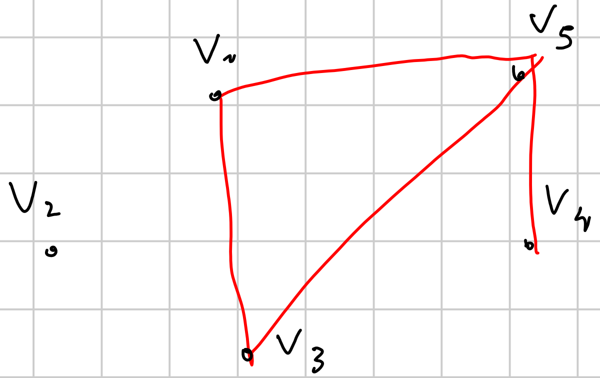
C2 Medium Anér

Titolo nota 05/09/2015

GRAFO = (V, E)

V insieme finito, contenente i "vertici"

E è un insieme, contiene alcune coppie non ordinate di vertici distinti, dette "archi"



CAMMINO = sequenza di vertici, ognuno collegato al precedente e al successivo

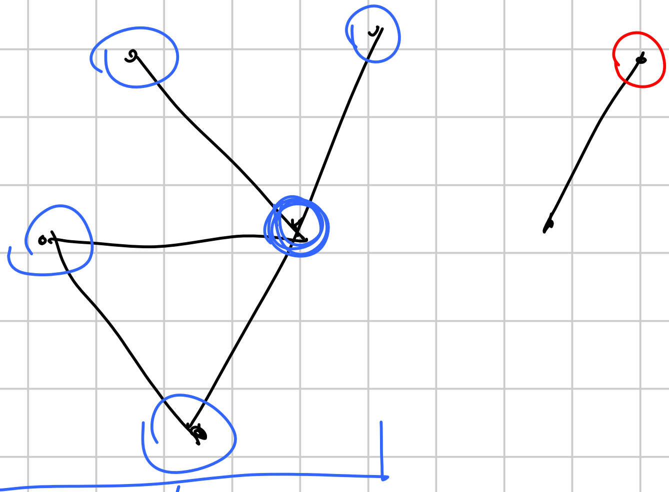
Esempio $V_4 \; V_5 \; V_3 \; V_1 \; V_3 \; V_5 \; V_1$

CAMMINO SEMPLICE: non contiene due volte lo stesso vertice

CAMMINO CHIUSO: l'ultimo vertice è uguale al primo

CICLO cammino semplice, a parte l'ultimo vertice che è uguale al primo (e con almeno 3 vertici distinti).

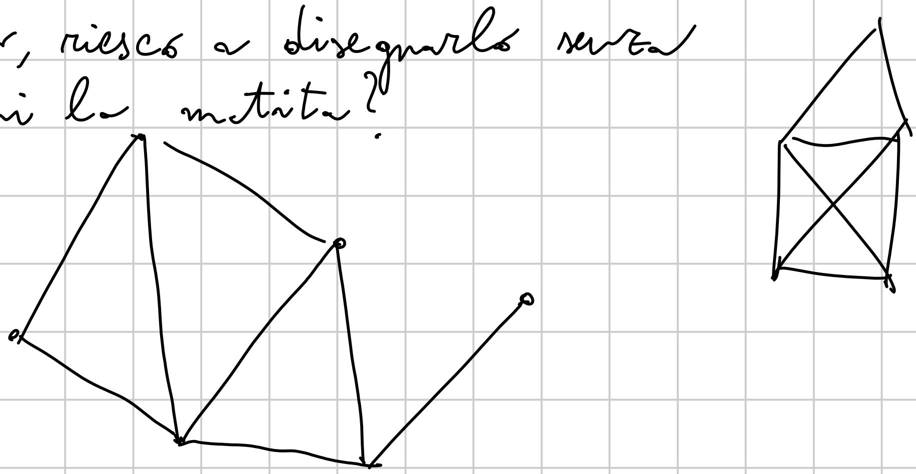
GRAFO CONNESSO Dati un vertice di partenza e uno di arrivo, c'è un cammino che li collega



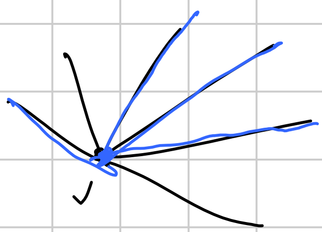
componente connessa

PROBLEMA DEI CIRCUITI EULERIANI

1) Ho un grafo, riesco a disegnarlo senza staccare mai la matita?



Esiste un cammino chiuso che contiene esattamente una volta ogni arco?
È necessario che:

- il grafo sia connesso (a parte punti isolati);
- 

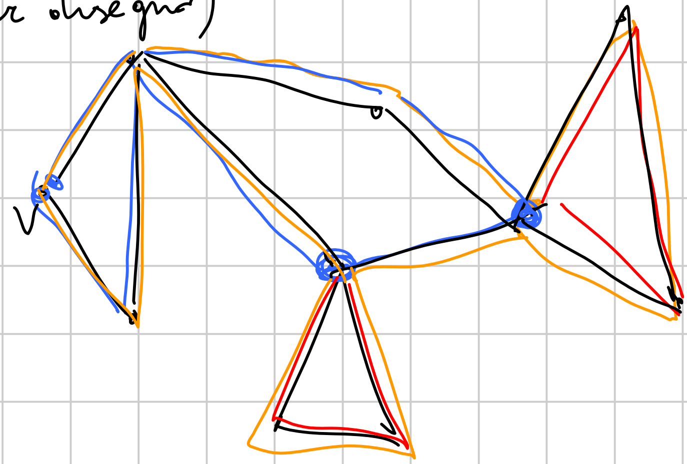
Serve che tutti i vertici abbiano <u>grado</u> pari, compreso il vertice di partenza e arrivo

GRADO di un vertice v in un grafo = n° di archi che escono da quel vertice v = $\deg(v)$

$$\sum_{v \text{ vertice}} \deg(v) = 2|E|$$

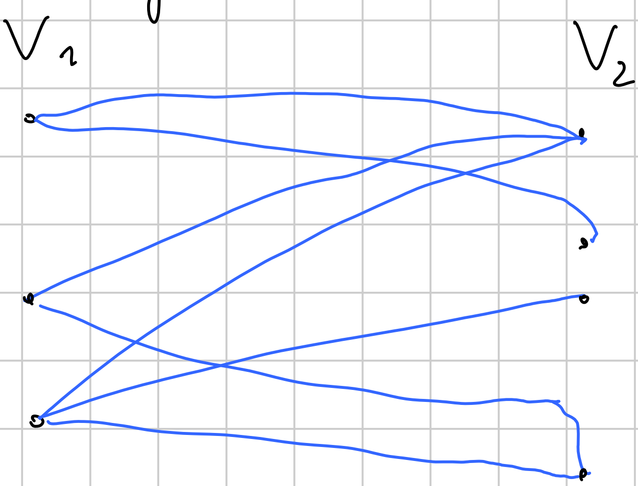
Teorema (Eulero) Se un grafo è connesso e i gradi sono pari, allora esiste un circuito euleriano

DIM (per disegno)



GRAFO BIPARTITO : I vertici V sono divisi in due sottoinsiemi V_1 e V_2 $(V_1 \cap V_2 = \emptyset \quad V_1 \cup V_2 = V)$

e gli archi collegano un vertice in V_1 con uno in V_2



Dato un grafo connesso (V, E), come possiamo capire se è bipartito?

È necessario che ogni cammino chiuso abbia lunghezza pari.

Teorema (grafi bipartiti) Se un grafo è connesso e i suoi cammini chiusi hanno tutti lunghezza pari, allora è bipartito.

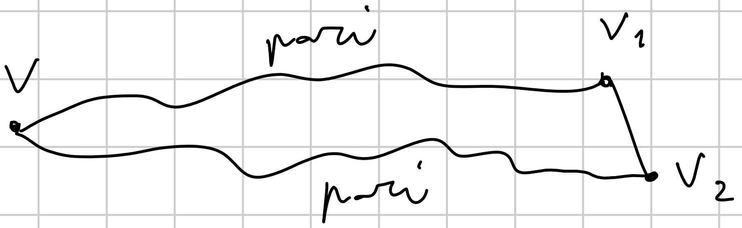
DIM Scelgo un vertice v e lo metto in V_1.

Definizione Dati due vertici w_1, w_2 di un grafo, connesso la distanza è la minima lunghezza di un cammino da w_1 a w_2. $d(w_1, w_2)$

IDEA Metto in V_1 i vertici w per cui $d(v, w)$ è pari

e in V_2 i vertici w per cui $d(v, w)$ è dispari

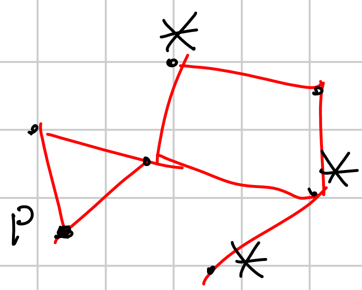
Perché funziona? Se per assurdo ci fosse un $w_1 \in V_1$ e un $w_2 \in V_1$ collegati da un arco, ottengo un cammino chiuso dispari così:



Similmente per $w_1, w_2 \in V_2$

Se un grafo non è bipartito, allora c'è un cammino chiuso di lunghezza dispari. In realtà c'è anche un ciclo di lunghezza dispari (esercizio)

PROBLEMA



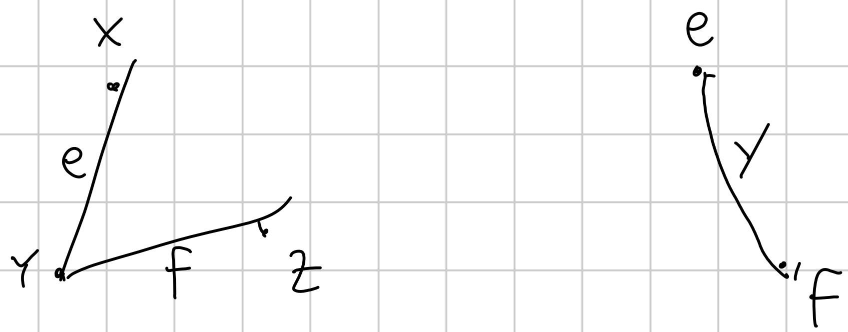
Su ogni vertice c'è una lampadina, accesa o spenta

Una pulce vuole spegnere tutte le lampadine. La pulce può saltare lungo gli archi e deve partire e tornare in P. Ogni volta che arriva in un vertice, cambia lo stato di quella lampadina. (Anche P ha una lampadina).

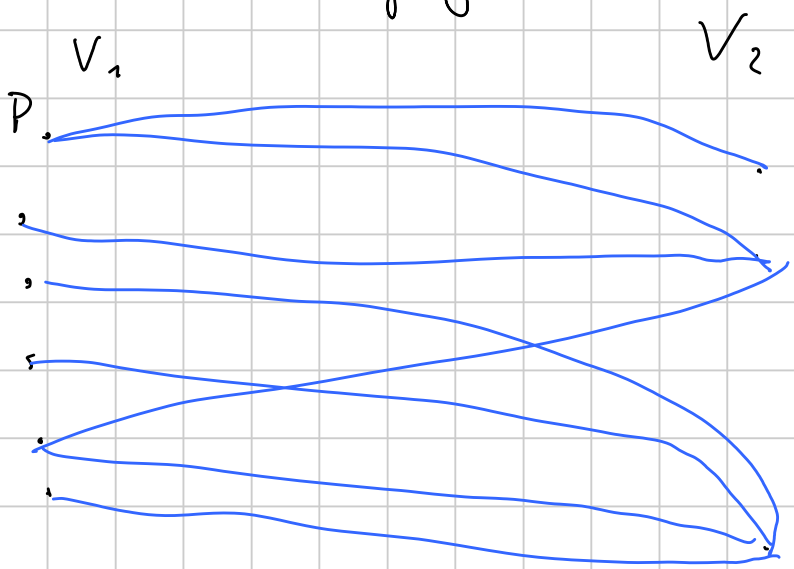
Per quali grafi la pulce è sicura, qualsiasi sia la configurazione di lampadine accese e spente, di farcela?

<u>OSS</u> Serve un grafo connesso.

<u>Precisazioni</u> P è fissato, la pulce può passare più volte in P

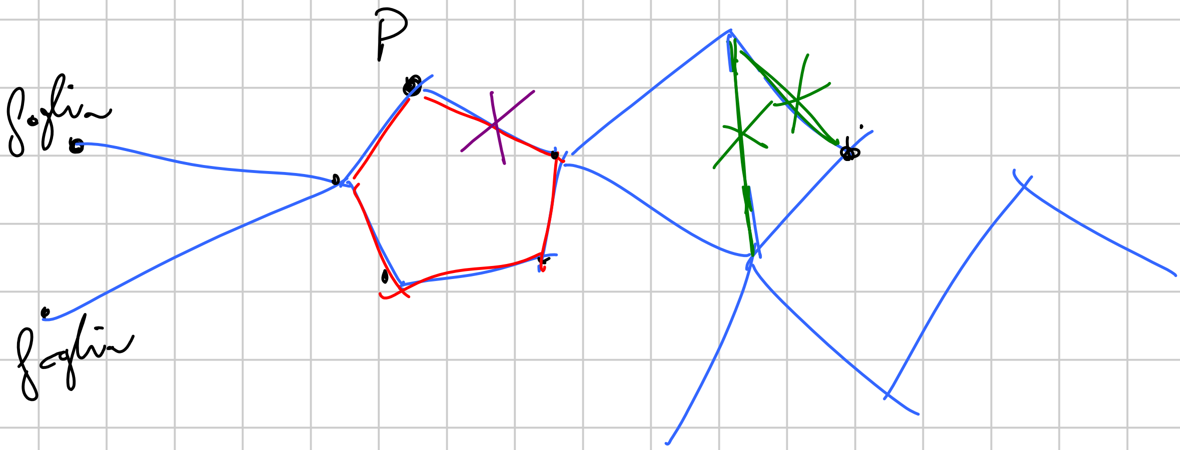


Cosa succede con un grafo bipartito?



Ogni cammino chiuso ha lunghezza pari, quindi se la pulce parte e torna in P, nel percorso opera un numero pari di cambiamenti. Se all'inizio c'è una quantità dispari di lampadine accese, la pulce non riuscirà nell'impresa

Se esiste un ciclo dispari, allora c'è speranza

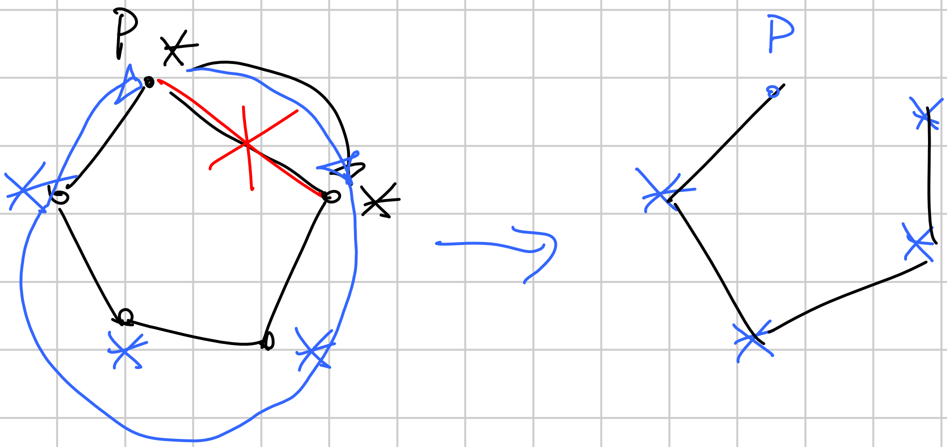


OSS Se crediamo nella congettura, possiamo semplificare il grafo cancellando uno alla volta archi che non toccano il ciclo dispari né disconnettono il grafo.

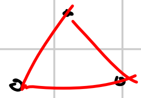
Definizione Un albero è un grafo connesso senza cicli.

OSS Se ora tolgo un arco dal ciclo dispari, rimane un albero.

OSS Posso cambiare P, per esempio supporre che sia sul ciclo dispari.
Spengo le foglie dell'albero ottenuto una a una; rimane P



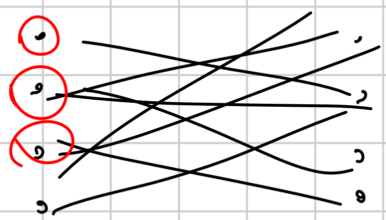
Problema di Turán

Ho un grafo con n vertici senza triangoli (senza configurazioni del tipo )

Quanti archi ha al massimo? $(n \geq 3)$

- Un albero ha $n-1$ archi
- Un grafo bipartito con $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ vertici da una parte e $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$ vertici dall'altra e tutti gli archi possibili ha $\left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor$, che già sono un buon numero

(la stima sciocca è $\binom{n}{2} = \frac{n^2-n}{2}$



Idea: diamo dei pesi ai vertici

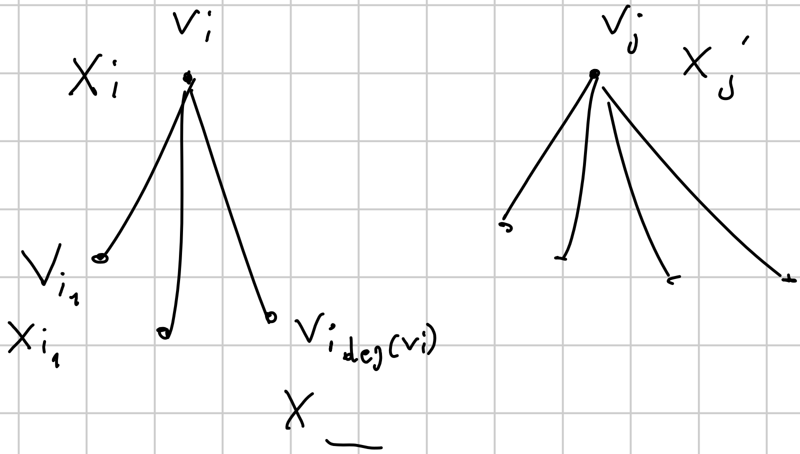
$V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$. v_i ha peso $x_i \geq 0$

Imponiamo $\sum_{i=1}^{n} x_i = n$ cioè il peso medio è 1.

Cerchiamo di massimizzare
$$S = \sum_{\substack{0 \leq i < j \leq n \\ \{v_i, v_j\} \in E}} x_i \cdot x_j$$

OSS Se tutti gli $x_i = 1$ allora $S = |E|$

OSS. Se ho due vertici non collegati v_i, v_j, mi conviene spostare tutto il peso di uno sull'altro



OSS Il massimo si ha in una configurazione in cui tutti i vertici con peso non nullo sono collegati da un arco (formano una "cricca")

OSS L'algoritmo termina, perché a ogni passo aumenta il numero di x_i nulli.

Alla fine il peso rimane su al più due vertici v_i, v_j. Allora $S = x_i \cdot x_j \leq \left(\frac{x_i + x_j}{2}\right)^2 = \frac{n^2}{4}$

$$|E| \leq \frac{n^2}{4}$$ e visto che $|E|$ è intero...

In generale se un grafo su n vertici non contiene cricche di r vertici, allora ci sono al più

$$\left(1 - \frac{1}{r-1}\right)\frac{n^2}{2} \quad \text{archi}$$

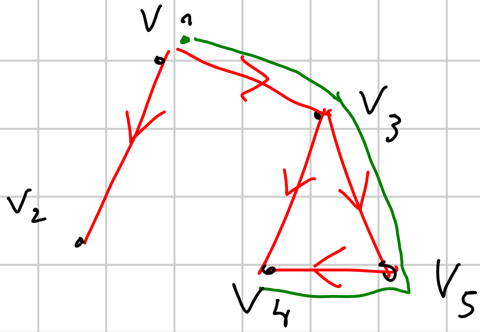
(Dovrebbero funzionare gli stessi argomenti)

(Caro-Wei)

PROBLEMA In un grafo con n vertici e con $|E|$ archi, cerco un'anticricca (insieme di vertici a due a due scollegati). Quanto grande la riesco a trovare? Almeno

$$\frac{n}{2|E|/n + 1}$$

GRAFO ORIENTATO Grafo in cui gli archi hanno una direzione privilegiata

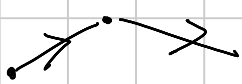
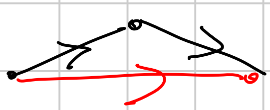


Di solito tra due vertici si suppone che ci sia al massimo un arco (e nel caso non l'altro)

CAMMINO Come prima, ma devo muovermi rispettando le orientazioni

CICLO Cammino chiuso semplice

GRAFO ORIENTATO ACICLICO Non esistono cicli orientati (ma magari ne esistono di non orientati)

ORDINE PARZIALE Grafo orientato aciclico in cui ogni  si completa a una 

Altrimenti un ordine parziale è un insieme V con una relazione $\prec$ tra alcune coppie di elementi, per cui

- $v \not\prec v$
- $v \prec w \prec z$ allora $v \prec z$
- $v \prec w$ allora $w \not\prec v$

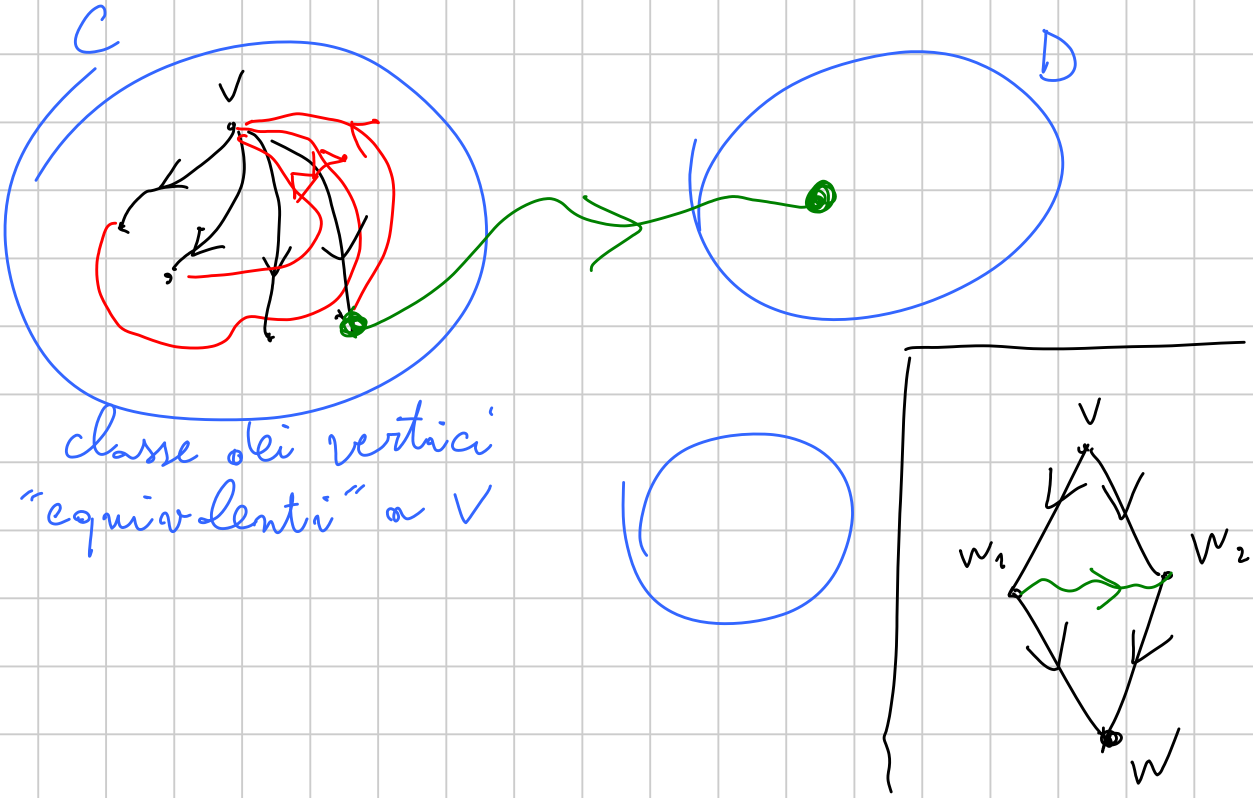
Esempio: S insieme, $(\mathcal{P}(S), \subsetneq)$ è un ordine parziale

Esempio: $\{1, 2, 3, \dots\}$ con l'ordine della divisibilità

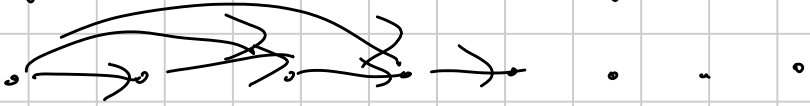
$$m \prec n \text{ se } m \mid n \text{ e } m \neq n$$

Dato un grafo orientato, diciamo che $v \prec w$ se c'è un percorso orientato da w a v.

è un ordine parziale? Sì, ma tra le classi di vertici equivalenti



CATENA: sottoinsieme di un ordine parziale in cui tutti gli elementi sono confrontabili.



ANTICATENA: sottoinsieme / / / / / / / / sono inconfrontabili

<u>Esempio</u> $\mathbb{R}^2 = \{ (x,y) \text{ con } x,y \in \mathbb{R} \}$

$(x,y) \prec (a,b)$ se $x \leq a$ e $y \leq b$) è un ordine parziale

$(1,1) \prec (2,2) \prec (3,3) \prec \ldots$ è una catena

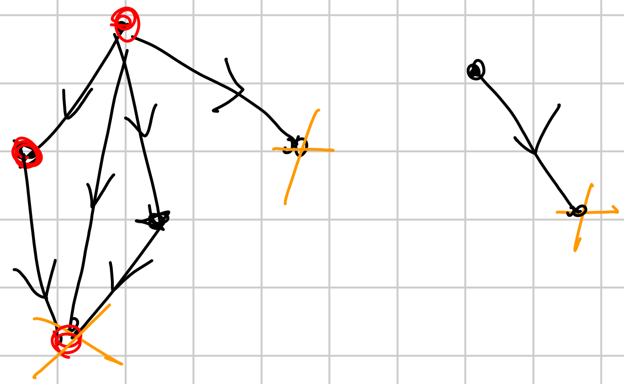
$(1,-1), (2,-2), (3,-3), \ldots$ è una anticatena

<u>TEO (Dilworth)</u> 1) Prendiamo un insieme S (finito) parzialmente ordinato. Supponiamo che la massima lunghezza di una catena sia K. Allora si può partizionare S in K anticatene.

2) Come il punto 1, in cui si scambiano le parole "catena" e "anticatena"

<u>OSS</u> Se nel punto 1 provo a dividere S in meno di K sottoinsiemi, uno di questi contiene due elementi della catena lunga, e questi sono confrontabili $\Rightarrow$ questo sottoinsieme non è un'anticatena.

DIM di 1



X sono i minimali

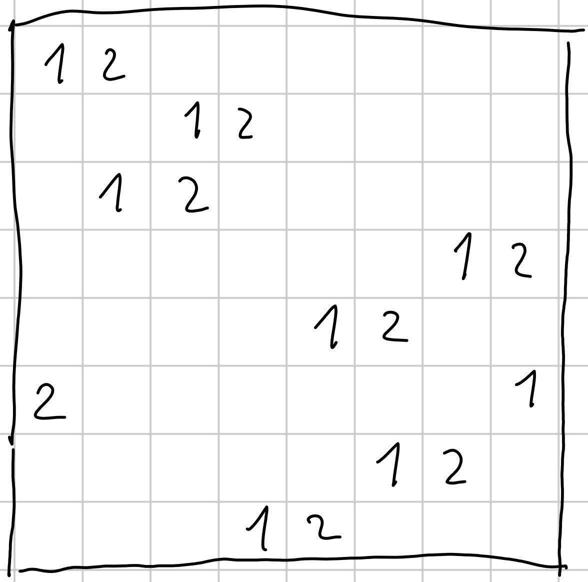
Definizione In un ordine parziale S un elemento m si dice MINIMALE se è minore o inconfrontabile con ogni altro

OSS I minimali sono un'anticatena

OSS Ci sarebbe l'analogo concetto di MASSIMALE...

OSS Ogni catena di lunghezza massima K termina con un minimale.

Induzione (estesa) su K, oppure su $|S|$



Scacchiera $n \times n$

Un 1 su ogni riga e su ogni colonna già dato.

Posso aggiungere un 2 su ogni riga e su ogni colonna (a destra degli 1).

1		2		
	1			2
		1	2	
	2		1	
2				1

Si riesce ad aggiungere un 3?

E se sì, poi come andrei per il 4?

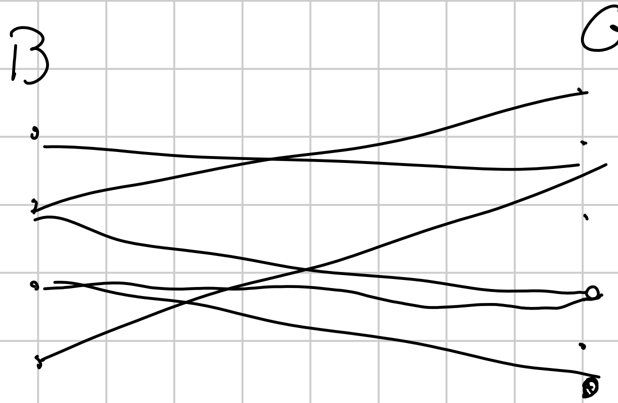
LEMMA DEI MATRIMONI (Teo. di Hall)

C'è un insieme di ragazzi B e un insieme di ragazze G. Ad ogni ragazzo piacciono alcune ragazze. Lo scopo è dare ad ogni ragazzo una moglie diversa, tra quelle che gli piacciono. In quali casi è possibile?

<u>OSS</u> È necessario che $|G| \geq |B|$

Di più: se $A \subseteq B$, posso definire

$$\Gamma(A) = \{ g \in G \text{ per cui esiste almeno un } b \in A \text{ t.c. } g \text{ piace a } b \}$$



Serve $|A| \leq |\Gamma(A)|$.

Il teorema asserisce che se $\forall A \subseteq B$ vale $|\Gamma(A)| \geq |A|$, allora c'è un modo di creare i matrimoni.

DIM Induzione su $|B|$. Passo base $|B|=0,1$ OK.

PASSO INDUTTIVO

Ci sono due possibilità:

1. $\forall A \subseteq B$ con $A \neq \emptyset$, $A \neq B$, vale $|\Gamma(A)| > |A|$

2. $\exists A \subseteq B$ con $A \neq \emptyset$, $A \neq B$ per cui $|\Gamma(A)| = |A|$

Nel caso 1 creo un matrimonio a caso e riduco il numero di ragazzi. (tra b e g)

Se $A \subseteq B \setminus \{b\}$, $A \neq \emptyset$, $|\Gamma(A) \setminus \{g\}| \geq |\Gamma(A)| - 1 \geq |A|$ perché siamo nel caso 1

Nel caso 2 divido il problema in due: cerco di far sposare A con $\Gamma(A)$, e separatamente $B \setminus A$ con $G \setminus \Gamma(A)$. Verifichiamo che valgano le ipotesi:

$\forall C \subseteq A \qquad \Gamma(C) \subseteq \Gamma(A)$ e $|C| \leq |\Gamma(C)|$

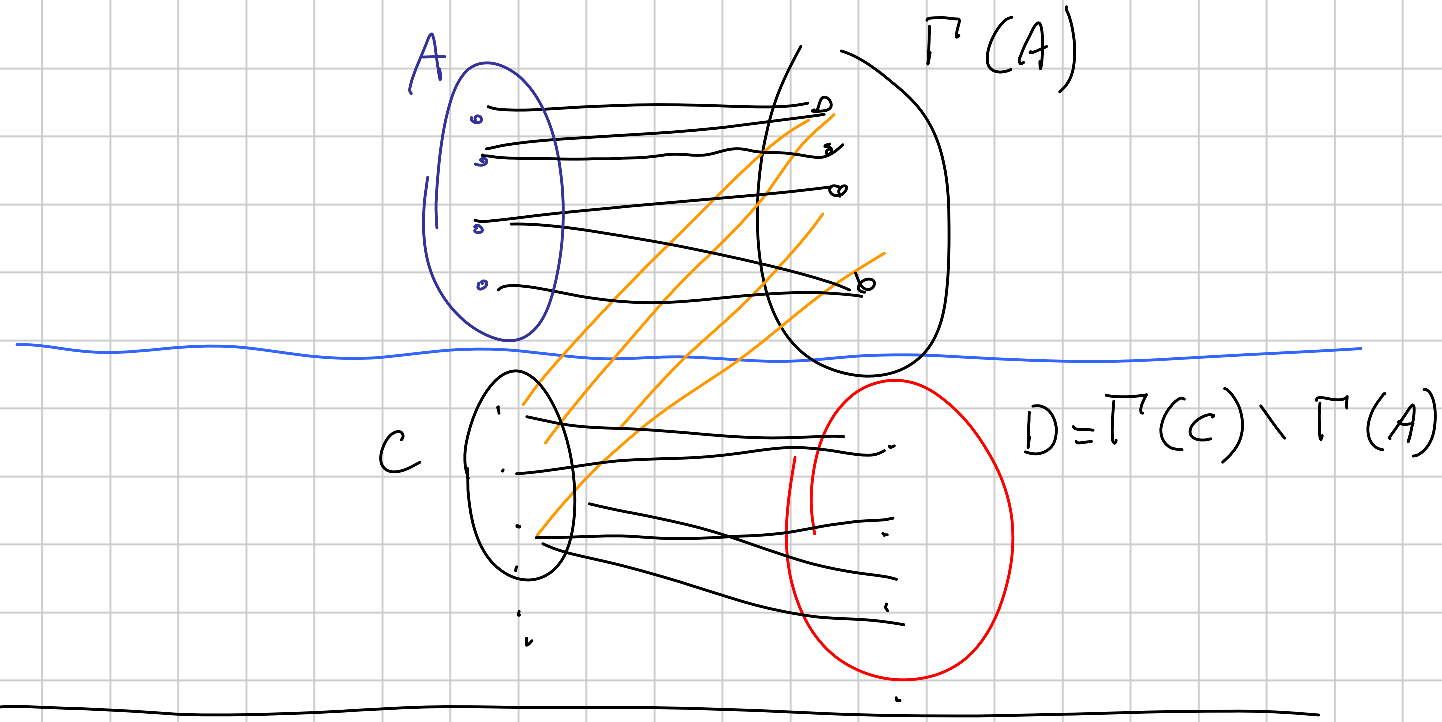
$\forall C \subseteq B \setminus A$ devo verificare che $|C| \leq |\underbrace{\Gamma(C) \cap (G \setminus \Gamma(A))}|$

Considero $A \cup C$ che ha $|A|+|C|$ elementi

$$\Gamma(A \cup C) = \Gamma(A) \cup \left(\Gamma(C) \cap (G \setminus \Gamma(A))\right)$$

che ha $\underbrace{|\Gamma(A)|}_{=|A|} + |\Gamma(C) \cap (\sim)| \geq \underbrace{|A \cup C|}_{=|A|+|C|}$

$|A| + |\sim|$



LEMMA AUSILIARIO PER I MATRIMONI. Supponiamo che $\forall\, b$ e g collegati, $\deg(b) \geq \deg(g)$. Allora è possibile organizzare i matrimoni, in quanto sono soddisfatte le ipotesi del lemma di Hall.

COROLLARIO Se $\deg(b) \geq \deg(g)$ sempre, allora esistono i matrimoni.

1		2	3	
	1	3		2
		1	2	3
3	2		1	
2	3			1

Si può far sposare a ogni riga una colonna diversa, tra quelle nella cui intersezione non c'è scritto nulla? I gradi sono tutti uguali, quindi sì per il corollario.

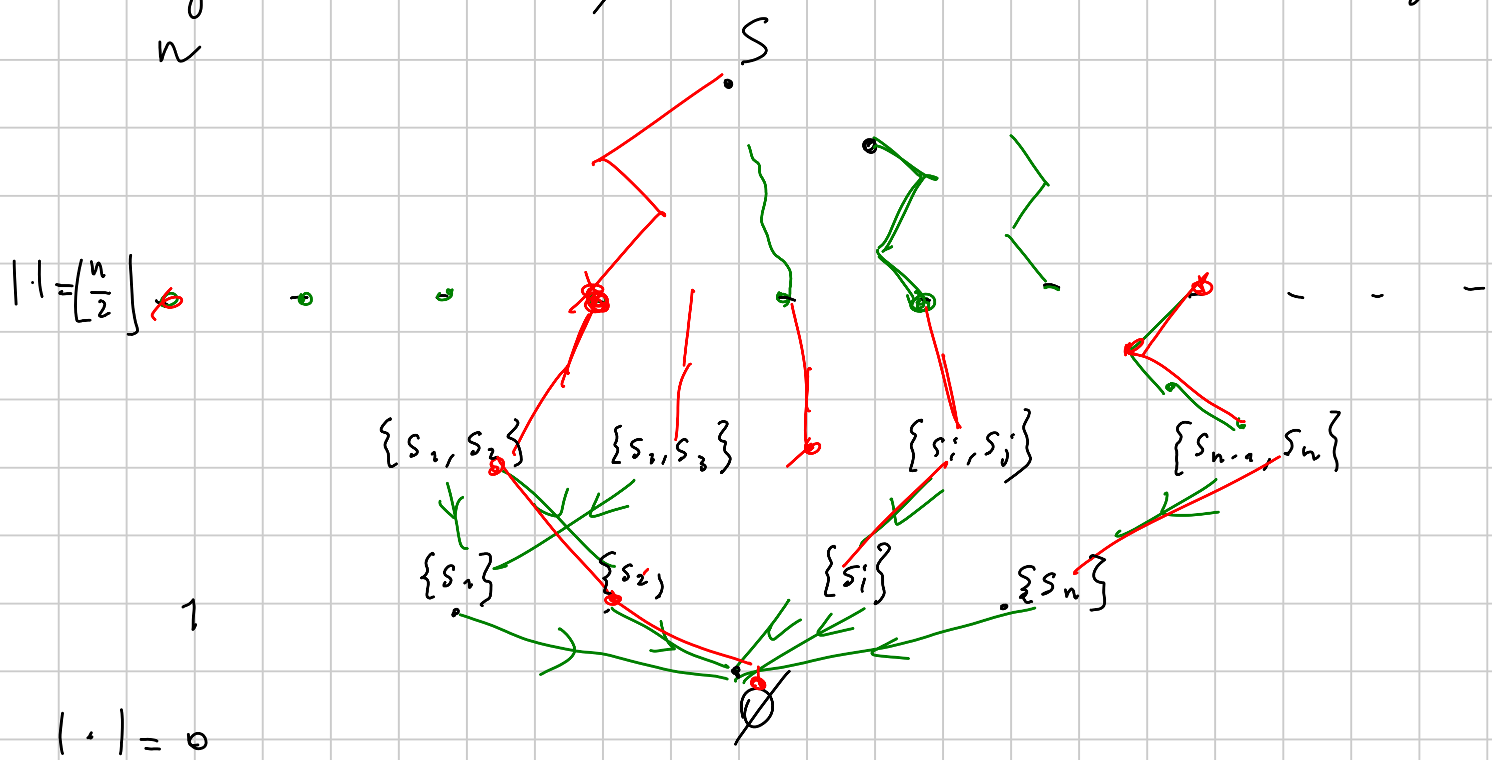
Problema di Sperner S insieme di n elementi. $(\mathcal{P}(S), \subseteq)$ è un ordine parziale. Cerchiamo un'anticatena di dimensione massima. Quanto sarà grande?

Idea Prendo tutti gli insiemi di una certa cardinalità x: così sono sicuro che nessuno ne includerà un altro.

Come x scelgo $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ perché tra gli $\binom{n}{x}$ il più grande è $\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$.

Effettivamente non si fa di meglio

Disegniamo $\mathcal{P}(S)$ $\qquad S = \{s_1 - - s_n\}$



$K < \frac{n}{2}$. Vogliamo creare matrimoni tra

$B = \{$sottoinsiemi di k elementi$\}$ e $G = \{$stt. di $K+1\}$

Usiamo il corollario: ogni b conosce $n-K$

elementi di G. Viceversa, ogni g conosce $k+1$ elementi. $k+1 \leq n-k$ segue da $k < \frac{n}{2}$

e k intero.