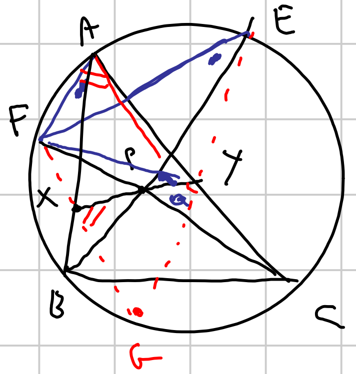
SENIOR 2016 G2 ADVANCED

Note Title 9/4/2016

Introduzione:

ES 1 PASCAL



$Q \in XY$ t.c. FEPQ ciclico

$\Rightarrow$ AFXQ, AQYE ciclici

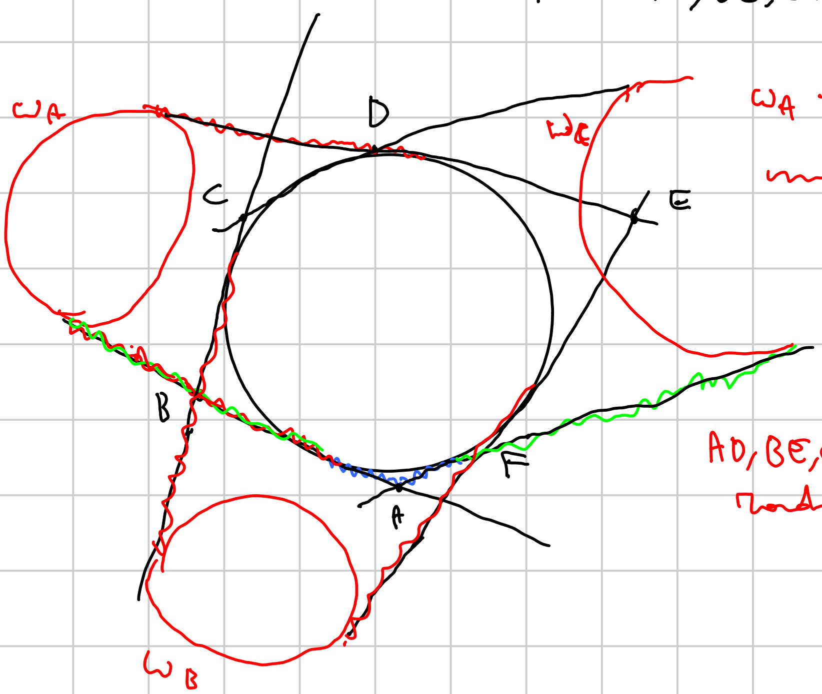
$\Rightarrow E\hat{G}F = 180° - \measuredangle - \measuredangle$

$= 180° - F\hat{A}Q - Q\hat{A}E$

$= 180° - F\hat{A}E$

ES 2 BRIANCHON

TS: AD, BE, CF concorrono



ω_A Tang. BA, DE

~~~ lung. ρ fissata

ω_B, ω_C simili

AD, BE, CF conc. nel centro radicale di AD, BE, CF
~~~

PIANO PROIETTIVO, PROIETTIVITÀ

Def $\mathbb{RP}^2 = \{ [x,y,z] \mid (x,y,z) \neq (0,0,0) \in \mathbb{R}^3 \}$.

$$[x,y,z] = \{ (kx, ky, kz) \mid \underset{\text{fissato}}{(x,y,z)} \in \mathbb{R}^3,\ k \in \mathbb{R}^* \}$$

retta: $\{ [x,y,z] \in \mathbb{RP}^2 \mid \forall (x,y,z) \in [x,y,z],\ lx + my + nz = 0 \}$

$$(l,m,n) \neq (0,0,0)$$

ora considero $r = \{ \dots,\ ux + vy + wz = 0 \}$

$$[x,y,z] \to (\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) = \left(\frac{x}{ux+vy+wz}, \dots \right)$$

in $\mathbb{RP}^2 / r$

ora ho che $u\tilde{x} + v\tilde{y} + w\tilde{z} = 1$

PROIETTIVITÀ

(semi) Formale: $T : \mathbb{RP}^2 \to \mathbb{RP}^2$

$$T(x+y) = T(x) + T(y)$$
$$T(\lambda x) = \lambda T(x)$$

$$[X] \to [AX]$$

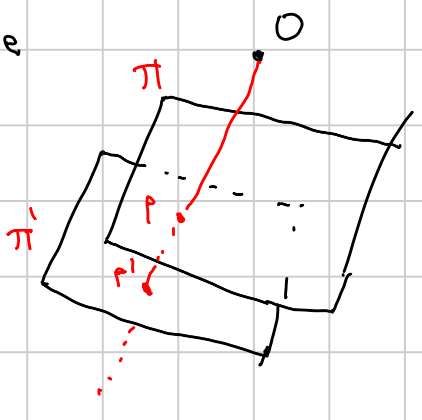
$$\left[\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \right] \to \left[\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \right]$$

la vorrei invertibile

$$\| $$

$$\left[\left(a_{11}a + a_{12}b + a_{13}c, \dots \right) \right]$$

Intuitivamente



$P \to P' = T(P)$

OSS le r_∞ è la retta all'infinito di π:

- considero il fascio delle rette per o parallele a π
- le loro intersezioni con π' sono $T(r_\infty)$

OSS
$A = [(a_1, a_2, a_3)]$
$B = [(b_1, b_2, b_3)]$
$C = [(c_1, c_2, c_3)]$
$D = [(d_1, d_2, d_3)]$

voglio T: $T(1,0,0) = A$, $T(0,1,0) = B$, $T(0,0,1) = C$, $T(1,1,1) = D$

$$\left[\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right] = \left[\begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 \\ z_1 \end{pmatrix}\right] = \begin{bmatrix} ka_1 \\ ka_2 \\ ka_3 \end{bmatrix}$$

$$M(T) = \begin{pmatrix} ka_1 & hb_1 & jc_1 \\ ka_2 & hb_2 & jc_2 \\ ka_3 & hb_3 & jc_3 \end{pmatrix}$$

Impongo che
$$\begin{cases} ka_1 + hb_1 + jc_1 = d_1 \\ ka_2 + hb_2 + jc_2 = d_2 \\ ka_3 + hb_3 + jc_3 = d_3 \end{cases}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}}\begin{pmatrix} k \\ h \\ j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}$$

$\exists!$ soluzione perché N è invertibile (ABCD non degenere)

CONICHE

$$AX^2 + BY^2 + CZ^2 + 2DYZ + 2EXZ + 2FXY = 0$$

$$(X, Y, Z)\underbrace{\begin{pmatrix} A & F & E \\ F & B & D \\ E & D & C \end{pmatrix}}_{M}\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = 0$$

OSS. M è simmetrica
$M^T = M$
$\left((AB)^T = B^T A^T \right)$

Tr. polari (dualità)

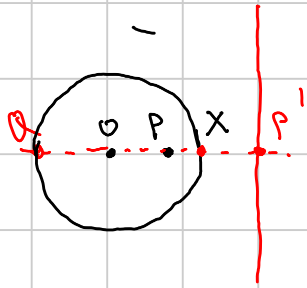
conica $X = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$ $\quad X^T M X = 0$

dato $P \in \mathbb{RP}^2$ chiamo retta polare di P
$$r_P = \{ X \in \mathbb{RP}^2 \mid P^T M X = 0 \}$$

OSS $Q \in pol(P) \iff P^T M Q = 0 \Updownarrow Q^T M P = 0 \iff P \in pol(Q)$

OSS 2 (non lo dimostro)

se $P \in$ (conica) la polare è tangente

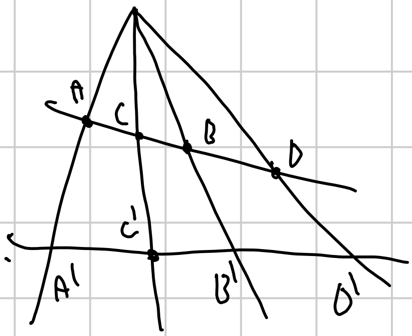


$\Rightarrow (QX, PP') = -1$ $(\ast)$
(Q, X, P, P')

OSS. 3 $(\ast)$ vale in generale per le coniche

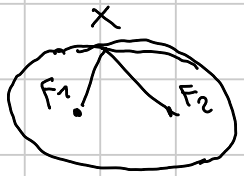
CONICHE E PROIETTIVITÀ (MA NON SOLO)

OSS 1 Le proiettività conservano i birapporti

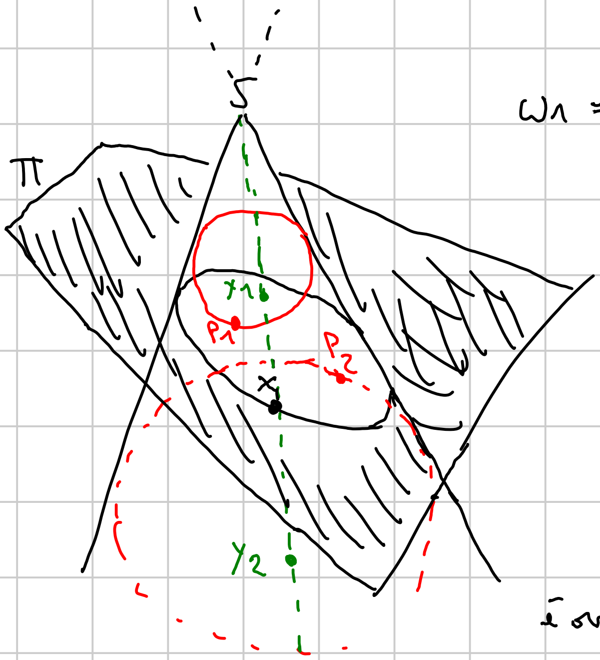


$(A, B, C, D) = (A', B', C', D')$

OSS 2



$XF_1 + XF_2 = \text{cost.}$



ω_1 = sfera tangente al cono e a π (sopra)

ω_2 = stessa cosa sotto

$X \in$ piano $\cap$ cono

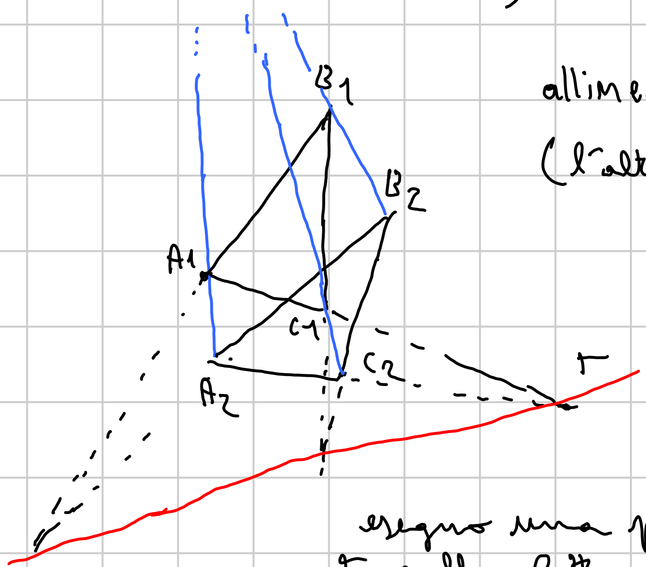
SX tange ω_1 in Y_1
tange ω_2 in Y_2

è ovvio che $XP_1 = XY_1$ (segm. di tang.)
$XP_2 = XY_2$

$XP_1 + XP_2 = XY_1 + XY_2 = Y_1Y_2$

non dipende da X per simmetria

ESERCIZIO 1 (DESARGUES)



allineamento ⇒ concorrenza
(l'altra freccia per esercizio)

eseguo una proiettività che manda r nella retta all'infinito r_∞

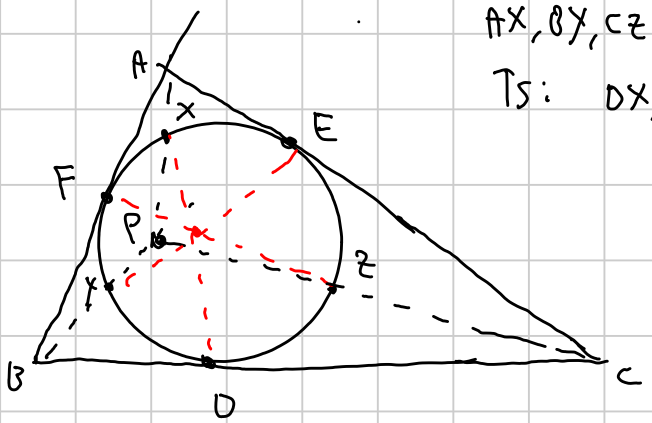
Ora $A_1B_1 \parallel A_2B_2$ e simili

⇒ $A_1B_1C_1$ e $A_2B_2C_2$ sono omotetici

⇒ A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 concorrono nel centro di omotetia

ma la concorrenza è un invariante proiettivo!

ESERCIZIO 2 (STEINBART)



AX, BY, CZ concorrono in P (interno)

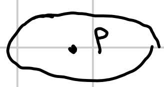
Ts: DX, EY, FZ concorrono

Vorrei una proiettività che manda (DEF) in un cerchio ω e P nel suo centro.

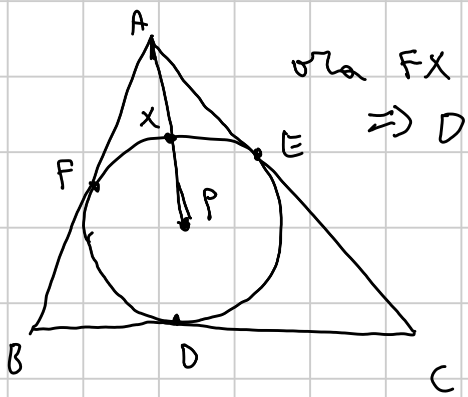
Cosa faccio? prendo la polare di P e la mando all'infinito.

(DEF) non interseca la polare quindi la sua immagine non interseca r_∞ $\Rightarrow$ l'immagine è un'ellisse

e P è il suo centro



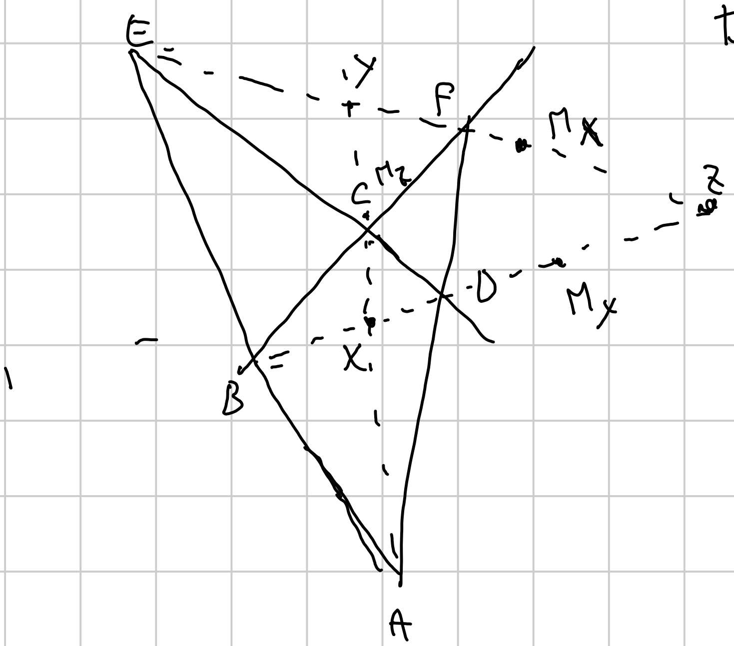
Infine possiamo fare un'affinità che manda l'ellisse in una circonferenza di centro P.



ora FX = XE ecc.

$\Rightarrow$ DX, EY, FZ concorrono nell'incentro di DEF.

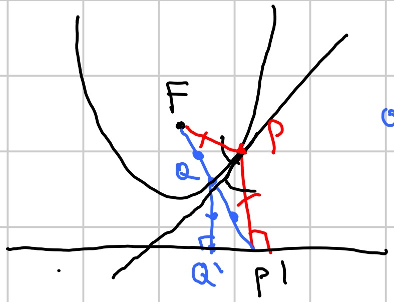
ESERCIZIO 3 (Th. EMELYANOV)



Tesi: il pt. di Miquel di $\{AB, BC, CD, DA\}$ sta sulla circonferenza di Feuerbach di XYZ

LEMMA 1:

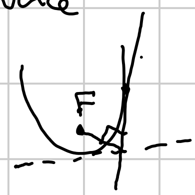
la bisettrice di $F\hat{P}P$ è tangente alla parabola

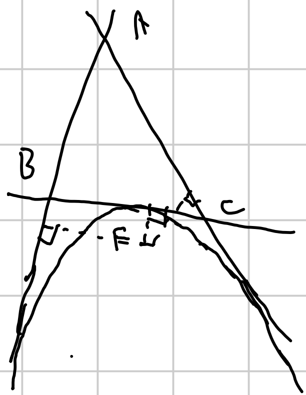


$QF = QQ' = QP'$ assurdo

dunque se $MF = MP'$
$\Rightarrow PM \perp FP'$

$\Rightarrow$ la proiezione di F sulla tangente sta sulla tangente per il vertice



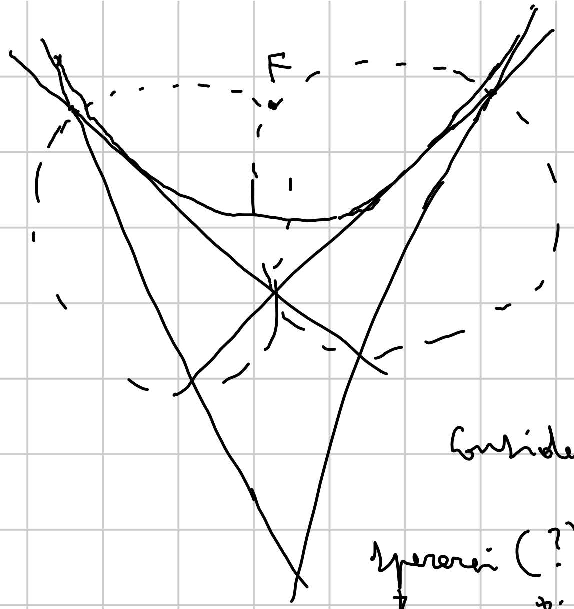


$\Rightarrow$ le proiezioni di F sui tre lati sono allineate su una retta tangente alla parabola (per il vertice)

SIMSON $\Rightarrow F \in \odot(ABC)$

$\square$

Dunque se prendo la parabola tangente ai quattro lati (esiste!)



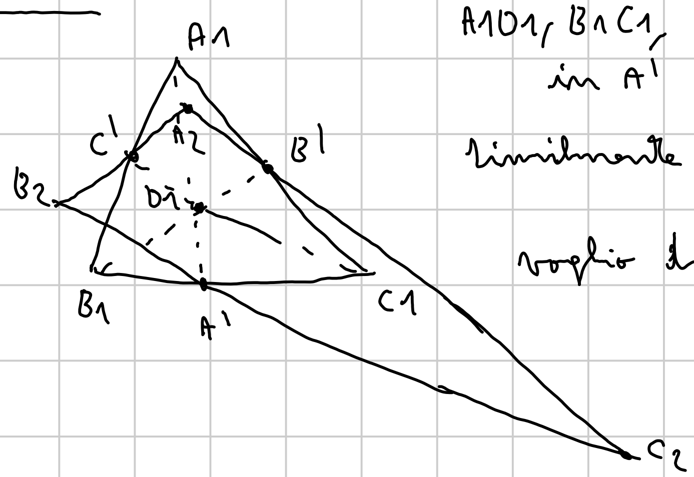
il fuoco è punto di Miquel

Considero $\{M_xM_y, M_xM_z, M_yM_z, r_\infty\} = Q_1$

spererei (?) che anche queste rette siano tangenti alla parabola

OSS: $ABCDEF$ e Q_1 hanno le stesse diagonali (XY, XZ, YZ)

LEMMA 2:



$A_1D_1, B_1C_1, A_2D_2, B_2C_2$ concorrono in A'

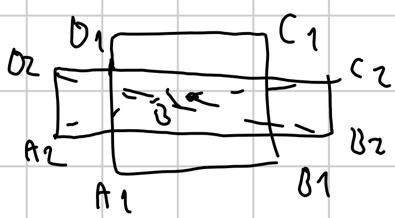
similmente B', C'

voglio dire che $A_1, B_1, C_1, D_1, A_2, B_2, C_2, D_2$ stanno tutti sulla stessa conica

Dim: mando $A_1B_1C_1D_1$ in un quadrato

ora $A', C' \in r_\infty \Rightarrow B_2C_2 \parallel B_1C_1$ ecc.

$\Rightarrow A_2B_2C_2D_2$ è un rettangolo con i lati paralleli a $A_1B_1C_1D_1$



Inoltre per hp $A_1C_1, B_1D_1, A_2C_2, B_2D_2$ concorrono in B' che è centro comune

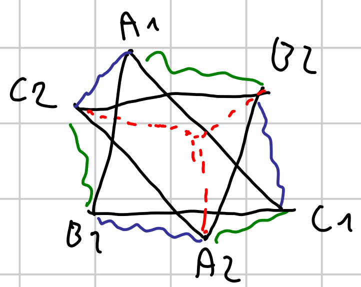
$\Rightarrow$ la conica per $A_1B_1C_1D_1, A_2$ ha centro in B'

$\Rightarrow$ passa anche per B_2, C_2, D_2 $\square$

Ora con una trasformazione duale la tesi segue.

ESERCIZIO 4 (SONDAT)

Def:



ortologici : la $\perp$ da A_2 a B_1C_1 ecc. concorrono in Q_1

si vede che questo $\Longleftrightarrow$ $B_1A_2^2 + C_1B_2^2 + A_1C_2^2 =$

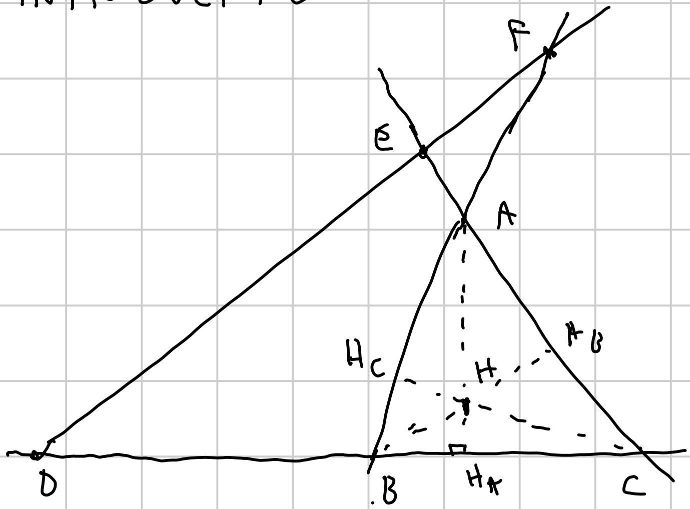
$= A_2C_1^2 + A_1B_2^2 + C_2B_1^2$

$\Longleftrightarrow$ la $\perp$ da A_1 a B_2C_2 ecc. concorrono in Q

Se $\overset{\triangle}{A_1B_1C_1}$, $\overset{\triangle}{A_2B_2C_2}$ sono ortologici e soddisfano Desargues (A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 concorrono in P)

$\Longrightarrow$ esiste una retta per P, Q, Q_1

INTRODUZIONE



ω_A = cfr. di diametro AD

ω_B = BE

ω_C = CF

$H_A \in \omega_A$ ecc.

$AH \cdot H_AH = BH \cdot H_BH = CH \cdot H_CH$

$\Longrightarrow$ H ha la st. potenza risp. $\omega_A, \omega_B, \omega_C$

Stessa cosa con gli ortocentri di $\overset{\triangle}{AEF}$, $\overset{\triangle}{CED}$, $\overset{\triangle}{BDF}$

$\Longrightarrow$ $\omega_A, \omega_B, \omega_C$ sono coassiali e i 4 ortocentri sono allineati sul comune asse radicale (retta di AUBERT/STEINER)

LEMMA(1):

Esso è il luogo dei punti P t.c. la $\perp$ da A a DP e cyc concorrono

Si vede facilmente che il luogo è una retta (cartesiane)

$D(a_d, b_d)$ $\quad$ P_A : $\quad X(x_p - a_d) + Y(y_p - b_d) = f_A(x_p, y_p)$

$E(a_e, b_e)$ $\quad$ P_B :

$F(a_f, b_f)$ $\quad$ P_C :

$p_A - p_B$: $\quad x(a_e - a_d) + y(b_e - b_d) = \underbrace{g_1(x_p, y_p)}_{\text{di } 1^\circ \text{ grado}}$

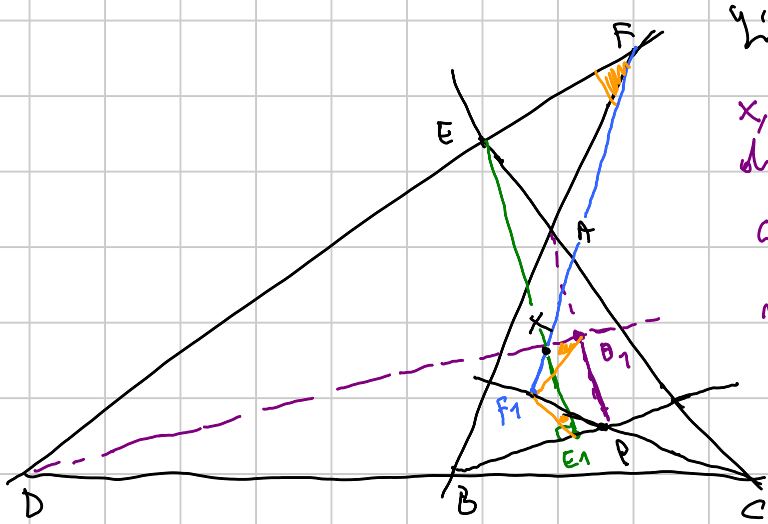
$p_B - p_C$: $\quad x(a_f - a_e) + y(b_f - b_e) = \underbrace{g_2(x_p, y_p)}_{\text{di } 1^\circ \text{ grado}}$

i LHS sono proporzionali $\dfrac{a_e - a_d}{a_f - a_e} = \dfrac{b_e - b_d}{b_f - b_e} = c$

perché D, E, F sono allineati

$\Rightarrow g_1(x_p, y_p) = g_2(x_p, y_p) \cdot c$: è una retta

Ci basta mostrare che la retta di AUBERT soddisfa



sia $X \in$ retta di AUBERT

X, F_1, E_1, P sono sul cerchio di diametro XP, che chiamo ω

$\omega \cap DX = \{X, D_1\}$

vorrei P, D_1, A allineati

$XE \cdot XE_1 = XF \cdot XF_1 = \rho^2$ $\quad$ ($X \in$ AUBERT line)

$X\hat{D_1F_1} = \underbrace{X\hat{E_1F_1} = X\hat{FE}}_{EFE_1F_1 \text{ è ciclico}}$ $\quad \Rightarrow DFF_1D_1$ ciclico

Ma allora $XD \cdot XD_1 = \rho^2 \Rightarrow D_1 \in \omega_A \Rightarrow A\hat{D_1}D = 90^\circ \Rightarrow$ Ts.

$\square$

LEMMA 2:

$\overset{\triangle}{ABC}$, $\overset{\triangle}{A_1B_1C_1}$ soddisfano DESARGUES

AA_1, BB_1, CC_1 concorrono in P

$AB \cap A_1B_1$ ecc. stanno su una retta t

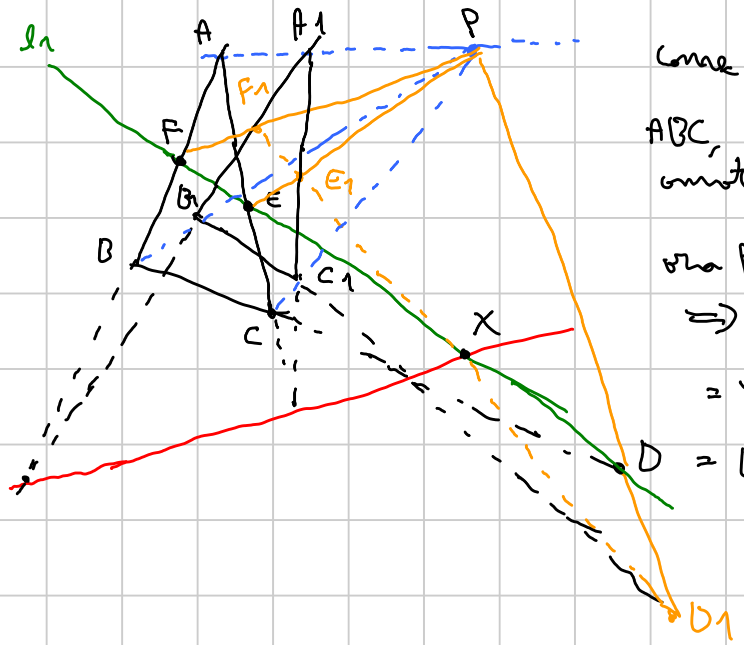
prendiamo una retta l_1

$D = BC \cap l_1$, $\quad E = AC \cap l_1$, $\quad F = AB \cap l_1$

$X = t \cap l_1$

$D_1 = DP \cap B_1C_1$
$E_1 = EP \cap A_1C_1$
$F_1 = FP \cap A_1B_1$

TS: D_1, E_1, F_1, X allineati



Mando t all'infinito come in DESARGUES

ABC, $A_1B_1C_1$ diventano omotetici (sia φ l'omotetia)

ora P è il centro di omotetia

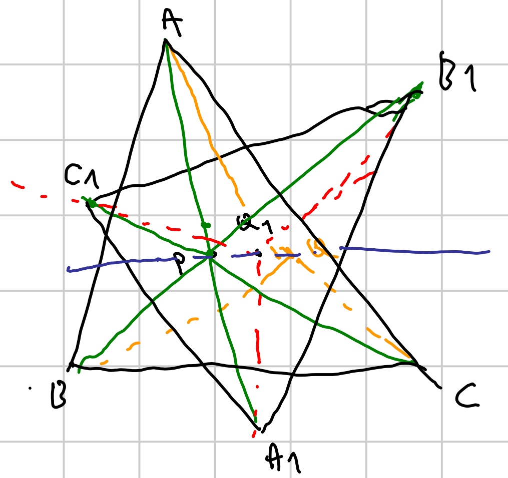
$\Rightarrow \varphi(D) = \varphi(BC \cap DP)$
$= \varphi(BC) \cap \varphi(DP)$
$= B_1C_1 \cap DP = D_1$

$\Rightarrow D_1, E_1, F_1$ sono allineati su $\varphi(l_1) = l_2$

$\Rightarrow l_2 \parallel l_1 \Rightarrow l_2 \cap l_1 \in t$ (retta all'infinito) $\square$

OSS: Nel Lemma 2, se l_2 è all'infinito, allora $l_1 \parallel t$

SONDAT:



OSS (corollario LEMMA 1) se ho $\triangle ABC$ e due punti X, P
e t_A = retta per $X \perp$ ad AP ecc.
e suppongo che $t_A \cap BC$ ecc. sono allineati su l
allora $l \perp XP$

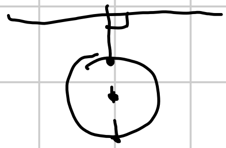
Dim per LEMMA 2, $X \in$ AUBERT LINE di ABCDEF

$\Rightarrow \quad XD_1 \cdot XD = XE_1 \cdot XE = XF_1 \cdot XF = \rho^2$

$\Rightarrow$ se inverto di centro X, raggio ρ e poi simm. in X

allora ω (cfr. $(XPE_1F_1D_1)$ del LEMMA 1) $\to \overline{DEF}$

da cui la tesi



Ora mostriamo SONDAT:

l_A = retta per P che è $\perp$ ad AQ (parallela a B_1C_1)

$l_A \cap BC = D$; definisco similmente E, F.

LEMMA 2 $\Rightarrow$ $\overline{DEF} \parallel t$ (prospettrica)

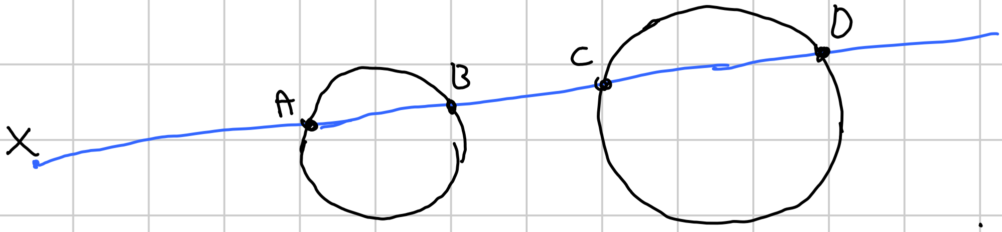
e sono allineati

(oss.) LEMMA 1 $\Rightarrow$ $\overline{DEF} \perp PQ \Rightarrow t \perp PQ$

similmente $t \perp PQ_1 \Rightarrow$ Ts.

ULTIMO ESERCIZIO

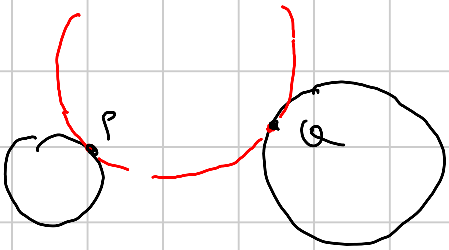
L'inversione è legata a nozioni proiettive



- A, C sono omotetici
  sono OMOLOGHI

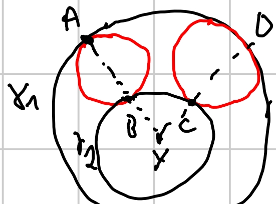
- A, D sono inversi
  si chiamano ANTIOMOLOGHI

OSSI



la cfr. rossa esiste
$\Longleftrightarrow$ P, Q sono ANTIOMOLOGHI
(per MONGE)

In particolare

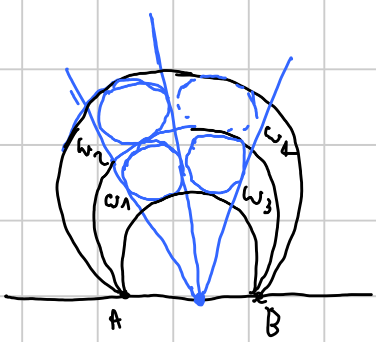


allora $ABCD$ è ciclico

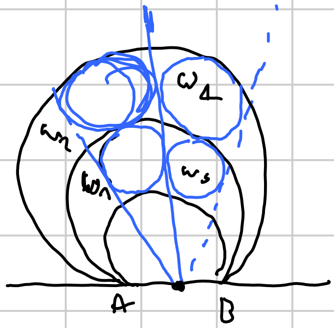
$YA \cdot YB = YD \cdot YC$

$=$ raggio^2 dell'inversione di centro Y che scambia γ_1, γ_2

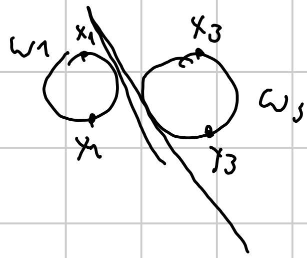
ESERCIZIO IMO SL 2010 _ G7



STRATEGIA:



$X_1X_3Y_1Y_3$ è ciclico (come prima)



$\Rightarrow X_1X_3$, Y_1Y_3, AB concorrono in un punto $P_{1,3}$

per MONGE $P_{1,3}$ è il centro di sim. est. di $\omega_1\omega_3$

$\Rightarrow$ sempre per Monge, il centro di sim. est. di ω_2, ω_3 sta su BA

Ora consideriamo $\omega_2, \omega_3, \omega_4$

Come prima, il centro di sim. esterna di ω_2, ω_4 sta su AB

ma vale anche per ω_2, ω_3

MONGE $\Rightarrow$ le tang. com. esterne di ω_3, ω_4 si incontrano su AB $\Rightarrow$ TS.