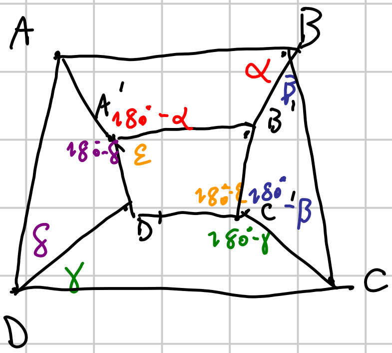
G3 MEDIUM Anér

Titolo nota 06/09/2015

PROBLEMA A, B, C, D, A', B', C', D' punti del piano. I quadrilateri A'B'C'D', ABB'A', BCC'B', CDD'C' e DAA'D' sono ciclici. Allora ABCD è ciclico.



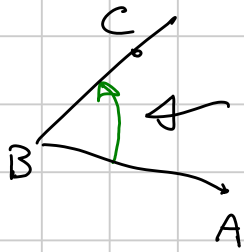
DIM $\alpha+\beta+\gamma+\delta = 180°$

$180°-\alpha + 180°-\beta + 180°-\gamma + 180°-\delta = 540°$

$\Downarrow$

$\alpha+\beta+\gamma+\delta = 180°$

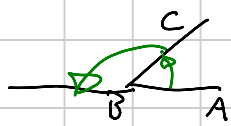
Angoli orientati:



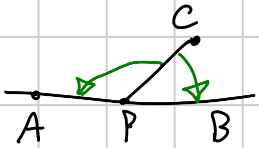
$\measuredangle ABC$ è l'angolo di cui ruotare la retta AB in senso antiorario perché diventi parallela a BC

Consideriamo gli angoli orientati modulo 180°

Proprietà: * $\measuredangle ABC = -\measuredangle CBA$

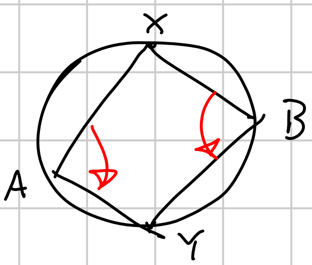


* :



A, P, B allineati $\iff \measuredangle CPA = \measuredangle CPB$

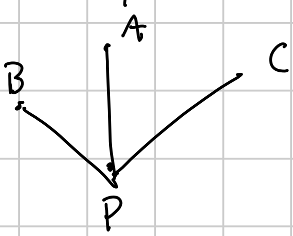
* :



A, B, X, Y conciclici $\iff \measuredangle XAY = \measuredangle XBY$

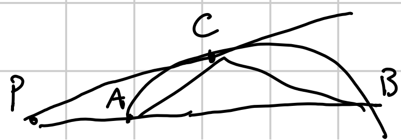
$\boxed{* \measuredangle ABC + \measuredangle BCA + \measuredangle CAB = 0 \text{ sempre}}$

* :



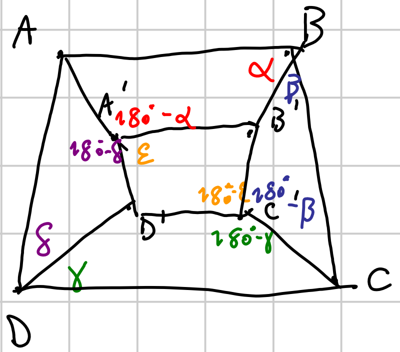
$\measuredangle APC = \measuredangle APB + \measuredangle BPC$

*



PC è tg a cfr(ABC) $\iff \measuredangle PCA = \measuredangle CBA$

Tesi $\measuredangle ABC = \measuredangle ADC$



$$\measuredangle ABB' + \measuredangle B'BC = \measuredangle ADD' + \measuredangle D'DC$$

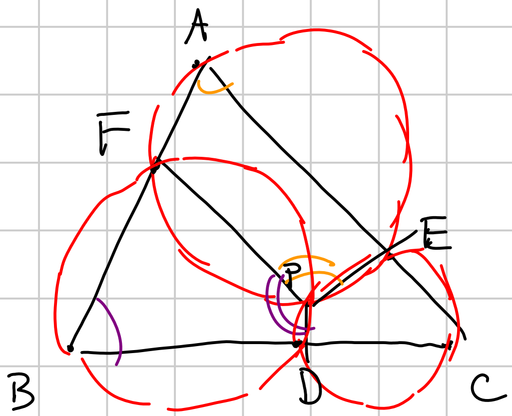
$$\measuredangle AA'B' + \measuredangle B'C'C = \measuredangle AA'D' + \measuredangle D'C'C$$

$$\underbrace{\measuredangle AA'B' + \measuredangle D'A'A}_{\measuredangle D'A'B'} + \underbrace{\measuredangle B'C'C + \measuredangle CC'D'}_{\measuredangle B'C'D'} = 0$$

$\measuredangle D'A'B' + \measuredangle B'C'D' = 0$ è equivalente alla tesi, ed è vera

---

Teorema di Miquel



retta

ABC triangolo, $D \in BC$

$E \in CA$, $F \in AB$.

Γ_A circoscritta a AFE

Γ_B // DBF

Γ_C // CDE

Tesi: $\Gamma_A, \Gamma_B, \Gamma_C$ concorrono

DIM Chiamo P la 2ª intersezione tra Γ_A e Γ_B oltre a F. (Se Γ_A e Γ_B sono tangenti, allora $P = F$ e quando scrivo FP intendo la tangente comune)

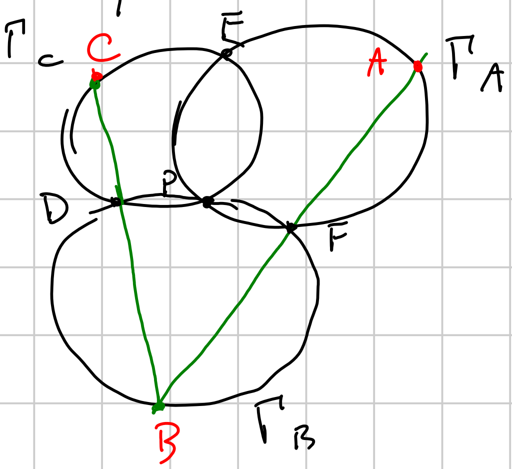
Tesi: $\measuredangle DPE = \measuredangle DCE$

Sappiamo che $\measuredangle DPE = \measuredangle DPF + \measuredangle FPE =$

$= \measuredangle DBF + \measuredangle FAE = \measuredangle CBA + \measuredangle BAC =$

$= \measuredangle BCA = \measuredangle DCE$

Miquel "inverso"



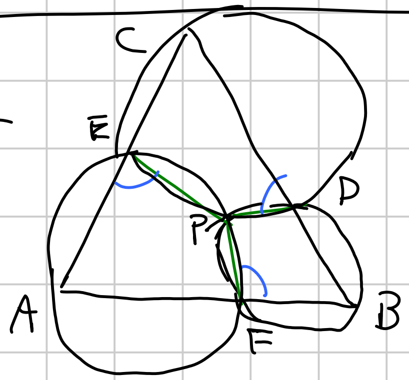
$\Gamma_A, \Gamma_B, \Gamma_C$ si incontrano in P e a coppie in D, E, F.
AFB allineati, BDC allineati.
Allora CEA allineati

DIM Tesi: $\measuredangle CEP + \measuredangle PEA = 0$

$$= \measuredangle CDP + \measuredangle PFA$$

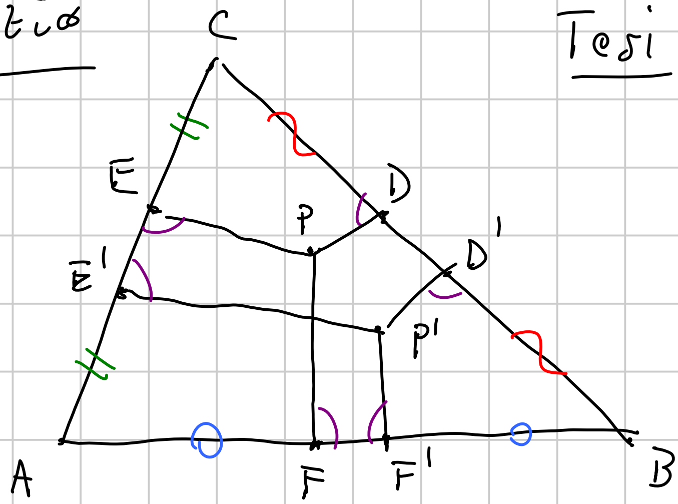
$$= \measuredangle BDP + \measuredangle PFB$$ che so fare 0

OSS



I tre angoli azzurri sono uguali

Esercizio

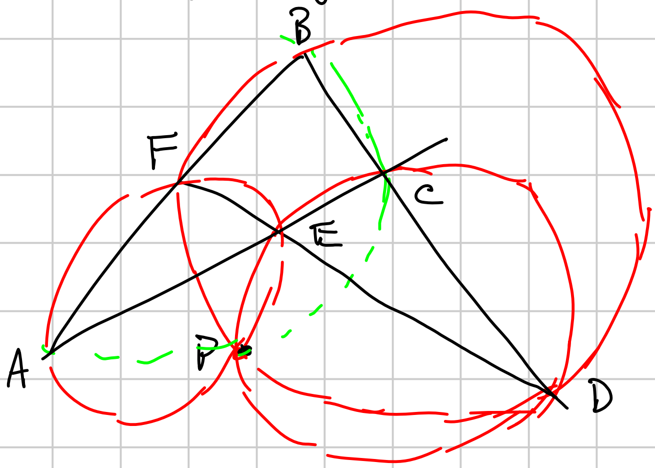


Tesi Gli angoli viola sono tutti uguali

2° TEOREMA DI MIQUEL Date 4 rette l, m, n, p queste determinano 4 triangoli (prese a 3 a 3), i quali hanno 4 circ. circoscritte.
Tesi: queste 4 circonferenze concorrono

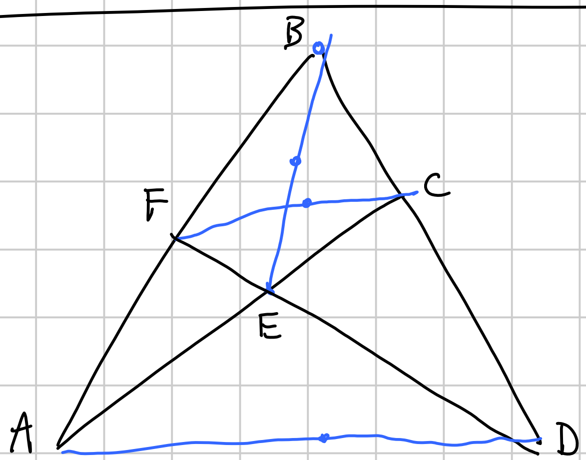
OSS Basta dimostrare che 3 di queste concorrono
(esercizio: giustificare per bene)

DIM



Applico Miquel 1 al ABC con i punti D, E, F.

ESERCIZIO



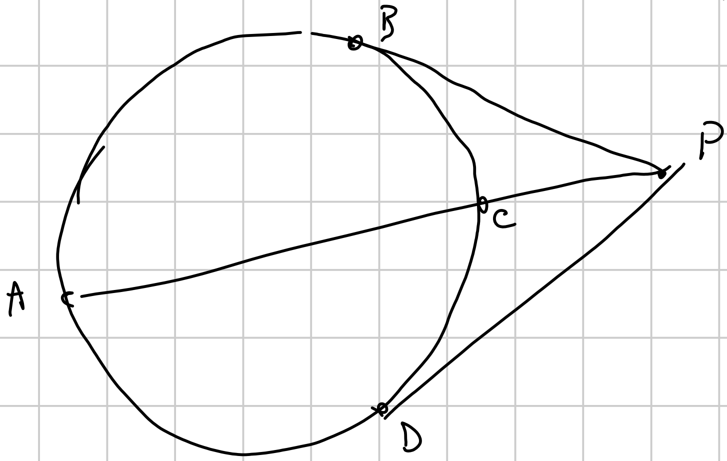
4 rette
4 triangoli
4 ortocentri allineati su una retta r

∃ 3 pti medi di BE, CF, AD sono allineati su una retta S

$r \perp S$

(Consiglio: tracciare le circ. di diametri AD, BE, CF e cercare il "centro radicale")

QUADRILATERI ARMONICI

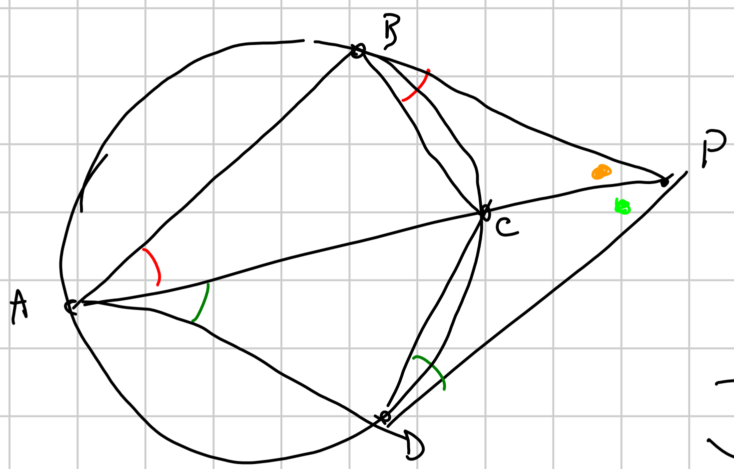


$AB \cdot CD = AD \cdot BC$

Def Un quadril. ABCD si dice armonico se è ciclico e $AB \cdot CD = AD \cdot BC$

<u>Teo</u> Sia ABCD ciclico. Allora ABCD è armonico se e solo se le tangenti alla cfr. circo. per B e per D concorrono con AC, se e solo se qualcosa di simile accade per le tg in A, in C e la retta BD.

<u>DIM</u> Supponiamo AC, tg_B, tg_D concorrenti in P



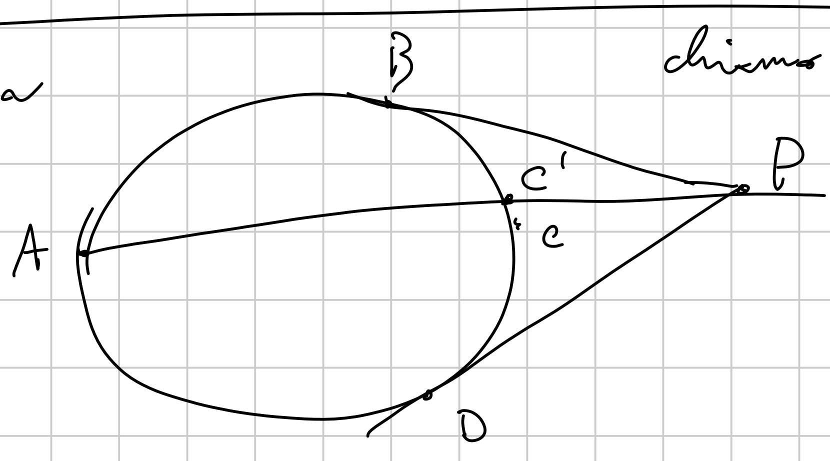
$PBC \sim PAB$
$PCD \sim PDA$ } per angoli

$\Downarrow$

$$\frac{AB}{BC} = \frac{AP}{BP} \quad ; \quad \frac{AD}{DC} = \frac{AP}{DP}$$

segue la tesi perché $PB = PD$

Viceversa



chiamo $P = tg_B \cap tg_C$

$PA \cap cfr = C'$

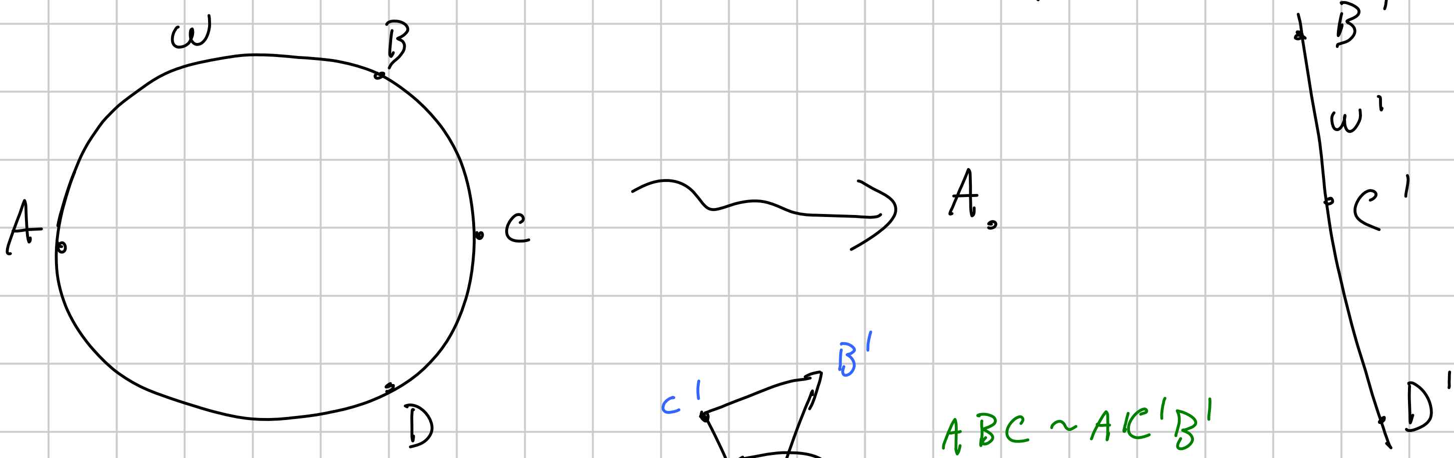
Voglio dimostrare che $C \equiv C'$. C, C' sono sull arco BD che non contiene A. $B\widehat{C}D = B\widehat{C'}D$

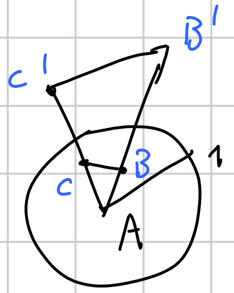
Per ipotesi e usando l'altra freccia $\frac{BC}{CD} = \frac{BA}{AD} = \frac{BC'}{C'D}$

Allora $BCD \sim BC'D$ e ora noto che $BD = BD \Rightarrow BCD \cong BC'D$

e ora è chiaro che $C \equiv C'$.

Oltra caratterizzazione: prendo ABCD armonico e applico un'inversione centrata in A (di raggio 1)





$ABC \sim AC'B'$

$$B'C' = BC \frac{1}{AB \cdot \boxed{AC}}$$

|| sono uguali !!!

$$C'D' = CD \cdot \frac{1}{\boxed{AC} \cdot AD}$$

<u>Morale</u> Se ABCD è armonico e inverto in A, C' sarà il pto medio di B'D'. E viceversa (ricontrollare)

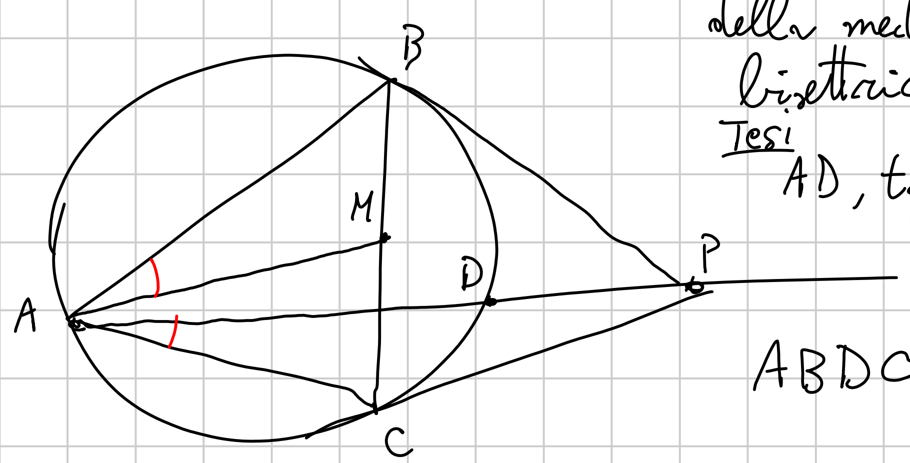
LEMMA DELLA SIMMEDIANA

Simmediana = retta simm. della mediana rispetto alla bisettrice

<u>Tesi</u> AD, tg_B, tg_C concorrono

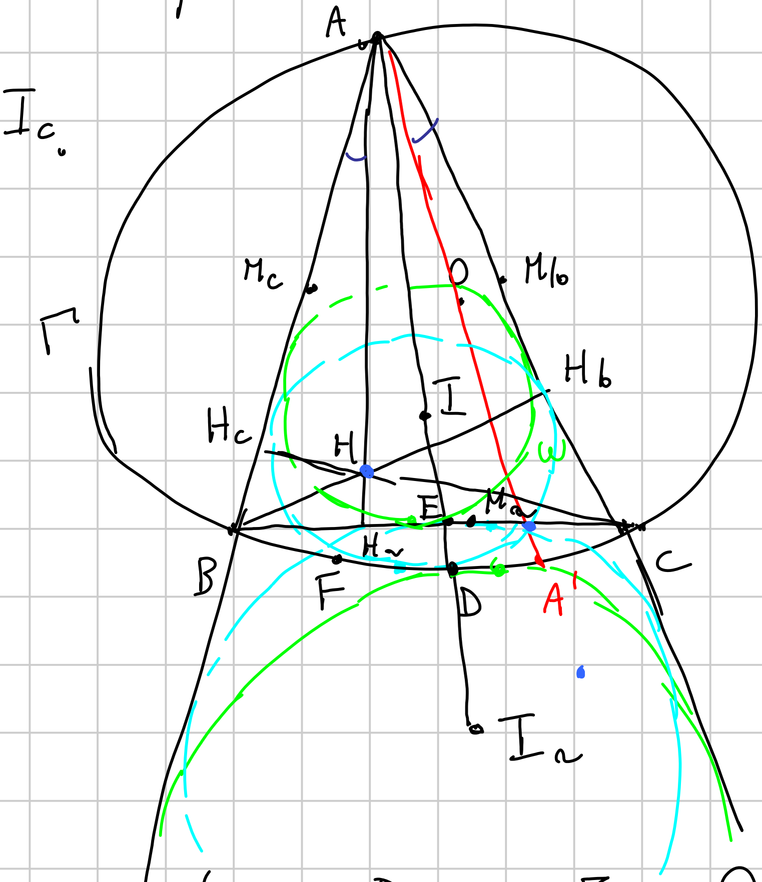
o equivalentemente

ABDC è armonico



Vediamo la costruzione "inversione + simmetria"

Dato ABC inscritto in Γ, applichiamo la seguente trasformazione: prima invertiamo con centro in A e raggio $= \sqrt{AB \cdot AC}$; poi simmetrizziamo rispetto alla bisettrice di $B\hat{A}C$.



ACFB è armonico.

$B \longleftrightarrow C$

$BC \longleftrightarrow \Gamma$

$M_a \longleftrightarrow F$

$I \xleftrightarrow{\text{esercizio}} I_a$

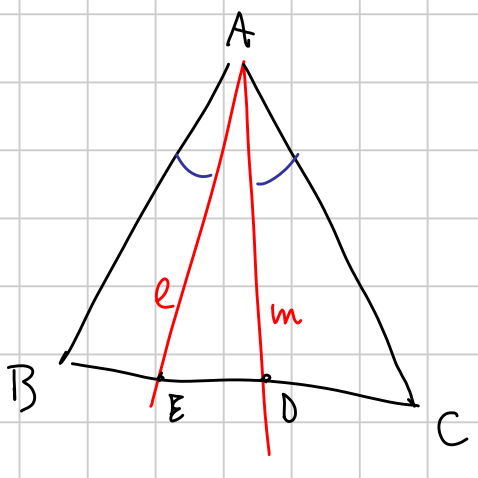
$I_b \longleftrightarrow I_c$

$M_b \longleftrightarrow$ simm. di A risp. a B

$A' \longleftrightarrow H_a$ $\quad D \longleftrightarrow E$ $\quad O \longleftrightarrow$ simm. A risp. a BC

$H \longleftrightarrow$ inverso risp. a Γ di $AO \cap BC$

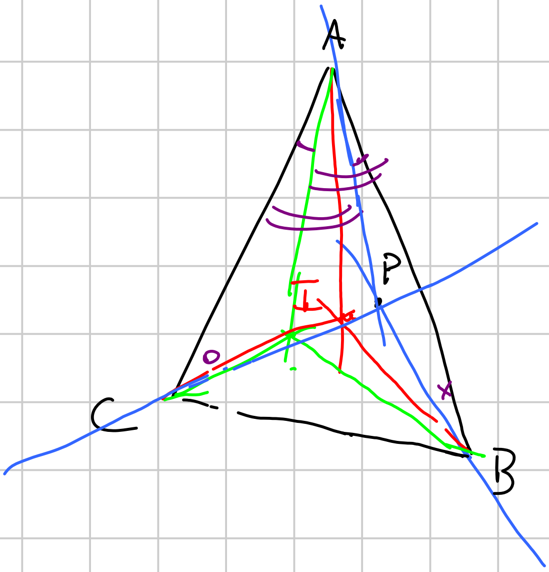
$\omega \longleftrightarrow$ cfr tg. esternamente a Γ, e tg a AB, AC



Se $\measuredangle BAE = \measuredangle DAC$ allora l'inv. + simm. scambia le due ceviane AE, AD.

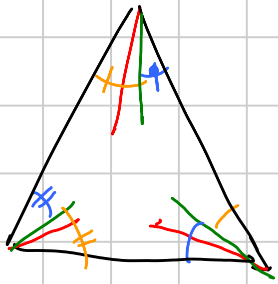
Queste ceviane si dicono isogonali

CONIUGATO ISOGONALE



Simmetrizzo le rette AP, BP, CP rispettivamente rispetto a AI, BI, CI.

Le tre nuove rette concorrono in P', detto coniug. isog. di P rispetto al tr. ABC



Esercizi: - H e O sono coniugati isogonali
(ortocentro circocentro)

- P, Q con. isogonali, li proietto sui 3 lati di ABC, ottengo 6 proiezioni. Questi 6 pti sono su una cfr centrata sul pto medio di PQ