Senior 2016 - C2 Advanced (Anér)

Note Title 9/3/2016

Spazio di probabilità: insieme (finito) Ω non vuoto + una funzione $P : \Omega \to [0,1]$ con la proprietà $\sum_{\omega \in \Omega} P(\omega) = 1$

Per ogni $S \subseteq \Omega$ definiamo $P(S) = \sum_{\omega \in S} P(S)$

Una variabile aleatoria è una funzione
$X : \Omega \to \mathbb{R}$

Il valore atteso, o valor medio, o speranza di X

è $\mathbb{E}[X] = \sum_{\omega \in \Omega} P(\omega) \cdot X(\omega)$

LINEARITÀ DI $\mathbb{E}$

Se ho due variabili aleatorie X e Y, e se $\lambda \in \mathbb{R}$, allora

$$\mathbb{E}[X + \lambda \cdot Y] = \mathbb{E}[X] + \lambda \cdot \mathbb{E}[Y]$$

Due eventi (sottoinsiemi di Ω) A e B si dicono indipendenti se

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

(In particolare $\emptyset$ e Ω sono indipendenti da ogni altro evento)

Due variabili X e $Y : \Omega \to \mathbb{R}$ sono indipendenti se per ogni $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

$$\mathbb{P}\left(X^{-1}(\lambda) \cap Y^{-1}(\mu)\right) = \mathbb{P}\left(X^{-1}(\lambda)\right) \cdot \mathbb{P}\left(Y^{-1}(\mu)\right)$$

<u>Teo</u> Se X e Y sono var. al. indip., allora

$$\mathbb{E}[X \cdot Y] = \mathbb{E}[X] \cdot \mathbb{E}[Y]$$

<u>DIM</u> $LHS = \sum_{\omega \in \Omega} P(\omega) \cdot X(\omega) \cdot Y(\omega) =$

$$= \sum_{\substack{\lambda \in \operatorname{Im} X \\ \mu \in \operatorname{Im} Y}} \sum_{\substack{\omega \in \Omega : X(\omega) = \lambda \\ Y(\omega) = \mu}} P(\omega) \cdot \lambda \cdot \mu =$$

$$= \sum_{\substack{\lambda \in \operatorname{Im} X \\ \mu \in \operatorname{Im} Y}} \lambda \cdot \mu \cdot P\left(X^{-1}(\lambda) \cap Y^{-1}(\mu)\right) \underset{\substack{X \text{ e } Y \\ \text{sono} \\ \text{indipendenti}}}{=}$$

$$= \sum_{\substack{\lambda \in \operatorname{Im} X \\ \mu \in \operatorname{Im} Y}} \lambda \cdot \mu \cdot P\left(X^{-1}(\lambda)\right) \cdot P\left(Y^{-1}(\mu)\right) =$$

$$= \left(\sum_{\lambda \in \operatorname{Im} X} \lambda \cdot P\left(X^{-1}(\lambda)\right)\right)\left(\sum_{\mu \in \operatorname{Im} Y} \mu \cdot P\left(Y^{-1}(\mu)\right)\right) =$$

$$= \mathbb{E}[X] \cdot \mathbb{E}[Y]$$

Disuguaglianza di Markov

Se X ha valori ≥ 0 e $K > 0$ è un numero reale

allora $$\mathbb{P}(X \geq K) \leq \frac{\mathbb{E}[X]}{K}$$

dove P (proposizione) $= P$ (evento per cui la prop. è vera)

DIM $$K \cdot \mathbb{P}(X \geq K) \overset{?}{\leq} \mathbb{E}[X]$$

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{\omega : X(\omega) \geq K} P(\omega) \cdot X(\omega) + \sum_{\omega : X(\omega) < K} P(\omega) \cdot X(\omega)$$

$$\sum_{\omega : X(\omega) \geq K} P(\omega) \cdot X(\omega) \geq K \cdot P(X \geq K), \qquad \sum_{\omega : X(\omega) < K} P(\omega) \cdot X(\omega) \geq 0 \quad (X(\omega) \geq 0)$$

Caso particolare X è a valori naturali

allora $$\mathbb{P}(X > 0) \leq \mathbb{E}[X]$$

Dadi a due facce (monete)

Ho n monete con facce segnate come $+1$ e -1.
Se le lancio tutte, ho 2^n possibili esiti. I lanci sono indipendenti, ossia eventi del tipo

$\{$la i-esima moneta dà $+1\}$ e
$\{$la j-esima moneta dà $-1\}$ sono indipendenti per $i \neq j$

Considero il prodotto degli esiti delle monete

(ossia la parità del numero di -1)

$X_i : \Omega \to \{\pm 1\}$ la variabile "esito della i-esima moneta"

$$\prod_{i=1}^{n} X_i : \Omega \to \{\pm 1\}$$

Supponiamo che $\prod X_i$ sia bilanciata (ossia assume con prob. $\frac{1}{2}$ il val. $+1$ e con $\frac{1}{2}$ il val. -1)

<u>Tesi</u> Una delle monete è bilanciata.

<u>DIM</u> Considero $\mathbb{E}\left[\prod X_i\right] \underset{\uparrow}{=} \prod \mathbb{E}[X_i]$ perché le X_i sono indip.

$$\parallel$$

$$\frac{1}{2}\cdot(+1)+\frac{1}{2}(-1)=0$$

c'è un $\mathbb{E}[X_i]$ nullo $\Rightarrow$ quella moneta è bilanciata

---

Monete a tre facce (cilindriche?)

Le facce sono contrassegnate dai numeri $1, 2, 3$; le monete sono n e sono indip. Le lanciamo tutte e sommiamo i risultati mod 3.

Supponiamo che la somma assuma con prob. $\frac{1}{3}$ ognuna delle 3 classi mod 3.

<u>Tesi</u> Una delle monete è "bilanciata", cioè assume i valori $1, 2, 3$ equiprobabilmente.

Estendiamo il concetto di var. al., inventando le var. al. complesse. $X_i : \Omega \to \mathbb{C}$.

X_i vale 1 se esce 3 nella i-esima moneta

/ / ζ / / 1 / / / / / /

/ / / ζ^2 / / 2 / / / /

ove ζ è una radice cubica primitiva di 1 in $\mathbb{C}$.

Il valore atteso è definito come prima (e ha le stesse proprietà di prima)

Ora
$$\mathbb{E}\Big[\prod X\Big] \overset{\text{indip. delle } X_i}{=} \prod \mathbb{E}[X_i]$$
$$\mathbb{E}\Big[\prod X\Big] = 0 = \frac{1}{3}\cdot 1 + \frac{1}{3}\cdot\zeta + \frac{1}{3}\cdot\zeta^2$$

Quindi c'è un X_i per cui $\mathbb{E}[X_i] = 0$

$$P(X_i = 1)\cdot\zeta + P(X_i = 2)\cdot\zeta^2 + P(X_i = 3)\cdot 1 = 0$$

questi sono uguali, altrimenti la parte immaginaria della somma è non nulla.

moltiplicando per ζ e riapplico il ragionamento.

OSS: Da 4 in su l'analogo problema non ha la stessa risposta.

ogf di una variabile aleatoria

$X : \Omega \to \mathbb{R}$

$$\mathrm{ogf}(X) = \sum_{\omega\in\Omega} P(\omega)\cdot x^{X(\omega)}$$

vive nel mondo delle somme formali di potenze formali di x con esponente reale

(Se X ha valori naturali, allora viene un polinomio)

<u>OSS</u> Se X e Y sono indipendenti, allora

$$\mathrm{ogf}(X+Y) = \mathrm{ogf}(X) \cdot \mathrm{ogf}(Y)$$

(verificare ...)

GRAFI ALEATORI

Prendiamo n vertici e per ogni coppia di essi scegliamo se collegarli con un arco o no. Ci sono $2^{\binom{n}{2}}$ possibilità, che costituiscono l'insieme degli esiti Ω.

Fissiamo $p \in [0,1]$ e inseriamo ogni arco, indipendentemente dagli altri con probabilità p.

$$P\left(\text{grafo } G = (\{1, \dots n\}; E)\right) = p^{|E|} \cdot (1-p)^{\binom{n}{2} - |E|}$$

Stima dal basso dei numeri di Ramsey

<u>Ricordo</u> Dato $k \geq 0$ naturale, se considero un grafo su N vertici, con N abbastanza grande, questo contiene sicuramente una k-cricca o una k-anticricca.

Basta $N = \binom{2k}{k}$. Il minimo N per cui ogni N-grafo ha una k-cricca o una k-anticricca si chiama $R(k,k)$.

$$R(3,3) = 6 \qquad R(4,4) = 17 \qquad R(5,5) = ?$$

Quanto in fretta crescono? $\binom{2k}{k} = \frac{(2k)!}{k! \cdot k!} \simeq$

$$\simeq \frac{\left(\frac{2k}{e}\right)^{2k} \cdot \sqrt{2\pi \cdot 2k}}{\left[\left(\frac{k}{e}\right)^{k} \cdot \sqrt{2\pi k}\right]^2} \simeq \frac{2^{2k}}{\sqrt{\pi k}} = \frac{4^k}{\sqrt{\pi k}}$$

quindi $(\sqrt{2})^k \leq R(k,k) \leq \binom{2k}{k} \simeq \frac{4^k}{\sqrt{\pi k}}$

Per studiare il lower bound, cerchiamo N il più grande possibile, per cui riusciamo a trovare almeno un N-grafo senza K-cricche o K-anticricche.

Prendiamo $p = \frac{1}{2}$ e consideriamo un N-grafo aleatorio.

$\mathbb{P}$(esiste una K-cricca) $= ?$

$X_c =$ n° di Kcricche in un grafo. (v.a. a valori in $\mathbb{N}$)

$$\mathbb{P}(X_c \geq 1) \overset{\text{Markov}}{\leq} \mathbb{E}[X_c]$$

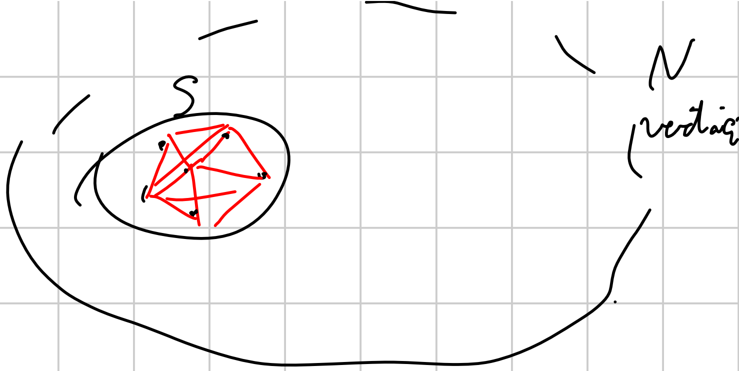
per ogni sottoinsieme $S \subseteq \{1, ... N\}$, con $|S| = K$

definisco la v.a. $X_c^S = \begin{cases} 0 & \text{se } S \text{ non è una } K\text{-cricca} \\ 1 & \text{se } S \text{ è una } K\text{-cricca} \end{cases}$

$$X_c = \sum_{\substack{S \subseteq \{1,..N\} \\ |S| = k}} X_c^S \qquad \mathbb{E}[X_c] = \sum \mathbb{E}[X_c^S] = \binom{N}{k} \cdot \mathbb{E}[X_c^{\bar{S}}]$$

dove $\bar{S}$ è un sottinsieme scelto $\subseteq \{1,..N\}$

$$\mathbb{E}\left[X_c^S\right] = \left(\frac{1}{2}\right)^{\binom{k}{2}}$$



$$\mathbb{E}\left[X_c\right] = \binom{N}{k} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\binom{k}{2}}$$

$$\vee|$$

P(esiste una k-cricca)

X_a = n° di k-anticricche nel grafo aleatorio

$$P(\text{esista una } k\text{-anticricca}) \leq \binom{N}{k} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\binom{k}{2}}$$

$$P(\text{esista una } k\text{-cricca o una } k\text{-anticricca}) \leq 2 \cdot \binom{N}{k} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\binom{k}{2}}$$

se scegliamo N il più grande possibile per cui questo numero è < 1, allora esistono N-grafi senza cricche o anticricche

$$2 \cdot \binom{N}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^{\binom{k}{2}} < 2 \cdot \frac{N^k}{k!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\binom{k}{2}} \overset{?}{<} 1$$

$$\text{Se } N < \sqrt[k]{2^{\binom{k}{2}-1} \cdot k!} = \frac{1}{\sqrt[k]{2}} \cdot \sqrt[\cancel{k}]{2^{\cancel{k} \cdot \frac{k-1}{2}}} \cdot \sqrt[k]{k!}$$

qui sto barando

$$< 1 \cdot \sqrt{2}^{(k-1)} \cdot \sqrt[k]{k!} \simeq \sqrt{2}^{k-1} \cdot \sqrt[k]{\left(\frac{k}{e}\right)^k \cdot \sqrt{2\pi k}}$$

$$\simeq \sqrt{2}^{k-1} \cdot \frac{k}{e} \cdot 1$$

$$\text{Se } N < \sqrt[k]{2^{\binom{k}{2}-1} \cdot k!} \simeq \frac{1}{\sqrt[k]{2}} \cdot \sqrt{2}^{(k-1)} \cdot \frac{k}{e} \cdot \sqrt[2k]{2\pi k}$$

allora ho un N-grafo senza k-cricche né k-anticricche

Teo (Erdős) Dati k, l naturali, esistono dei grafi (su un numero opportuno di vertici) senza cicli di lunghezza $< l$, ma privi di una k-colorazione dei vertici.

Def Dato un grafo G, una k-colorazione dei vertici è una partizione dei vertici in k sottoinsiemi per cui 2 vertici nello stesso sottoinsieme non sono collegati da un arco.

Def $\chi(G)$ numero cromatico di un grafo G = min k per cui G ha una k-colorazione

Def $\alpha(G)$ è la massima dimensione di una anticricca in G.

Lemma $\chi(G) \geq \frac{|G|}{\alpha(G)}$. Infatti se avessi $\alpha(G) \cdot \chi(G) < |G|$, allora colorando G con $\chi(G)$ colori, almeno un colore ha ~~te~~ più di $\alpha(G)$ vertici, assurdo.

1ª STRATEGIA
Cerchiamo grafi con α piccolo e senza cicli $< l$.

2ª STRATEGIA
Cerchiamo grafi con α piccolo e pochi cicli $< l$
(visto che è un conto lungo, mettiamo da parte un attimo)

Turán Dato un grafo G su N vertici, con $|E|$ archi, quanto vale almeno $\alpha(G)$?

Idea Estraiamo "casualmente" una anticricca da G e vediamo in media quanto è grande.

1) Ordiniamo i vertici casualmente secondo le $N!$ possibili permutazioni, ognuna con probabilità $\frac{1}{N!}$

2) Consideriamo uno alla volta i vertici $v_1, v_2, \dots v_N$. Mettiamo il vertice v_i nella anticricca se non è collegato ad alcun vertice già messo nell'anticricca, altrimenti lasciamo v_i da parte.

3) Alla fine avrò un'anticricca

Per ogni v vertice, definisco la variabile

$$X_v = \begin{cases} 0 & \text{se } v \text{ viene scartato dall'algoritmo} \\ 1 & \text{se } v \text{ viene selezionato nell'anticricca} \end{cases}$$

$$\mathbb{E}[\text{dim. dell'anticricca}] = \sum_{v \in G} \mathbb{E}[X_v]$$

Dato $v \in G$, quanto vale $\mathbb{E}[X_v]$?

$$\mathbb{E}[X_v] = P(X_v = 1) \geq P(v \text{ viene prima dei suoi vicini}) = \frac{1}{\deg(v)+1}$$

$\mathbb{E}[\text{dim dell'estraz.}] \geq \sum_{v \in G} \frac{1}{\deg(v)+1} \geq$

$\left(\frac{1}{x+1} \text{ è convessa su } [0, \infty)\right)$

$$\geq N \cdot \frac{1}{\frac{2|E|}{N} + 1} = \frac{N}{\frac{2|E|}{N}+1}$$

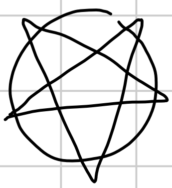
Quindi $\alpha(G) \geq \dfrac{N}{\frac{2|E|}{N}+1}$

(Trovare un esempio in cui valga l'uguaglianza...)

TARINI ORO

ALIGI

Achtung!



IOI, IPhO, IMO, MYMC,

ILO, IBO, IAO, IOAA

PUBBLICITÀ

Prendiamo un grafo aleatorio su N vertici, ma stavolta prendiamo ogni arco con probabilità p (che sceglieremo dopo $p = N^{-1+\frac{1}{\ell}}$)

Consideriamo la variabile aleatoria per $3 \leq i \leq \ell - 1$

X_i = n° di cicli di lunghezza i nel grafo

$$X = \sum_{i=3}^{\ell-1} X_i \qquad P(X \geq \text{qualcosa}) \overset{\text{Markov}}{\leq} \frac{\mathbb{E}[X]}{\text{qualcosa}}$$

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{i=3}^{\ell-1} \mathbb{E}[X_i] = \sum_{i=3}^{\ell-1} \frac{\binom{N}{i} \cdot (i-1)!}{2} \cdot p^i <$$

$$< \sum_{i=3}^{\ell-1} \frac{N^i}{2i} \cdot p^i < \sum_{i=3}^{\ell-1} (Np)^i < \sum_{i=0}^{\ell-1} (Np)^i < \frac{(Np)^\ell}{Np-1} \overset{?}{<} \frac{N}{1000}$$

$$p = \frac{N^{\frac{1}{\ell}}}{N} \implies \frac{N}{N^{\frac{1}{\ell}} - 1} < \frac{N}{1000} \text{ per } N \text{ grande}$$

Se N è grande, $\mathbb{E}[X] < \frac{N}{1000}$

Markov: $$P\left(X > \frac{N}{2}\right) \leq \frac{\mathbb{E}[X]}{N/2} \leq \frac{1}{500}$$

Quindi è altamente improbabile che ci siano più di $N/2$ cicli di lunghezza $< \ell$.

$$m = \left\lfloor N^{1 - \frac{1}{2\ell}} \right\rfloor \qquad \mathbb{P}(\alpha(G) < m) = \mathbb{P}(\text{non esistono } m\text{-anticricche})$$

Y = n° di m-anticricche nel grafo aleatorio.

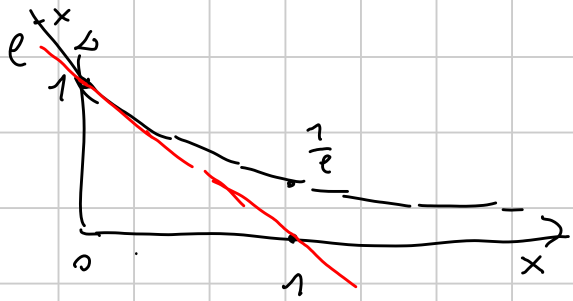
$$\mathbb{E}[Y] = \binom{N}{m} (1-p)^{\binom{m}{2}} \leq \frac{N^m}{m!} \cdot (1-p)^{\binom{m}{2}}$$

VI

$$P(Y \geq 1) < \frac{N^m}{\left(\frac{m}{e}\right)^m}(1-p)^{m\cdot\frac{m-1}{2}} =$$

$$= \left[\frac{eN}{m}\cdot(1-p)^{\frac{m-1}{2}}\right]^m <$$

$$< \left[\frac{eN}{N^{1-\frac{1}{2l}}}\, e^{-p\frac{m}{2}}\right]^m \qquad \boxed{1-p < e^{-p}}$$



$$\wedge$$

$$\left[e N^{\frac{1}{2l}}\cdot e^{-\frac{N^{-1+\frac{1}{l}+1-\frac{1}{2l}}}{2}}\right]^m$$

$$||$$

$$\left[N^{\frac{1}{2l}}\cdot e^{-\frac{N^{\frac{1}{2l}}}{2}+1}\right]^m < \frac{1}{500} \quad \text{per } N \text{ grande}$$

$$\mathbb{P}(\alpha(G) > m) < \frac{1}{500} \qquad \mathbb{P}\left(X > \frac{N}{2}\right) < \frac{1}{500}$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}\left(\alpha(G) > m \ \text{oppure}\ X > \frac{N}{2}\right) < \frac{1}{250}$$

Esiste, per N grande, un N-grafo con $\alpha < m$ e $X \leq \frac{N}{2}$. Ad ogni ciclo $< l$ associo un suo vertice e tolgo tutti vertici dal grafo. Rimane un grafo con almeno $\frac{N}{2}$ vertici e <u>senza cicli brevi</u>

e con una $\alpha \leq m$

$$\chi(\text{nuovo grafo}) \geq \frac{N/2}{m} \simeq \frac{N^{\frac{1}{2k}}}{2} > K$$

per N abbastanza grande