C1 Advanced Tess

Note Title 9/2/2016

Funzioni generatrici

"funzioni generatrici ordinarie" ogf

Sono "scritture formali"

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$$
$$= \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$$

Le ogf sono in corrispondenza con le successioni

$$f(x) \xleftrightarrow{\text{ogf}} (a_i)_{i \in \mathbb{N}}$$

La x non ha alcun valore
lascio stare valutazioni di x

Operazioni con le ogf:

Somma
$$(a_i) \leftrightarrow a(x)$$
$$(b_i) \leftrightarrow b(x)$$

$$(a+b)(x) := \sum_{i (\geq 0)} (a_i + b_i) x^i$$

Prodotto se ho $a(x)$ e $b(x)$

$$a(x) \cdot b(x) := \sum_i c_i x^i$$

$$c_i = \sum_{k=0}^{i} a_k b_{i-k}$$

$c_0 = a_0 b_0$

$c_1 = a_0 b_1 + a_1 b_0$

$\vdots$

$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_n b_0$

Inversa: se ho $f(x)$ chi è $f(x)^{-1}$

sarà una $g(x)$ t.c.

$$f(x) \cdot g(x) = 1 \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \text{ se } i=0 \\ 0 \text{ se } i>0 \end{pmatrix}_{i \in \mathbb{N}}$$

1
0
0
$\vdots$

se $f(x) \longleftrightarrow (f_i)$ li conosco

$g(x) \longleftrightarrow (g_i)$ incognite

avrò $[x^0]$ $f_0 \cdot g_0 = 1 \Rightarrow g_0 = \frac{1}{f_0}$ se $f_0 \neq 0$

$[x^1]$ $f_0 g_1 + f_1 g_0 = 0 \Rightarrow g_1 = -\frac{f_1}{f_0} g_0$

$\vdots$

$[x^n]$ $f_0 g_n + \dots + f_n g_0 = 0$

$\Rightarrow g_n = \frac{\dots}{f_0}$

$\vdots$

Posso invertire tutte le funzioni generatrici con termine noto $\neq 0$

Es: $f(x) = 1 - x \longleftrightarrow (1, -1, 0, 0, \dots)$

$f^{-1}(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots \longleftrightarrow (1, 1, \dots)$

Derivata: $f(x) \longleftrightarrow (f_i)$

$f'(x) \longleftrightarrow (f_{i+1}(i+1))$

$$\left(\sum_i f_i x^i\right)' = \sum_i (f_i\, i) x^{i-1} = \sum_i f_{i+1}(i+1) x^i$$

Integrale : $\int f(x) \longleftrightarrow \left(\frac{f_{i-1}}{i-1} \right.$ per $i \geq 1$
il termine noto non è definito
possiamo porlo $= 0$)

$$a_{n+1} = 2a_n + 1 \quad \forall n \geq 0 \qquad A(x) = \sum_n a_n x^n$$

$$\sum_n a_{n+1} x^n = \sum_n (2a_n + 1) x^n$$

$$\underbrace{\sum_n a_{n+1} x^n}_{\frac{1}{x}(A(x) - a_0)} = 2 \underbrace{\sum_n a_n x^n}_{A(x)} + \underbrace{\sum_n x^n}_{(1-x)^{-1} = \frac{1}{1-x}}$$

$$A(x) - a_0 = 2x A(x) + \frac{x}{1-x}$$

$$A(x) = \frac{a_0 + \frac{x}{1-x}}{1-2x} = \frac{a_0(1-x) + x}{(1-x)(1-2x)} = \frac{\alpha_1}{1-x} + \frac{\alpha_2}{1-2x}$$

$$\frac{1}{1-2x} = \sum_n 2^n x^n$$

α_1 e α_2
risolvono un sistema 2x2

se moltiplico per $1-x$ e valuto in $x=1$

$$\frac{1}{1-2} = \alpha_1 + 0 \qquad \alpha_1 = -1$$

$$\alpha_2 = \dots$$

Allora $A(x) = \dfrac{\alpha_1}{1-x} + \dfrac{\alpha_2}{1-2x}$

$$\overset{!}{=} \sum_n (\alpha_1 + \alpha_2 2^n) x^n$$

$$a_n = \alpha_1 + \alpha_2 2^n$$

Un altro esempio: i Fibonacci

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \qquad \begin{array}{l} F_0 = 0 \\ F_1 = 1 \end{array}$$

$$f(x) = \sum_n F_n x^n$$

$$\sum_n F_{n+2} x^{n+2} = \sum_n F_{n+1} x^{n+2} + \underbrace{\sum_n F_n x^{n+2}}$$

$$(f(x) - 0 - x) = x(f(x) - 0) + x^2 f(x)$$

$$f(x) = \frac{x}{1-x-x^2} = \frac{\alpha_1}{1-r_1 x} + \frac{\alpha_2}{1-r_2 x}$$

con r_1^{-1} e r_2^{-1} radici di x^2+x-1

$$\Rightarrow F_n = (\alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n)$$

ogf e binomiali

$a_{k,n} = \binom{n}{k} \overset{!}{=} \frac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k!}$ $\qquad A_n(x) \longleftrightarrow (a_{k,n})_{k\in\mathbb{N}}$

$\qquad A_n(x) \overset{!}{=} (1+x)^n$

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

moltiplico per x^k e sommo su k

$$A_n(x) = A_{n-1}(x) + x A_{n-1}(x) \overset{!}{=} (1+x) A_{n-1}(x)$$

ed è ovvio che $A_0(x) = 1$

$b_n = \binom{n}{k}$ $\qquad B_k(x) \longleftrightarrow (b_n)$

$$B_k(x) = \frac{x^k}{(1-x)^{k+1}}$$

Numeri di Stirling (del 2° tipo)

$\left\{ {n \atop k} \right\} := \#\{$partizioni di $\{1,\ldots,n\}$ in k sottoinsiemi$\}$

$$\left\{ {n \atop k} \right\} = \underbrace{\left\{ {n-1 \atop k-1} \right\}}_{\text{l'n-esimo da solo}} + k \left\{ {n-1 \atop k} \right\}$$

$$B_k(x) = \sum_n \left\{ {n \atop k} \right\} x^n$$

$$\sum_n \left\{ {n \atop k} \right\} x^n = \sum_n \left\{ {n-1 \atop k-1} \right\} x^n + k \sum_n \left\{ {n-1 \atop k} \right\} x^n$$

$$kx \sum_n \left\{ {n-1 \atop k} \right\} x^{n-1}$$

$$B_k(x) = x B_{k-1}(x) + kx B_k(x)$$

$$B_k(x) = \frac{x}{1-kx} B_{k-1}(x)$$

$$B_k(x) = \frac{x^k}{(1-x)(1-2x)\cdot \ldots \cdot (1-kx)}$$

$$= \frac{\alpha_1}{1-x} + \ldots + \frac{\alpha_k}{1-kx} + C$$

$$\left\{ {n \atop k} \right\} = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i i^n$$

- Sia a_n succ. t.c.

$$a_{n+2} - 1 = a_n + a_{n-1} + \ldots + a_0$$

$a_0 = 1, a_1 = 1$ chi è a_n? chi è $A(x)$?

- Sia b_n succ. t.c.

$b_0 = 1$ e $b_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} b_i b_{n-i}$

chi è b_n? chi è $B(x)$?

Funzioni generatrici esponenziali "Egf"

$$(a_n) \xleftrightarrow{Egf} \sum_{n\geq 0} a_n \frac{x^n}{n!}$$

funziona tutto come prima tranne il prodotto

$$A(x)B(x) := \sum_{n\geq 0} c_n \frac{x^n}{n!}$$

però vale $\frac{c_n}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k!} \frac{b_{n-k}}{(n-k)!}$

$$\Rightarrow c_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k b_{n-k}$$

Altre lievi differenze:

$$(1) \leftrightarrow \sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!} =: e^x = \exp(x)$$

Oss: soddisfa $e^x \cdot e^y = e^{x+y}$

Esempio: permutazioni senza punti fissi

sia d_n = # perm. di n senza p.ti fissi

vale che

$$n! = d_n + n d_{n-1} + \binom{n}{2} d_{n-2} + \ldots + \binom{n}{n} d_0$$

$$n! = \sum_k \binom{n}{k} d_{n-k}$$

moltiplico per $\frac{x^n}{n!}$ e sommo su n

$$\frac{1}{1-x} = \sum_n x^n = \sum_k \binom{n}{k} d_{n-k} \frac{x^n}{n!}$$

$$= D(x) \cdot e^x$$

$$D(x) := \sum_n \frac{d_n x^n}{n!}$$

$$\Rightarrow D(x) = \frac{e^{-x}}{1-x}$$

$$\Rightarrow \left[\frac{x^n}{n!}\right] D(x) = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$$

Funzioni Generatrici di Dirichelet "Dsgf"

$$(a_n) \overset{Dsgf}{\longleftrightarrow} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s} = A(s)$$

$$A(s) B(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{n^s} = C(s)$$ che sono c_n?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{n^s}$$

guardo il coefficiente di $\frac{1}{m^s}$

$$\sum_{\substack{d \mid m \\ d>0}} a_d \, b_{\frac{m}{d}} = c_m$$

Sia $f(n)$ una funzione moltiplicativa

$$\mathrm{Dsgf}(f(n))(s) = \sum_n \frac{f(n)}{n^s}$$

$$= \prod_{p \text{ primo}} \left(1 + \frac{f(p)}{p^s} + \frac{f(p^2)}{p^{2s}} + \dots\right)$$

$\left[\frac{1}{n^s}\right]$: $f(n) = \prod_{p^k \| n} f(p^k)$ è vera per moltiplicatività

$$(1,1,1,\dots) \overset{\mathrm{Dsgf}}{\longleftrightarrow} \sum_n \frac{1}{n^s} =: \zeta(s)$$

funzione di Moebius: $\mu : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ moltiplicativa

$$\mu(1) = 1, \ \mu(p) = -1, \ \mu(p^k) = 0 \quad \forall k>1 \ \forall p \text{ primo}$$

$$\mathrm{Dsgf}(\mu(n))(s) = \prod_{p \text{ primo}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)$$

Vale che $\zeta^{-1}(s) = \text{Dsgf}(\mu(n))(s)$

Thm: (Formula di inversione di Moebius)

siano $(a_n), (b_n)$ succ. t.c.

$$b_n = \sum_{d|n} a_d$$

$$\Rightarrow a_n = \sum_{d|n} b_d \, \mu\left(\frac{n}{d}\right)$$

Dim: moltiplichiamo per $\frac{1}{n^s}$ e sommiamo su n

$$\underbrace{\sum_n \frac{b_n}{n^s}}_{= B(s)} = \underbrace{\sum_n \left(\sum_{d|n} a_d\right)\frac{1}{n^s}}_{= A(s)\,\zeta(s)}$$

$A(s) \xleftrightarrow{\text{Dsgf}} (a_i)$ $\qquad \zeta(s) \xleftrightarrow{\text{Dsgf}} (1,1,\ldots)$

Abbiamo ottenuto $B(s) = A(s)\zeta(s)$

$$A(s) = B(s)\,\zeta^{-1}(s)$$

guardo il coeff. di $\frac{1}{n^s}$: $a_n = \sum_{d|n} b_d \, \mu\left(\frac{n}{d}\right)$

Snake Oil Method

è un metodo per risolvere problemi come:

trovare una formula "esplicita" per

$$f(n) = \sum_k \binom{n+k}{2k} 2^{n-k}$$

dimostrare che $\forall\, m, n \geq 0$

$$\sum_k \binom{m}{k}\binom{n+k}{m} = \sum_k \binom{m}{k}\binom{n}{k} 2^k$$

Esempio 1

$$f(n) = \sum_{k \geq 0} \binom{k}{n-k} \qquad \text{per } n > 0$$

$$F(x) = \sum_n f(n)\, x^n = \sum_n \sum_{k>0} \binom{k}{n-k} x^n$$

$$= \sum_{k>0} \sum_n \binom{k}{n-k} x^n$$

$$= \sum_{k>0} x^k \underbrace{\sum_n \binom{k}{n-k} x^{n-k}}_{= (1+x)^k}$$

CIP ALLE IMO

$$F(x) = \sum_{k\geq 0} x^k (1+x)^k = \frac{x(1+x)}{1-x(1+x)} = \frac{x(1+x)}{1-x-x^2}$$

$$= -1 + \frac{1}{1-x-x^2}$$

altro esempio:

$$f(n) = \sum_k \binom{n+k}{2k} 2^{n-k} \qquad n \geq 0$$

$$\sum_n f(n) x^n = \sum_k \sum_n \binom{n+k}{2k} 2^{n-k} x^n$$

$$= \sum_k \frac{1}{2^k} \sum_n \binom{n+k}{2k} (2x)^n$$

$$= \sum_k \frac{1}{2^k} \frac{1}{(2x)^k} \sum_n \binom{n+k}{2k} (2x)^{n+k}$$

$$= \sum_k \frac{1}{(\cancel{4}x)^k} \frac{(\cancel{2}x)^{\cancel{2}k}}{(1-2x)^{2k+1}}$$

$$= \frac{1}{1-2x} \frac{1}{1-\frac{x}{(1-2x)^2}}$$

$$= \frac{1}{(1-2x) - \frac{x}{1-2x}}$$

$$= \frac{1-2x}{(1-2x)^2 - x} = \frac{1-2x}{1-5x+4x^2}$$

$$f(n) = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n \qquad = \frac{\alpha_1}{1-x} + \frac{\alpha_2}{1-4x}$$

$$r_1 = 1 \quad r_2 = 4$$

$$a(n,m) = \sum_k \binom{m}{k}\binom{n+k}{m}$$

$$b(n,m) = \sum_k \binom{m}{k}\binom{n}{k} 2^k$$

$$\sum_n \sum_m a(n,m)\, x^n y^m = A(x,y)$$

$$= \sum_n \sum_m \sum_k \binom{m}{k}\binom{n+k}{m} x^n y^m$$

$$= \sum_k \sum_m \binom{m}{k} y^m \sum_n \binom{n+k}{m} x^n$$

$$= \sum_k x^{-k} \sum_m \binom{m}{k} y^m \underbrace{\sum_n \binom{n+k}{m} x^{n+k}}_{= \frac{x^m}{(1-x)^{m+1}}}$$

$$= \sum_k \frac{x^{-k}}{1-x} \sum_m \binom{m}{k}\left(\frac{yx}{1-x}\right)^m$$

$$= \sum_k \frac{\cancel{x^{-k}}}{1-x} \frac{\left(\frac{y\cancel{x}}{1-x}\right)^k}{\left(1-\frac{yx}{1-x}\right)^{k+1}}$$

$$= \frac{1}{1-x}\,\frac{1}{1-\frac{yx}{1-x}}\,\frac{1}{1-\frac{\frac{y}{1-x}}{1-\frac{yx}{1-x}}} = A(x,y)$$

Esercizi assegnati

[Egf]

Calcolare il # di permutazioni su n elementi con ordine ≤ 2

$$\left[Egf(p_n) = e^{\frac{x^2}{2}+x} \right]$$

Calcolare il # di permutazioni su n elementi con solo cicli di ordine 1,3,7

$$\left[Egf(p_n) \overset{?}{=} e^{\frac{x^7}{7!}+\frac{x^3}{3!}+x} \right]$$

[Dsgf]

Calcolare il # di stringhe di 0,1 con n lettere che non siano ripetizione di una sottostringa
(es: 100100100 NO, 10010010 sì)

$$\left[\prod_{\substack{p \text{ primo} \\ p^k \| n}} \left(2^{p^k} - 2^{p^{k-1}}\right) \right]$$

Calcolare $\varphi(n)$ e $Dsgf(\varphi(n))$

$$\left[Dsgf(\varphi(n))(s) = \zeta(s-1) \right]$$

Esprimere $\Phi_n(x)$ come frazione di polinomi del tipo $(1-x^m)$

[Snake Oil Method]

Dimostrare che $\sum_m \binom{r}{m}\binom{s}{t-m} = \binom{r+s}{t}$

calcolare di conseguenza $\sum_i \binom{n}{i}^2$, $\sum_i \binom{n}{i}\binom{2n}{n-i}$

Dimostrare che $\sum_k \binom{2n+1}{2k}\binom{m+k}{2n} = \binom{2m+1}{2n}$

Calcolare $\sum_{i=1}^{n} \binom{n+i-1}{2i-1}$

[F_{2n}]

Mostrare che $\sum_k (-1)^{n-k}\binom{2n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$

[hint: mostrare un'identità più generale che contenga più variabili libere, quindi S.O.M., quindi specializzare l'identità ottenuta]