SENIOR 2016 — Double Counting & Probabilistic Method

Note Title 06/09/2016

http://www.artofproblemsolving.com/community/c2335h1038680

Problem 2: In the Duma, there are 1600 delegates who have formed 16000 committees of 80 persons each. Prove that one can find two committees having at least four common members.

Source: Russian 1996

Idea: scegliendo a caso due commissioni, queste hanno IN MEDIA, almeno 4 persone in comune (in realtà basta 3.00001...)

Formalizzazione: fare un DOUBLE COUNTING

$X = \{ (c_1, c_2, p) :$ c_1 e c_2 sono commissioni, p parlamentare che sta in c_1 e c_2 $\}$

Contiamo in 2 modi gli elementi di X. Supponiamo per assurdo che due commissioni abbiano max 3 persone in comune

(c_1, c_2) - WISE : $|X| = \sum_{(c_1,c_2)} \overbrace{\text{persone comuni a } c_1 \text{ e } c_2}^{\leq 3}$

$\leq 3 \cdot \#(c_1, c_2) = 3 \binom{16.000}{2}$

p - WISE : $|X| = \sum_p$ coppie comm. che contengono p

$= \sum_p \binom{c(p)}{2}$ $\qquad c(p) = \#$ commissioni in cui sta p

$= \frac{1}{2} \sum_p c(p)^2 - c(p)$

$= \frac{1}{2} \sum_p c(p)^2 - \frac{1}{2} \sum_p c(p) \geq \frac{1}{2} \frac{(\sum c(p))^2}{\# p} - \frac{1}{2} \dots$

Ora $\sum_p c(p) = 80 \cdot 16.000$

$Y = \{ (c,p) : p \in c \}$

p-wise : $|Y| = \sum_p c(p)$

c-wise : $|Y| = \sum_c 80 = 80 \cdot \#\,\text{comm} = 80 \cdot 16.000$

Concludendo troviamo

$$3 \binom{16.000}{2} \geq |X| \geq \frac{1}{2} \frac{1}{1.600} (80 \cdot 16.000)^2 - \frac{1}{2} 80 \times 16.000$$

Sviluppando il conto trovo un assurdo! ☺

— o — o —

Alternativa: invece dell'assurdo, porre k = max # persone comuni e scrivere

$$k \binom{16.000}{2} \geq \text{RHS}$$ e sperare di ottenere $k \geq 3,0000\,1$

— o — o —

Problem 3: In an $n\times n$ array, each of the numbers $1, 2, ..., n$ appears exactly n times. Show that there is a row or a column in the array with at least $\sqrt{n}$ distinct numbers.

Source: MOP 2007

$X_R = \{ (R,K) :$ numero k compare nella riga $R \}$
$X_C = \{ (C,k) :$ " " " colonna $C \}$

Supponiamo per assurdo che ogni riga o col. ha meno di $\sqrt{n}$ numeri distinti

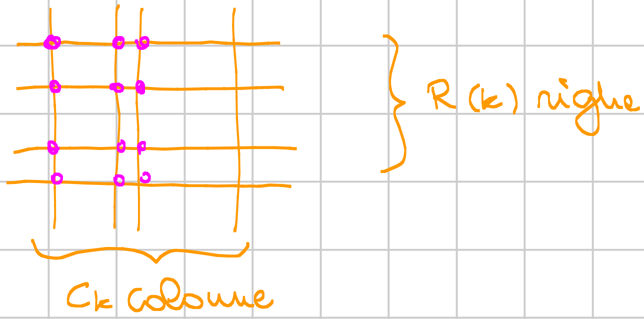
R-wise : $|X_R| = \sum_R \text{numeri}(R) < \sqrt{n}\,(\#\text{Righe}) = n\sqrt{n}$

$|X_C| < n\sqrt{n}$

$|X_R \cup X_C| < 2n\sqrt{n}$

k-wise: $|X_R \cup X_C| = \sum_k \big(R(k) + C(k)\big) \geq \sum_k 2\sqrt{R(k)C(k)} \ldots$

righe in cui appare il numero k



$R(k) \cdot C(k) \geq n$

ogni numero k appare n volte

$$\ldots \quad |X_R \cup X_C| \geq \sum_k 2\sqrt{n} = 2\sqrt{n}\,(\#k) = 2n\sqrt{n}$$

Mettendo insieme $\quad 2n\sqrt{n} < 2n\sqrt{n} \quad$ assurdo.

— o — o —

Problem 4: Suppose 799 teams participate in a tournament in which every pair of teams plays against each other exactly once. Prove that there two disjoint groups A and B of 7 teams each such that every team from A defeated every team from B.

Source: Iran TST 2008

$X = \{(A, p) : |A| = 7,\ p$ batte tutti i componenti di $A\}$

Ipotesi di assurdo: ogni A è associato al max a 6 persone

A-wise: $\quad |X| \leq 6 \cdot (\# A) = 6 \cdot \binom{799}{7}$

vittorie di p

p-wise: $\quad |X| = \sum_p \binom{V(p)}{7}$

$$\sum_p V(p) = \#\text{partite} = \binom{799}{2}$$

Speriamo che la somma di $\binom{V(p)}{7}$ sia minima quando i $V(p)$ sono tutti uguali, cioè

$$V(p) = \frac{1}{\cancel{799}} \cdot \frac{\cancel{799} \cdot 798}{2} = 399$$

Se fosse così concluderei

$$799 \cdot \binom{399}{7} \le |X| \le 6 \cdot \binom{799}{7}$$

e questa dovrebbe essere assurda

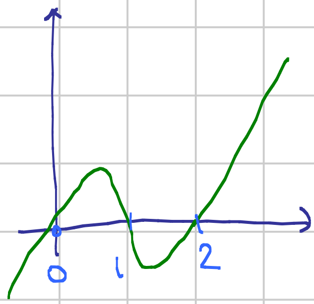
$$799 \cdot \frac{399 \cdot 398 \cdot \ldots \cdot 393}{\cancel{7!}} > 6 \, \frac{799 \cdot \ldots \cdot 793}{\cancel{7!}}$$

$$\frac{799}{6} > \frac{799}{399} \cdot \ldots \cdot \frac{793}{393}$$

VERA, ma non si verifica con il 2^7 ...

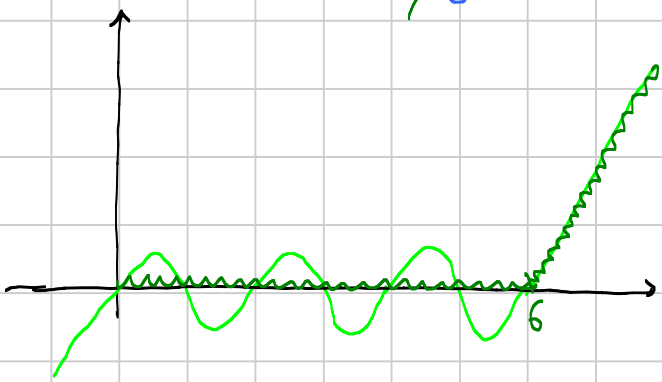
<u>Oss.</u> Tutto sta a dim. una specie di "convessità" del binomiale

$$\binom{x}{2} = \frac{x(x-1)}{2} \qquad \binom{x}{3} = \frac{1}{6} x(x-1)(x-2)$$



Quando facciamo $\sum \binom{v(p)}{7}$
stiamo facendo

$$\sum f(v(p)) \quad \text{dove}$$



quindi basta per $x \ge 6$ e
questo si può fare per induzione
con la derivata 2^a

$$f_k(x) = x \, f_{k-1}(x-1)$$

a meno di un coeff.

e ora calcolo la derivata 2^a o uso prodotto di funzioni convesse, positive crescenti.

Problem 7 (IMO 1998 [8])
In a competition, there are a contestants and b judges, where b≥3 is an odd integer. Each judge rates each contestant as either"pass" or "fail". Suppose k is a number such that, for any two judges, their ratings coincide for at most k contestants. Prove that

k/a≥(b−1)/(2b).

$X = \{ (g_1, g_2, c) :$ g_1 e g_2 sono giudici che sono d'accordo sul contestant c $\}$

(g_1, g_2) WISE :

$$|X| = \sum_{(g_1,g_2)} \underbrace{\text{agreement}\,(g_1,g_2)}_{\leq k}$$

$$\leq k \ \#(g_1, g_2)$$

$$= k \binom{b}{2}$$

C − WISE:

$$|X| = \sum_c \text{giudici d'accordo}\,(c)$$

$$= \sum_c \binom{S(c)}{2} + \binom{P(c)}{2}$$

giudici che promuovono c

giudici che segano c

$S(c) + P(c) = b$

$$\left[\geq \sum_c 2 \binom{b/2}{2} \right]$$

Essendo b dispari non è ottimale

$$\geq \sum_c \underbrace{\binom{\frac{b+1}{2}}{2} + \binom{\frac{b-1}{2}}{2}}$$

Sviluppando tutto viene . . .

questo conto algebrico va giustificato (QM−AM) con il vincolo che sono interi.

—o—o—

http://cdn.artofproblemsolving.com/aops20/attachments/probability_problems_306.pdf

Problem 3 (IMO 1987 [8]) Let $p_n(k)$ be the number of permutations of the set $\{1,\ldots,n\}$, $n \geq 1$, which have exactly k fixed points. Prove that

$$\sum_{k=0}^{n} k p_n(k) = n!.$$

(Remark: A permutation f of a set S is a one-to-one mapping of S onto itself. An element i in S is called a fixed point of the permutation f if $f(i) = i$.)

$\boxed{1° \text{ modo}}$ C'è una formula per $p_n(k)$ con dentro una sommatoria, e riorganizzando i termini DOVREBBE venire.

$\boxed{2° \text{ modo}}$ $X = \{(\sigma, x) : \sigma \text{ permut. e } \sigma(x) = x\}$

σ-wise : $|X| = \sum_{\sigma} \text{Fix}(\sigma) = \sum_{k=0}^{n} k\, p_n(k)$

x-wise : $|X| = \sum_{x} \underbrace{\text{Fix}(x)}_{\text{permutazioni che fissano } x} = n \cdot (n-1)! = n!$

— o — o —

Problem 1 (IMC for University Students 2002 [5]) Two hundred students participated in a mathematical contest. They had 6 problems to solve. It is known that each problem was correctly solved by at least 120 participants. Prove that there must be two participants such that every problem was solved by at least one of these two students.

$X = \{(p, c_1, c_2) : p \text{ è stato risolto da } c_1 \text{ o } c_2\}$

Supponiamo la tesi falsa. Allora

(c_1, c_2)-wise : $|X| = \sum_{(c_1,c_2)} \underbrace{\text{problemi }(c_1,c_2)}_{\text{risolti da almeno uno dei due}} \leq 5\,(\#\,(c_1,c_2)) = 5 \cdot \binom{200}{2}$

p-wise : $|X| = \sum_{p} \underbrace{\text{Coppie }(p)}_{\text{coppie in cui almeno uno ha risolto } p} \geq$

$\text{Coppie }(p) \geq \underbrace{\binom{200}{2}}_{\text{coppie tot}} - \binom{80}{2}$ ↑ entrambi non hanno risolto

$$5\binom{200}{2} \geq |X| \geq 6\left[\binom{200}{2}-\binom{80}{2}\right]$$

Spero che sia assurda: $6\binom{80}{2} < \binom{200}{2}$ VERA ?

$$6\,\frac{80\cdot 79}{\cancel{2}} < \frac{200\cdot 199}{\cancel{2}}$$ ok di poco

— o — o —

Oss. Forse conveniva contare

$X = \{(c_1, c_2, p) : c_1 \text{ e } c_2 \text{ non hanno risolto } p\}$

Problem 2 (IMO Shortlist 1987 [8]) Show that we can color the elements of the set $\{1, 2, \ldots, 1987\}$ with 4 colors so that any arithmetic progression of ten terms, each in the set, is not monochromatic.

$X = \{(C, p) : p$ è una progressione di 10 termini monocromatica per la colorazione $C\}$

Ipotesi di assurdo: $\forall C$ colorazione $\exists\, p$ progressione

$\boxed{\text{C-wise}}$ $\quad |X| = \sum_C \text{monocrom}(c) \geq \#C = 4^{1987}$

$\boxed{\text{p-wise}}$ $\quad |X| = \sum_p \underbrace{\text{Colorazioni che rendono } p \text{ monocrom}}_{4\cdot 4^{1977}}$

colore per p

$$= 4^{1978}\cdot(\#p)$$

Quindi ottengo $4^{1978}\cdot(\#p) \geq 4^{1987}$, cioè $(\#p) \geq 4^{9}$

Idee per contare $\#p$

→ fisso il 1° e vedo quante ragioni posso permettermi

→ fisso la ragione e vedo quanti inizi vanno bene

→ fisso il 1° e l'ultimo in una opportuna classe mod 9.

Idea probalistica che sta sotto:

$\frac{1}{4^9}$ è la prob. che una progressione colorata a caso sia monocrom.

Moltiplico per il numero di progressioni (sfruttando un po' di linearità) e ottengo che la prob. di avere una monocromatica è <1 (il numero medio di progr. monocrom è <1, quindi...)

Problem 17 (Szele 1943 [1, Chap. 2]) In a (round-robin) *tournament*, every player plays one game with every other player. A *Hamiltonian path* of the tournament is an ordering of the players from left to right so that every player (except the last) beat the player immediately to its right. Let n be a positive integer. Show that there is a tournament with n players that has at least $n!/2^{n-1}$ Hamiltonian paths.

$X = \{ (G, c) : \text{il cammino } c \text{ è Ham. nel grafo } G \}$

Ipotesi di assurdo: $\forall G$ grafo, i cammini $< \frac{n!}{2^{n-1}}$

G-wise: $|X| < \frac{n!}{2^{n-1}} (\# G) = \frac{n!}{2^{n-1}} 2^{\binom{n}{2}}$

c-wise: $|X| = \sum_c \underbrace{\text{Grafi}(c)}_{2^{\binom{n}{2}-n+1}}$ $\qquad \# c = n!$

$n! \cdot 2^{\binom{n}{2}-n+1} < \frac{n!}{2^{n-1}} 2^{\binom{n}{2}}$ $\qquad 1 < 1.$

Problem 28 (IMO Shortlist 1991 [8]) Let A be a set of n residues mod n^2. Show that there is a set B of n residues mod n^2 such that at least half of the residues mod n^2 can be written as $a+b$ with a in A and b in B.

$X = \{ (B, x) \ : \ |B| = n \ , \ x \text{ non si scrive come } a+b \}$

Ipotesi di assurdo : $\forall B$ gli x sono $\geq \frac{n^2}{2}$

B-wise : $|X| = \sum_B \underbrace{\text{residui } (B)}_{< \frac{n^2}{2}} \geq \frac{n^2}{2} (\# B) = \frac{n^2}{2} \binom{n^2}{n}$

x-wise : $|X| = \sum_x \underbrace{\# B \text{ che non permettono di scrivere } x}_{\substack{B \text{ deve evitare i valori } x-a \text{ con } a \in A \\ = \binom{n^2-n}{n}}}$

$= \binom{n^2-n}{n} \cdot (\# x) = n^2 \binom{n^2-n}{n}$

Ho ottenuto $\frac{\cancel{n^2}}{2} \binom{n^2}{n} \leq \cancel{n^2} \binom{n^2-n}{n}$ che spero assurda,

cioè vorrei che

$$\binom{n^2}{n} \overset{?}{>} 2 \binom{n^2-n}{n}$$

$$\frac{n^2 (n^2-1) \cdot \ldots \cdot (n^2-n+1)}{\cancel{n!}} \overset{?}{>} 2 \, \frac{(n^2-n) \cdot \ldots \cdot (n^2-2n+1)}{\cancel{n!}}$$

$$\left(\frac{n^2}{n^2-n} \right) \left(\frac{n^2-1}{n^2-n-1} \right) \cdot \ldots \cdot \left(\frac{n^2-n+1}{n^2-2n+1} \right) \overset{?}{>} 2$$

$$\left(1 + \frac{n}{n^2-n} \right) \left(1 + \frac{n}{n^2-n-1} \right) \cdot \ldots \overset{?}{>} 2$$

$$\text{LHS} > 1 + \frac{n}{n^2-n} + \frac{n}{n^2-n-1} + \ldots$$

$$\geq 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \ldots + \frac{1}{n} = 2 .$$

$\boxed{\text{IMO 2014} - 6}$ n rette in posizione generica nel piano ne coloro k di blu in modo che nessuna regione limitata del piano abbia il bordo tutto blu.

Domanda: quanto può essere grande k ?

Marking scheme:

$k \geq c n^{\alpha}$ 1 pto

$k \geq c\sqrt{n}$ con $0 < c < \frac{1}{\sqrt{2}}$ 2 pti

$k \geq \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2}}$ 4 pti

$k \geq \sqrt{n}$ 7 p.ti

Tentativo basic

$X = \{ (C,R) :$ C è una scelta di k rette blu
R è una regione blu $\}$

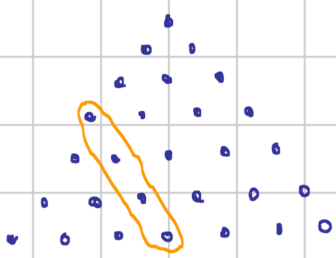
Ipotesi di assurdo: $\forall C$ esiste una regione blu

C-wise: $|X| = \sum_{C}$ regioni blu (C)

$\geq \# C = \binom{n}{k}$

R-wise: $|X| = \sum_{R}$ colorazioni che rendono R blu

$$= \sum_{R} \binom{n - \ell(R)}{k - \underbrace{\ell(R)}_{\text{lati della regione}}} \leq \sum_{R} \binom{n-3}{k-3}$$



$$= \binom{n-3}{k-3} (\# R)$$

3 rette $\to$ 1 $\qquad$ n rette $= \Delta(n-2) = \dfrac{(n-2)(n-1)}{2}$

4 $\to$ 3

5 rette $\to$ 6 $\qquad$ Abbiamo ottenuto

$$\binom{n}{k} \leq \binom{n-3}{k-3} \frac{(n-2)(n-1)}{2}$$

$$\frac{n\cancel{!}}{\cancel{k}!\,\cancel{(n-k)}!} \leq \frac{\cancel{(n-3)}!}{\cancel{(k-3)}!\,\cancel{(n-k)}!} \frac{\cancel{(n-2)}\,\cancel{(n-1)}}{2}$$

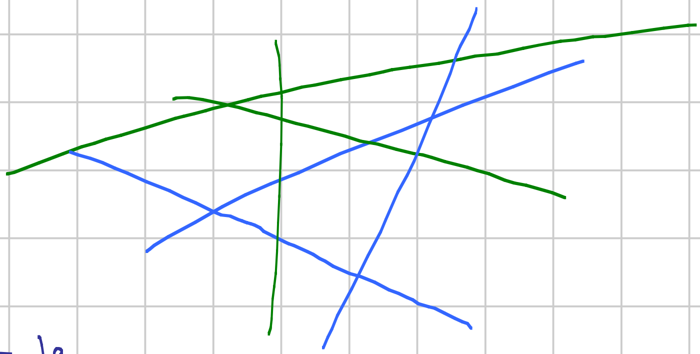
$k(k-1)(k-2)$

$$2n \leq k(k-1)(k-2) \quad \rightsquigarrow \quad \boxed{k \geq c\sqrt[3]{n}}$$

— o — o —

Idea più fine: prendiamo config. con k ottimale non migliorabile (cioè se aggiungo una retta blu, rendo blu almeno una regione)

A ogni retta verde associo una delle regioni che diventano blu se lo diventa anche lei



rette verdi $\longrightarrow$ regioni limitate

$\overset{\shortparallel}{n-k}$ $\qquad$ $\dfrac{(n-1)(n-2)}{2}$

INIETTIVA, cioè |arrivo| $\geq$ |partenza|, il che è ovvio

Definisco punto blu ogni incrocio di 2 rette blu

rette verdi $\longrightarrow$ p.to blu a caso della regione (o di una delle regioni) che diventa blu.

$n-k$ $\qquad$ $\binom{k}{2}$ $\qquad$ $n-k \leq \binom{k}{2} 4$

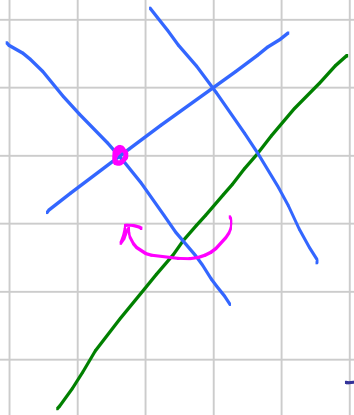
non è detto che sia iniettiva, ma al max 4:1

$n-k \leq 2k(k-1)$

$n-k \leq 2k^2-2k$

$n \leq 2k^2 \qquad k \geq \dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{2}}$

Se voglio migliorare il $\frac{1}{\sqrt{2}}$ devo migliorare il 4 : 1, miglioran-do la scelta del p.to blu associato.



Posso prendere il primo blu in senso orario.

Problem 18 (Erdős 1963 [1, Chap. 1]) Let k be a positive integer. Say that a (round-robin) tournament is *k-unrankable* if for every set of k players, there is another player who beat all of them. Show that there is a tournament with more than k players that is k-unrankable.

$X = \{ (G, A) :$ in G NON esiste p che batte tutti gli elem. di $A \}$

Ipotesi di assurdo : $\forall G \ \exists A$ t.c. $(G, A) \in X$

G-wise : $|X| \geq \# G = 2^{\binom{n}{2}}$

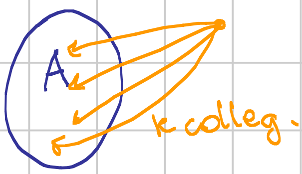
A-wise : $|X| = \sum_A$ grafi in cui A non è dominato da nessun p

$$2^{\binom{k}{2}} \cdot 2^{\binom{n-k}{2}} \cdot \underbrace{(2^k-1)^{n-k}}$$

Dentro A a caso

Fuori da A a caso

Da ogni vertice fuori avrei 2^k possibilità dentro



$$= 2^{\binom{k}{2}+\binom{n-k}{2}} \cdot (2^k-1)^{n-k} \cdot \underset{\binom{n}{k}}{\# A}$$

Spero che

$$\binom{n}{k} \cdot 2^{\binom{k}{2}+\binom{n-k}{2}} \cdot (2^k-1)^{n-k} < 2^{\binom{n}{2}}$$

per n grande

$$\binom{n}{k}(2^k-1)^{n-k} < 2^{\binom{n}{2}-\binom{k}{2}-\binom{n-k}{2} \,=\, k(n-k)}$$

$$\binom{n}{k}\left(1-\frac{1}{2^k}\right)^{n-k} < 1$$

$\sim n^k$

esponenziale con base < 1.