & 6 & & 12 & & 18 & & 24 & & 30 & & \dots & & \\
 & & & 6 & & 6 & & 6 & & 6 & & \dots & & & \\
 & & & & 0 & & 0 & & 0 & & \dots & & & &
\end{array}$$

In tutti i polinomi, si arriva a una riga di zeri.

<u>Dim</u>: nella seconda riga, ci sono $q(0), q(1), q(2) \dots$

dove $q(x) = p(x+1) - p(x)$.

$q(x)$ ha grado $(\deg p) - 1$

$$q(x) = a_n(x+1)^n + a_{n-1}(x+1)^{n-1} + \dots - a_n x^n - a_{n-1}x^{n-1} + \dots$$

$$= n a_n x^{n-1} + \dots$$

Quindi a ogni riga scendo di un grado

Come si ricostruisce $p(x)$ dalla tabella?

Idea: queste tabelle si comportano in modo molto semplice sulla base di Newton:

$p(x) = \binom{x}{k}$ quanto fa $\binom{n+1}{k} - \binom{n}{k}$? $\binom{n}{k-1}$

$$\begin{array}{lcccccccc}
\binom{x}{k} \to & \binom{0}{k} & \binom{1}{k} & \binom{2}{k} & \dots & \binom{k}{k} & \dots & \binom{k+1}{k} & \binom{k+2}{k} \; \dots \\
\binom{x}{k-1} \to & \binom{0}{k-1} & & \binom{1}{k-1} & & \binom{k-1}{k-1} & & \binom{k}{k-1} & \binom{k+1}{k-1} \\
 & & \binom{0}{k-2} & & \dots & & & \dots &
\end{array}$$

In particolare, scrivendo i valori:

$$\begin{array}{cccccc}
0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\
 & 0 & 0 & \dots & 1 & \\
 & & 0 & 0 \; \dots & 1 & \\
 & & & \ddots & 1 & \\
 & & & & \ddots \; 1 & \\
 & & & & 1 &
\end{array}$$

Nella prima colonna, $\binom{x}{k}$ ha k zeri e poi un 1

E se invece parto da $a_0\binom{x}{0} + a_1\binom{x}{1} + a_2\binom{x}{2} + \dots + a_k\binom{x}{k}$, nella prima colonna ho

a_0
a_1
a_2 . . .
a_k
0
0
0
. . .

Quindi: se nella prima colonna trovo $a_0, a_1, \dots a_k$, il polinomio era $a_0\binom{x}{0}+a_1\binom{x}{1}+\dots+a_k\binom{x}{k}$.

(in particolare, nella riga subito prima degli zeri viene $n!\,a_n$)

(parentesi... Quali sono i polinomi tali che $p(n)\in\mathbb{Z}$ per ogni $n\in\mathbb{Z}$? $\frac{x(x-1)}{2}$, ...

Sono esattamente le c.l. intere della base di Newton)

Esercizio che non potete non aver visto:

Trovare $p(x)$ tale che $p(k)=2^k$ per $k=0,1,\dots n$, di grado n. Quanto vale $p(n+1)$?

Dim: faccio la tabellona!

$2^0 \quad 2^1 \quad 2^2 \quad 2^3 \quad \dots\dots \quad 2^n \quad \boxed{?} \quad ?$

$2^0 \quad 2^1 \quad 2^2 \quad 2^3 \quad \dots \quad 2^{n-1} \quad ? \quad ?$

$2^0 \quad 2^1$

$\ddots$

$2^2 \quad 7$

$2^0 \quad 2^1 \quad 3$

$2^0 \quad 1$

$n+1 \longrightarrow$

$0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \dots$

per prodotto

torno in su

$2^{n+1}-1$

Posso anche trovare il polinomio: è

$$\binom{x}{0}+\binom{x}{1}+\binom{x}{2}+\dots+\binom{x}{n}$$

Cosa collegata:

come trovare $\sum_{i=0}^{n-1} p(i)$, dato p?

(es: $\sum_{i=0}^{n-1} i^2$, somma dei quadrati)

calcolo un po' di valori, li metto nella tabella

$\longrightarrow \quad \boxed{0} \quad \square \quad \square \quad \square \quad \square \quad \square \quad \dots$

$1 \quad 4 \quad 9 \quad 16 \quad \dots$

$3 \quad 5 \quad 7 \quad \dots$

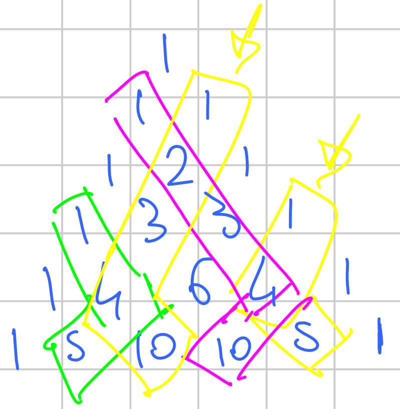
$2 \quad 2 \quad \dots \quad \dots$

$0 \quad 0$

Somma dei primi $n-1$ quadrati: $\binom{n-1}{1}+3\binom{n-1}{2}+2\binom{n-1}{3}$

Metodo più industriale:

base di Newton + "Hockey-stick formula"



$$\sum_{i=1}^{n} \binom{i}{k} = \binom{n+1}{k+1}$$

(problema per il premio: trovare una dim. combinatorica di questa formula)

Come si trova, per esempio,

$$\sum_{i=0}^{n} i^2 = \sum_{i=0}^{n} \left[2 \cdot \frac{i(i-1)}{2} + i \right] = \sum_{i=0}^{n} \left[2\binom{i}{2} + \binom{i}{1} \right] =$$

$$\overset{H\text{-}S}{=} 2\binom{n+1}{3} + \binom{n+1}{2} = 2\frac{(n+1)(n)(n-1)}{3\cdot 2\cdot 1} + \frac{(n+1)n}{2\cdot 1} =$$

$$= (n+1)n\left[\frac{n-1}{3} + \frac{1}{2}\right] = (n+1)n\,\frac{2n-2+3}{6} \quad \checkmark$$

$$x_{k+2} = \alpha x_{k+1} + \beta x_k$$

polinomio caratteristico $\lambda^2 = \alpha\lambda + \beta \quad (*)$

radici λ_1, λ_2

soluzioni: $X_k = r \cdot \lambda_1^k + s \cdot \lambda_2^k$

r, s determinati da cond. iniziali

$X_{k+3} = \square X_{k+2} + \square X_{k+1} + \square X_k \qquad r\lambda_1^k + s\lambda_2^k + t\lambda_3^k$

Se (*) è reale e ha due radici complesse, allora sono coniugate, $re^{i\vartheta}$, $re^{-i\vartheta}$

posso scrivere anche la soluzione come

$$u r^k \frac{e^{ik\vartheta} + e^{-ik\vartheta}}{2} + v r^k \frac{e^{ik\vartheta} - e^{-ik\vartheta}}{2i} =$$

$$= u r^k \cos k\vartheta + v r^k \sin k\vartheta$$

Se (*) ha radici doppie?

Es. $\lambda^2 = 4\lambda - 4 \qquad r\, 2^k + sk \cdot 2^k$

Se ho una radice λ_i con molteplicità m

$$\underbrace{\lambda_i^k, \; k\lambda_i^k, \; k^2 \lambda_i^k, \dots}_{m \text{ termini}}$$

Se ho "termini noti" aggiuntivi

Per es: non omogenea

$$x_{k+2} = 4x_{k+1} - 4x_k + 5^k \qquad (**)$$

Osservazione 1: Se x_k, y_k solvono $(**)$,

allora $z_k := x_k - y_k$ solve $z_{k+2} = 4z_{k+1} - 4z_k$. omogenea

e questa la so risolvere $z_k = r2^k + sk2^k$

Se scopro (in qualche modo) una soluzione y_k della $(**)$ (con i suoi valori iniziali),

allora ogni altra soluzione x_k è della forma

$$x_k = z_k + y_k = \underbrace{r2^k + sk2^k}_{\text{sol. generale della omogenea}} + \underbrace{y_k}_{\text{sol. particolare, scelta da me, della non om.}}$$

Quanti modi di ordinare ola (tutte spente) — una sì e una

sono: un modo speciale di ordinare da tutte spente a una sì e una no $+$ tutti i modi di ordinare da "tutte spente" a "tutte spente"

Come si trova una sol. particolare?

Esempio: provo un multiplo di 5^k

$$c \cdot 5^{k+2} = 4c5^{k+1} - 4c5^k + 5^k$$

$$25c = 20c - 4c + 1 \qquad c = \frac{1}{9}$$

$y_k = \frac{1}{9}5^k$ è sol. di $(**)$

con cond. in. $y_0 = \frac{1}{9}$ $y_1 = \frac{5}{9}$ ok

Se avessi avuto $x_{k+2} = 4x_{k+1} - 4x_k + 2^k$

($\lambda = 2$ già sol.) ~ provo $(ak^2+bk+c)2^k$

Se avessi avuto $x_{k+2} = 4x_{k+1} - 4x_k + 7\cdot 1^k$ ~

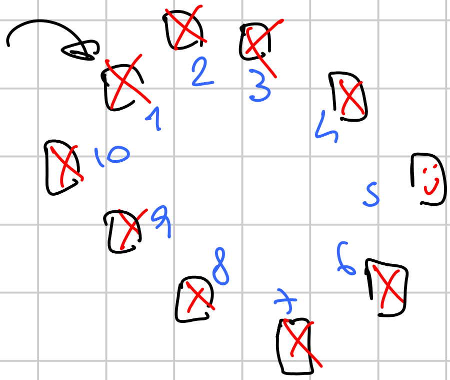
mult. di 1^k

$$x_{k+2} = 4x_{k+1} - 4x_k + 9k$$

$1^k \quad k\cdot 1^k$

Problema di Josephus:

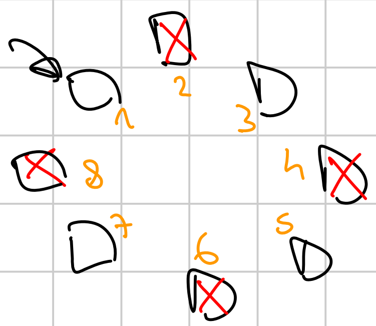
parto da qui



con 10 persone. Sopravvive il #5.

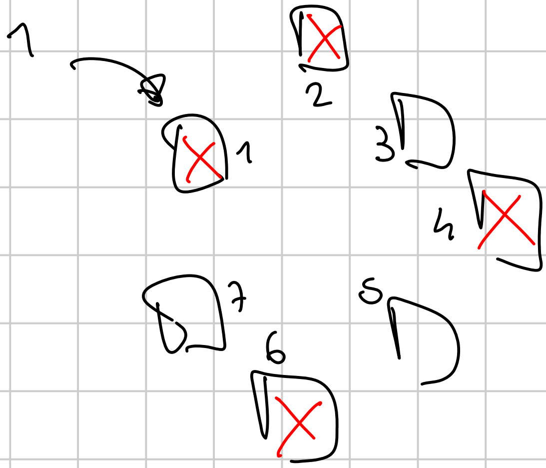
$f(k)$ = { posizione dell'ultimo rimasto partendo da k persone}

1



$$f(2k) = 2f(k) - 1$$

Se invece sono dispari, muoiono quelli pari, e l'1



e poi ne rimangono K

$$f(2K+1) = 2f(K)+1$$

K	$f(K)$	$\frac{f(K)-1}{2}$
1	1	0
2	1	0
3	3	1
4	1	0
5	3	1
6	5	2
7	7	3
8	1	0
9	3	1
10	5	2
11	7	3
12	9	4
13	11	5
14	13	6
15	15	7
16	1	0
		⋮

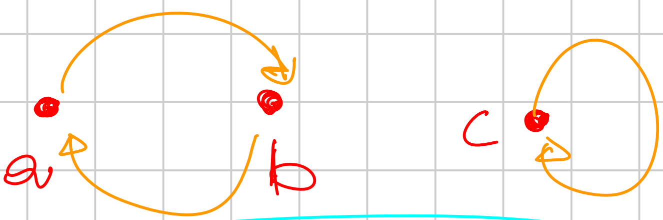
$n = 1011_2$

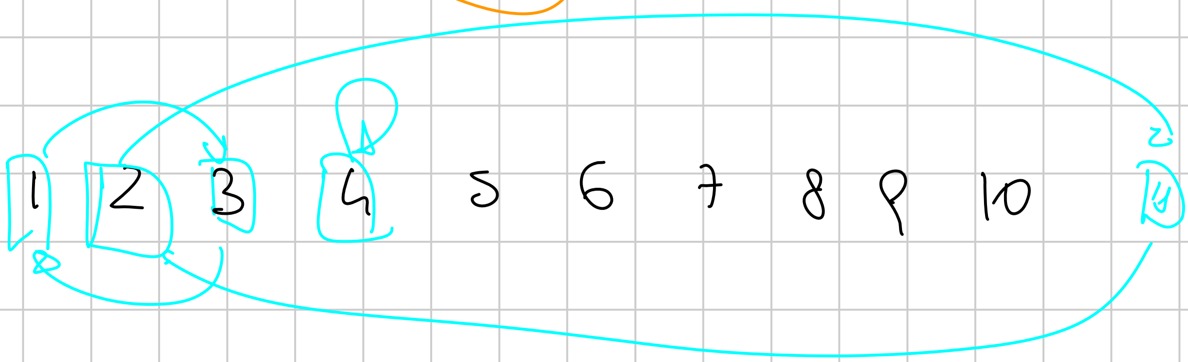
$f(K)$ si ottiene prendendo il primo 1 e spostandolo in fondo

---

Ci sono tante funzionali con soluzioni brutte

$f(f(x)) = x \quad \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$





$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$[f(x)]^2 = x^2 \quad \begin{cases} f(x) = x \\ f(\cancel{x}) = -x) \\ \begin{cases} f(x) = x & \text{per un certo insieme } S \\ f(x) = -x & \text{per gli altri } (\mathbb{R} \setminus S) \end{cases} \end{cases}$$

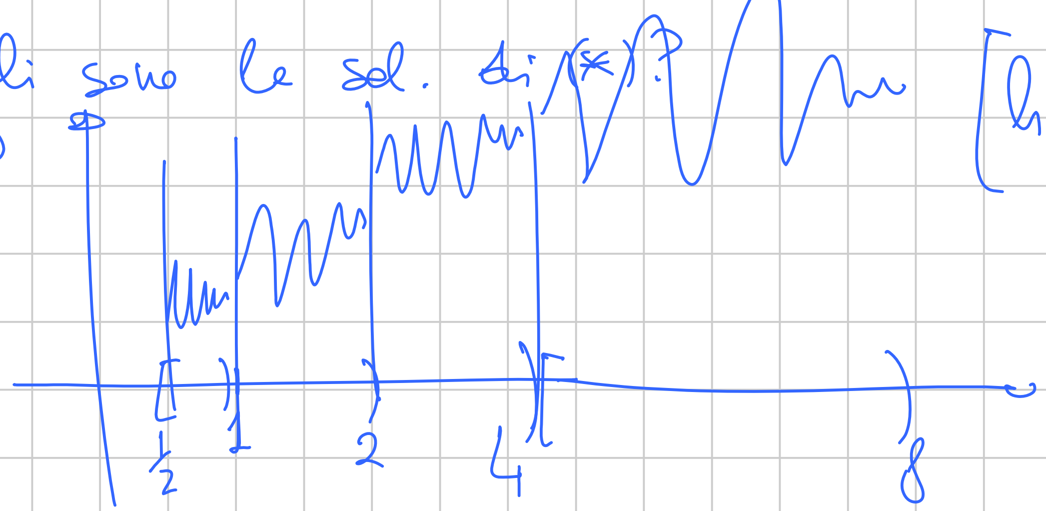
$$f(x^2) - f(x) = 1, \qquad f : (1, \infty) \to \mathbb{R}$$

idea 1: trasformo quell' x^2 in un $2x$

pongo $x = e^y \rightsquigarrow f(e^{2y}) - f(e^y) = 1 \quad \forall y \in (0, \infty)$

pongo $g(y) := f(e^y) \rightsquigarrow g(2y) - g(y) = 1 \quad (*)$

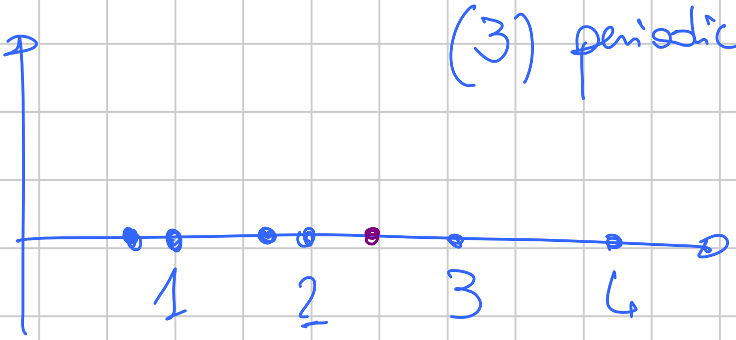
Quali sono le sol. di $(*)$? $\left[h(y + \log 2) = h(y) + 1 \right]$



Esistono funzioni che (1) risolvono ~~$f(x+y) = f(x) + f(y)$~~

(2) periodica di periodo 1

(3) periodica di periodo π



Basi di Hamel:

Voglio costruire insiemi di elementi <u>indipendenti</u> su $\mathbb{R}$

S indipendente se non c'è una comb. lineare (finita) (non nulla) di elementi di S a coeff. razionale che fa 0

<u>ES</u>:

$\{1, \sqrt{2}\}$ ⇝ indipendente perché $q_1 \cdot 1 + q_2 \cdot \sqrt{2} = 0$ solo se $q_1 = q_2 = 0$

$\left\{ 1+\sqrt{2},\ \frac{3}{2} + \frac{7}{5}\sqrt{2},\ 5+18\sqrt{2} \right\}$ ⇝ non indipendente

Dato S indipendente (anche infinito), ho due casi: o c'è α tale che $S \cup \{\alpha\}$ è indip. oppure ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ si scrive come comb. lineare di el. di S

"A un certo punto", aggiungendo el., arrivo nel caso 2

Un S "saturo" si chiama base di Hamel.

Se io scelgo $f(s)$ a piacere per ogni $s \in S$, posso estendere questa funzione a $\mathbb{R}$:

dato α, $\alpha = q_1 s_1 + q_2 s_2 \cdots q_k s_k$ per qualche $q_i \in \mathbb{Q}$, $s_i \in S$

$$f(\alpha) = q_1 f(s_1) + q_2 f(s_2) + \dots + q_k f(s_k)$$

f costruita così soddisfa l'eq. di Cauchy

È mio diritto: prendere $\{1, \pi\}$, trovare $S \supseteq \{1, \pi\}$, costruire f che risolve la Cauchy, tale che $f(1) = f(\pi) = 0$ e $f(\text{un altro el. della base}) \neq 0$.

$$f(\,..\,) + f(\,..\,) + \boxed{2\underset{\sim}{x}\, f(k)} \neq 0$$

assume tutti i valori $\in \mathbb{R}$, se $f(k) \neq 0$.

$$f(x) + f(y) = f(x+y)$$

$$\begin{cases} f(xy) = f(x)\, f(y) \\ f(x+y) = f(x)\, f(y) \\ f(xy) = f(x) + f(y) \end{cases}$$

TI Senior 2015 $\qquad ffx = f0$

$$f(xy + f(x)) = f(7xy) \quad \text{le sol. non costanti?}$$

$$f(z + f(x)) = f(7z) \qquad \forall z, x \in \mathbb{R}$$

$a, b \in \operatorname{Im} f$

z e $\frac{z}{7}+f(x)$ $\forall x$ stanno nella stessa scatola

Per es., solo 0, 1 nell'immagine

z sta nella stessa scatola di $\frac{z}{7}$ e $\frac{z}{7}+1$

$$f(x)=\begin{cases} 0 & x\in\mathbb{Q} \\ 1 & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$$

TST01: trovare tutte le $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$

P: $f(x+yf(x))=f(x)f(y)$ e $\exists$ solo un # finito di x tali che $f(x)=1$

"$f^{-1}(1)$ finito"

$P(1,1)$: $f(1+f(1))=[f(1)]^2$

Step 1: sia α t.c. $f(\alpha)=1$; allora

$P(\alpha,\alpha)$: $f(\alpha+\alpha)=1 \rightsquigarrow f(2\alpha)=1$

$\rightsquigarrow$ non può esserci nessun valore α t.c. $f(\alpha)=1$, se no ce ne sono ∞

Step 2: iniettività.

Suppongo di avere $f(a)=f(b)$: pongo $b>a$

$x=a$ $\quad b=x+yf(x)$ (ci riesco?) $y=\frac{b-a}{f(a)}$

Mi viene

$$P\left(a,\frac{b-a}{f(a)}\right):\quad \cancel{f(b)}=\cancel{f(a)}f\left(\frac{b-a}{f(a)}\right)$$

$\rightsquigarrow f\left(\frac{b-a}{f(a)}\right)=1$, impossibile!

Step 3:

$$\cancel{f}(x+yf(x)) \overset{P(x,y)}{=} f(x)f(y) = f(y)f(x) \overset{P(y,x)}{=} \cancel{f}(y+xf(y))$$

$$x+yf(x) = y+xf(y)$$

$$y(f(x)-1) = x(f(y)-1) \qquad \frac{f(y)-1}{y} = \frac{f(x)-1}{x} = \text{costante}$$

$$\Rightarrow f(x) = cx+1$$

BMO '07 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ t.c.

$$P:\ f(f(x)+y) = f(f(x)-y) + 4yf(x)$$

Oss: $f(x)=x^2$ è soluzione, quindi non ho speranze di dimostrare iniettività & suriettività

Idea 1: $P(x, f(y))$:

$$f(f(x)+f(y)) = f(f(x)-f(y)) + 4f(y)f(x)$$

$$f(f(x)-f(y)) \overset{P(x,y)}{=} f(f(x)+f(y)) - 4f(x)f(y) \overset{P(y,x)}{=} f(f(y)-f(x))$$

f pari sugli oggetti che si scrivono come $f(\text{roba}) - f(\text{altra roba})$

Cosa sta in $\mathrm{Im} f - \mathrm{Im} f$?

Se scelgo x t.c. $f(x)\neq 0$ (se non c'è allora $f\equiv 0$),

$y=\frac{a}{4f(x)}$, allora

$$P\left(x,\frac{a}{4f(x)}\right): f(\text{mostro})-f(\text{mostro})=a$$

so ogni reale sta in $\mathrm{Im}f-\mathrm{Im}f$.

Quello qui sopra dimostra $f(a)=f(-a)\ \forall a\in\mathbb{R}$

Il testo mi dà $f(f(x)+f(y))$.

Riesco a fare $f(f(x)+f(y)+f(z))$?

[Altra idea tipica: faccio $x\mapsto x+a$ e vedo cosa cambia, $P(x+a,y)-P(x,y)$]

$$\underbrace{f(f(x)+f(y)+z)}_{\text{simm. in } x,y}\overset{P(x,f(y)+z)}{=} f(f(x)-f(y)-z)+\underbrace{4f(x)f(y)}_{\text{simm. in } x,y}+4f(x)z$$

$$\Rightarrow f(f(x)-f(y)-z)+4f(x)z=f(f(y)-f(x)-z)+4f(y)z$$

Ponendo di nuovo $f(x)-f(y)=t$ (perché posso?)

viene

$$f(t-z)-f(-t-z)=-4tz \qquad \forall z\in\mathbb{R},\ \boxed{t}\in\mathbb{R} \Rightarrow \text{perché?}$$

SL 2005 trovare $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ t.c.

$$f(x)f(y)=2f(x+yf(x)) \qquad \forall x,y\in\mathbb{R}^+$$

Step 1: provo a rendere uguali due termini

$\cancel{P(x,x): 0<[f(x)]^2 = 2f(x+xf(x))}$ inutile

$y = x + yf(x)$ se $y = \frac{x}{1-f(x)}$. Riesco a renderli uguali se $f(x)<1$

In tal caso $P\left(x, \frac{x}{1-f(x)}\right)$: $f(x)\cancel{f\left(\frac{x}{1-f(x)}\right)} = 2\cancel{f(\square)}$

$\Rightarrow f(x)=2$ ...ma $f(x)<1$!

$\Rightarrow f(x)<1$ è impossibile $\quad \operatorname{Im} f \subseteq [1,+\infty)$

Step 2:

$$\underbrace{f(x)}_{a}\underbrace{f(y)}_{b} = 2f\underbrace{(x+yf(x))}_{\text{robe}}$$

$a \in \operatorname{Im} f,\ b \in \operatorname{Im} f \Rightarrow \frac{ab}{2} \in \operatorname{Im} f$

ES: se io avessi $m = \min \operatorname{Im} f$, allora

$P(f^{-1}(m), f^{-1}(m))$: $\quad m^2 = 2f(\text{robe}) \geq 2m$

$\Rightarrow m \geq 2$

(ma un minimo magari l'immagine non ce l'ha)

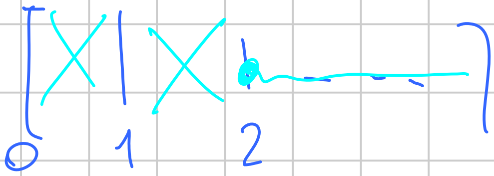
Alternative:

Supponiamo che $a<2$ stia nell'immagine:

Allora ci sta anche $a \frac{a^2}{2} = \left(\frac{a}{2}\right)^n \cdot a$ per ogni n

$\dots \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a^2}{2}$

Se $a<2$, per n abbastanza grande ottengo $\left(\frac{a}{2}\right)^n \cdot a < 1$, ma è assurdo perché non ho elementi <1 nell'immagine



Step 3: Crescenza

$$f(x)\,f(y) = 2f\big(x+yf(x)\big)$$

Dati $a < b$, posso avere $x=a$, $b = x+yf(x)$

$$y = \frac{b-a}{f(a)}$$

$$P\left(a, \frac{b-a}{f(a)}\right): f(a)\,f(\text{mostro}) = 2f(b)$$

$$f(b) = \frac{f(\text{mostro})}{2}\,f(a) \geq f(a)$$

$=$ sse $f(\text{mostro}) = 2$

crescenza <u>debole</u>

A me piacerebbe crescenza forte

$a<b \Rightarrow f(a)<f(b)$ cresc. forte

$\Leftarrow$ ✓

$a\leq b \Rightarrow f(a)\leq f(b)$ cresc. debole

$\Leftarrow$ ✗ false

2 casi:

- $\operatorname{Im} f \subseteq (2,\infty)$: allora, f strettamente crescente e quindi iniettiva

$$f(x)f(y) = 2f(x + yf(x))$$

$P(x,y)$ & $P(y,x)$

$$\cancel{f}(x+yf(x)) \overset{?}{=} \cancel{f}(y+xf(y))$$

finito se so iniettività

- caso 2: $\exists\ b$ t.c. $f(b)=2$

Allora $P(b,b)$: $2 \cdot 2 = 2f(b+2b) \Rightarrow f(3b)=2$

Se $f(b)=2$, allora anche $f(3b)=2$, $f(9b)=2$,

$f(27b)=2$, ...

e per crescenza debole dev'essere f costante $= 2$.