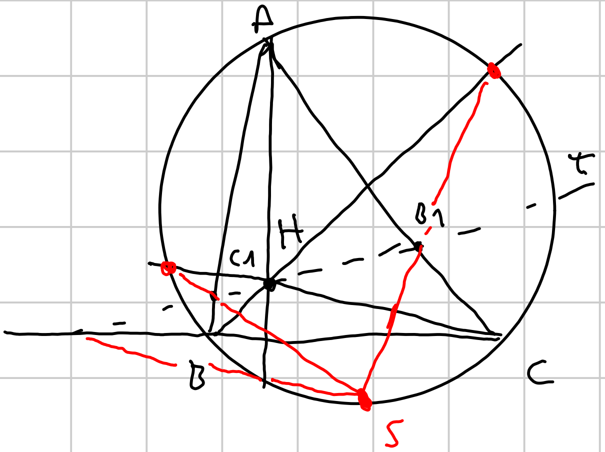
SENIOR 2016 G3 – ADVANCED

Note Title 9/6/2016

Linea di Steiner

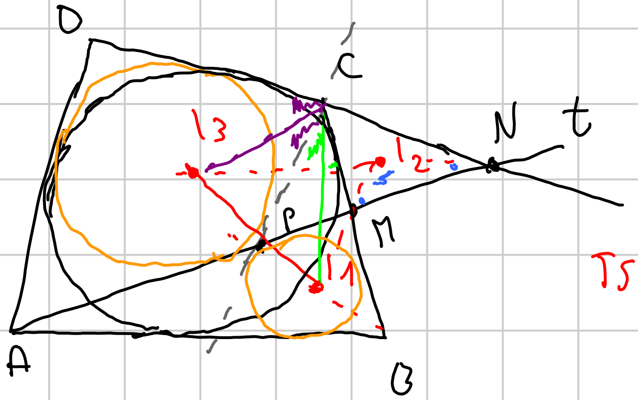


OSS: rette rosse = simm. di t nei lati: AB, BC, CA

S = anti-steiner point di t

Inverso: $\forall S \in (ABC)$, i suoi simm. nei lati sono allineati con H

ESERCIZIO 1 IMO SL 2009 – G8



I_1 = incentro di ΔABM
I_2 = " CMN
AON

TS: l'ortocentro di $I_1I_2I_3$ sta su t

Dim:

OSS il simm. di C in I_2I_3 sta su t
di C in I_1I_2 sta su t

per quanto visto sopra, spero $C \in (I_1I_2I_3)$

mostro che $C \in$ tang. comune int. di (I_1), (I_3)

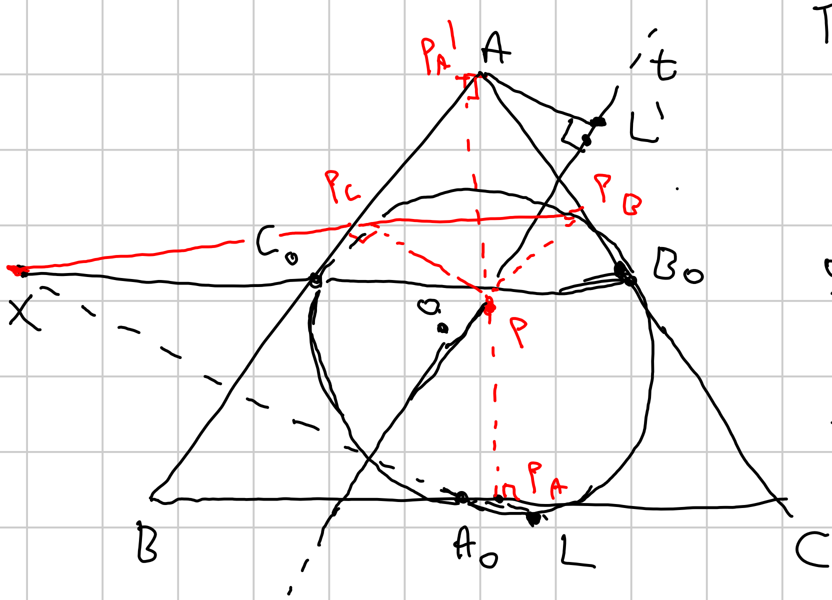
$\Rightarrow \widehat{I_3CI_1} = \frac{1}{2} D\widehat{C}B = I_3\widehat{I_2}I_1$

prendo $P \in t$ t.c. CP tange (I_3):

$CP - AP = DC - DA = BC - BA$

$\Rightarrow$ CPAB (non convesso) è circoscritto $\Rightarrow$ TS. ∎

APPLICAZIONE 2 (Th. di Fontène)



Ts: se t è fissa e P varia, $(P_A P_B P_C)$ passa per un punto fisso.

oss: th. su $(A_0 B_0 C_0)$

Claim: è l'anti-Steiner point di OP in $A_0B_0C_0$, che chiamo L

$\forall$ a, a' simm. in B_0C_0

oss: $L' \in t$, $L' \in (AC_0OB_0) \Rightarrow A\hat{L'}O = 90°$

$\Rightarrow AP_CPP_BL'$ è ciclico (su ω)

e anche $P_A' \in \omega$

Claim 1: $L'P_CC_0X$ ciclico

Dim: $\angle(L'C_0, L'P_C) = \angle(L'C_0, L'A) + \angle(L'A, L'P_C)$

$= \angle(B_0C_0, B_0A) + \angle(P_BA, P_BX)$

$= \angle(XC_0, XP_C)$

Claim 2: L, P_A, X allineati

Ora mostro che L', P_A', X sono allineati

$\angle(L'P_A', L'X) = \angle(L'P_A', L'P_C) + \angle(L'P_C, L'X)$

$= \angle(PP_A', PP_C) + \angle(C_0P_C, C_0X)$

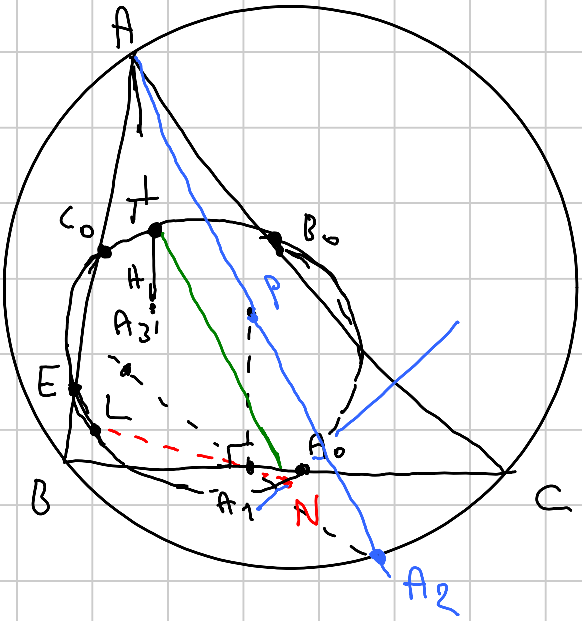
$= \angle(BP_A, BP_C) + \angle(BA, BC) = 0$

$\square$

Ora scrivo $XP_A \cdot XL = XP_A' \cdot XL'$ $\Rightarrow L \in (P_AP_BP_C)$

$ \overset{\shortparallel}{XP_C \cdot XP_B}$

ESERCIZIO 3



A_3 = simm. di A_2 in A_1, ecc.

Ts: H, A_3, B_3, C_3 conciclici.

Dim: $N = LA_1 \cap (A_0B_0C_0)$

(oss: $A_1B_1C_1 \stackrel{+}{\sim} A_2B_2C_2$)

mostro che $A_0N \perp AP$.

$$\angle(A_0N, AP) =$$

$$= \angle(A_0N, LN) + \angle(LN, PA_1) + \angle(PA_1, AP)$$

$$= \angle(AB, EL) + \angle(AP, AL') + \angle(PA_1, AP)$$

$$= \angle(AB, B_0C_0) + \angle(B_0C_0, B_0L) + \angle(PA_1, AB) + \angle(AB, AL')$$

$$= \angle(PA_1, B_0C_0) + \angle(B_0C_0, B_0L') + \underbrace{\angle(B_0C_0, B_0L)}_{0}$$

$$= 90^\circ$$

T = pt. medio AH $\Rightarrow TN \perp NA_0$

$\Rightarrow TN \parallel AP$

per ovvie omotetie, N è il pt. medio di HA_2

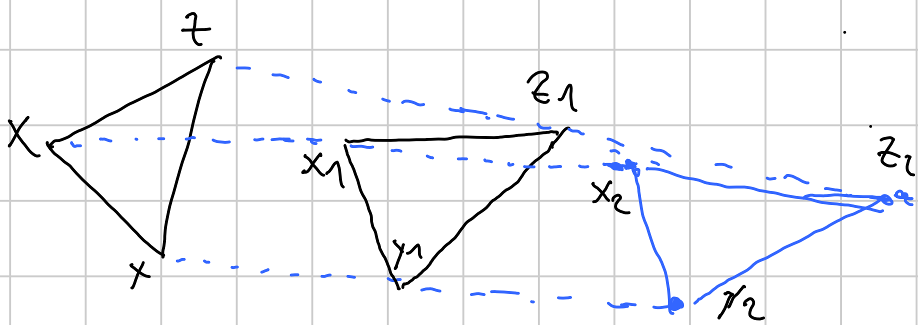
$\Rightarrow A_3H \parallel NL = A_1L$

$\Rightarrow \angle(A_3H, B_3H) = \angle(A_1L, B_1L) = \angle(A_1C_1, C_1B_1)$

LEMMA CHE CONCLUDE:

se $X\hat{Y}Z \stackrel{+}{\sim} X_1\hat{Y_1}Z_1$ e X_2 = simm. di X in X_1, ecc.

$\Rightarrow X_2\hat{Y_2}Z_2 \stackrel{+}{\sim} X_1\hat{Y_1}Z_1$



Dim: cons. la rotomotetia per cui $XX_1 \to YY_1$ manda anche X_2Y_2. Sia S il suo centro.

S è anche il centro di quella che manda $XY \to X_1Y_1$ e quella che manda $X_1Y_1 \to X_2Y_2$.

Allora $X_1Y_1S \simeq X_2Y_2S \simeq XYS$

$X_1Z_1S \simeq X_2Z_2S \simeq XZS$

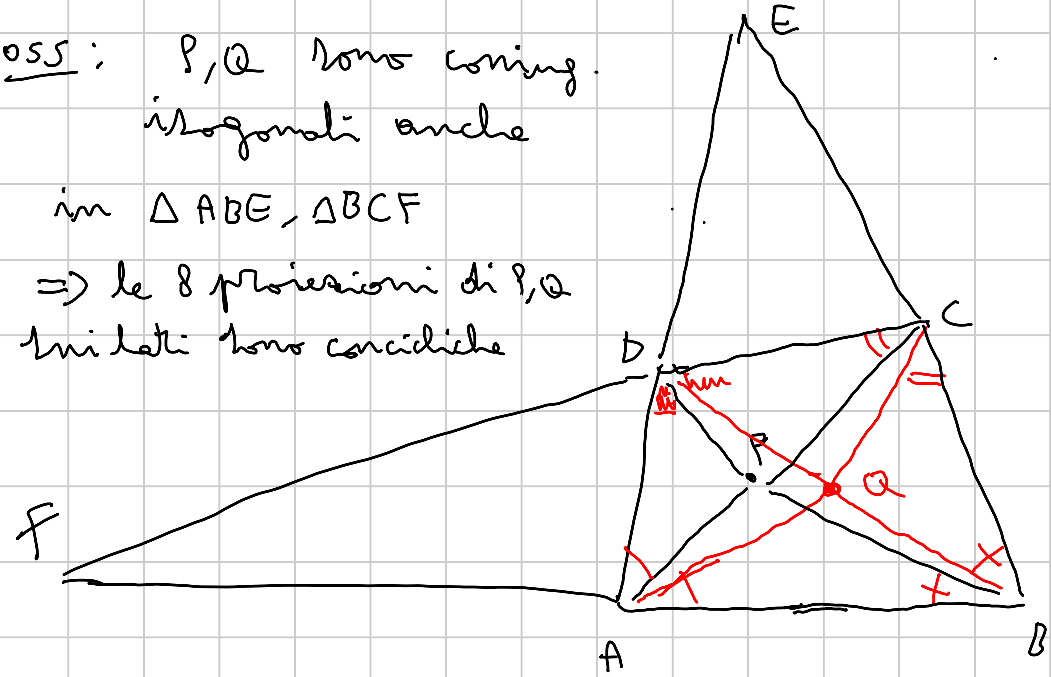
"incastrandoli" ottengo $XYZS$ e $X_2Y_2Z_2S$

□

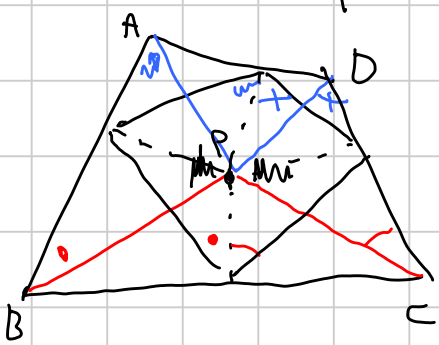
SECONDA Parte: CONIUGATI ISOGONALI (nei quadrilateri)

OSS: P, Q sono coniug. isogonali anche in $\triangle ABE$, $\triangle BCF$

$\Rightarrow$ le 8 proiezioni di P,Q sui lati sono concicliche



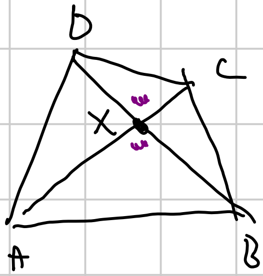
$\Rightarrow$ Il quadr. pedale di P è ciclico



rossi + blu = 180°

$\Rightarrow$ neri = 180°

APPLICAZIONE: IMO SL 2008 – G6



Quando X ha un con. isogonale?

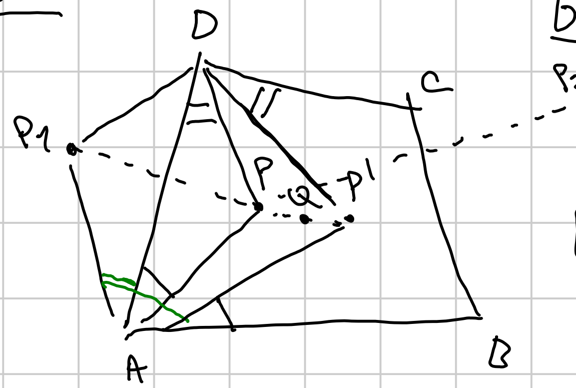
$\widehat{AXB} + \widehat{CXD} = 180°$

$AC \perp BD$

□

ESERCIZIO PER CASA: prop. inversa.

ESERCIZIO:



Def: retta di GAUSS di ABCD (la chiamo g) luogo degli X tali che

$[ABX] + [CDX] = [BCX] + [ADX]$

P_2

Ts: il pt. medio di $PP' \in g$ (lo chiamo Q)

Dim: P_1 simm. di P in AD

oss: $2[ABQ] = [ABP] + [ABP']$

calcolo $2([ADQ] + [BCQ])$

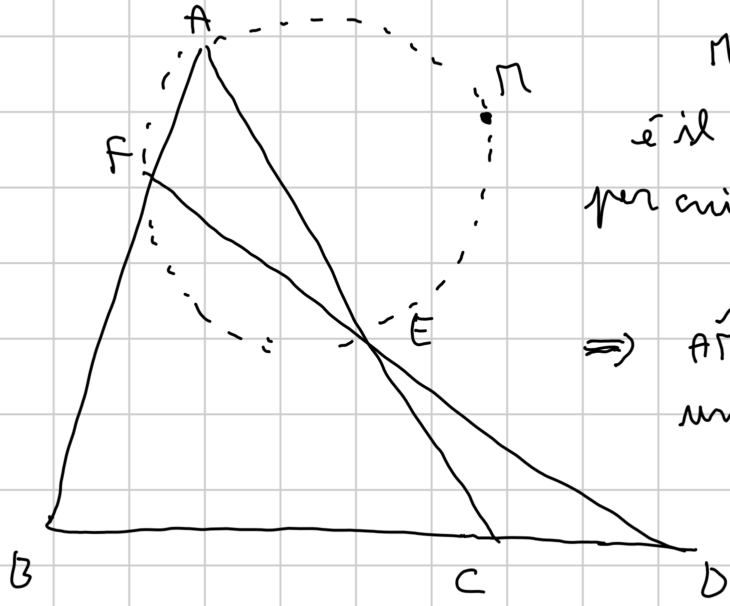
$$= \underbrace{\underbrace{[ADP]}_{=[ADP_1]} + [ADP']}_{[AP_1P'] + [DP_1P']} + \underbrace{\underbrace{[BCP]}_{=[BCP_2]} + [BCP']}_{[BP_2P'] + [CP_2P']}$$

$$= \frac{1}{2}\left(AP \cdot AP' \sin\hat{A} + BP \cdot BP' \sin\hat{B} + CP \cdot CP' \sin\hat{C} + DP \cdot DP' \sin\hat{D}\right)$$

espr. simm. in A, B, C, D come voluto

□

LEMMA (CLAWSON-SHMIDT CONJUGATION)



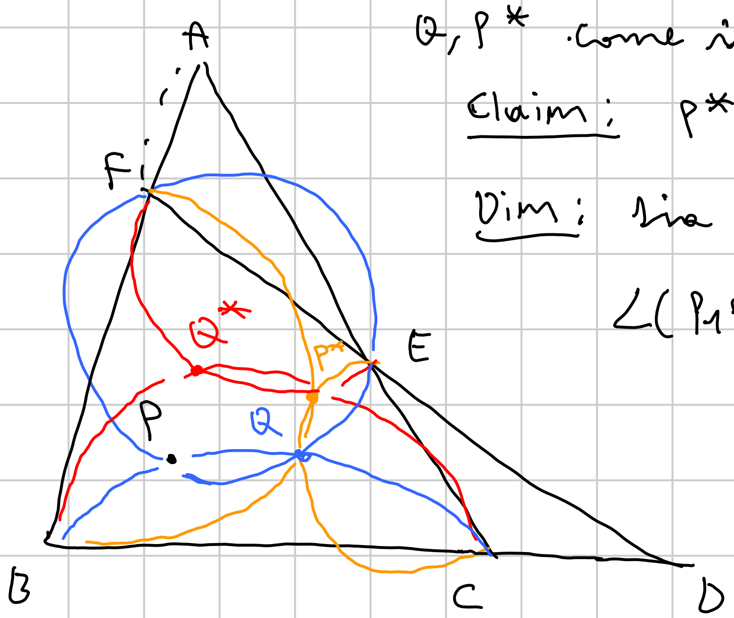
M pt. di Miquel $ABCDEF$ è il centro di rotomotetia per cui ad es. $EF \to CB$, $BF \to CE$

$\Rightarrow$ $\widehat{AMD}$, $\widehat{BME}$, $\widehat{CMF}$ hanno una bisettrice comune t

Inoltre $MA \cdot MD = MB \cdot ME = MC \cdot MF =: \rho^2$

$\Rightarrow$ l'inversione di centro M e raggio ρ seguita da simmetria in t (sia essa φ) fa sì che $A \leftrightarrow D$, $B \leftrightarrow E$, $C \leftrightarrow F$.

OSS: se P, P' sono con. isogonali, allora $P \leftrightarrow P'$ (in $BCEF$)



Q, P^* come in disegno

Claim: $P^* = \varphi(P)$

Dim: sia $P_1 = \varphi(P)$

$\angle(P_1F, P_1E) = \angle(P_1F, P_1M) + \angle(P_1M, P_1E)$

$= \angle(CP, CM) + \angle(BM, BP)$

$= \angle(CP, BC) + \angle(BC, CM) + \angle(BM, BC) + \angle(BC, BP)$

$= \angle(CP, BP) + \angle(MB, MC)$

$= \angle(CP, BP) + \angle(AB, AC)$

Calcolo $\angle(PF, FQ^*) = \angle(FP, FE) - \angle(FQ^*, FE)$
$= \angle(QP, QE) - \angle(P^*Q^*, P^*E)$
$= \angle(QP, QC) + \angle(QC, QE) - \angle(P^*Q^*, P^*C) - \angle(P^*C, P^*E)$
$= \angle(BP, BC) - \angle(BQ^*, BC) = \angle(BP, BQ^*)$
$\Rightarrow$ BPQ^*F è ciclico
e sim. anche CPQ^*E.

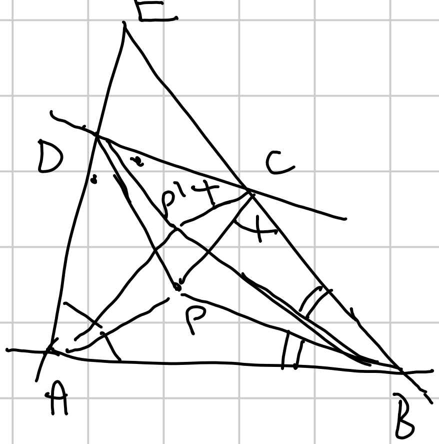
Infine calcolo

$$\angle(P^*F, P^*E) = \angle(P^*F, FE) + \angle(FE, P^*E)$$
$$= \angle(P^*F, FB) + \angle(FB, FE) + \angle(FE, EC) + \angle(EC, P^*E)$$
$$= \angle(AB, AC) + \angle(QP^*, QB) + \angle(QE, QP^*)$$
$$= \angle(AB, AC) + \angle(QC, QB)$$
$$= \angle(AB, AC) + \angle(PC, PB)$$

$\Rightarrow P_1 \in (P^*EFQ^*)$; facendo la stessa cosa risp. agli altri lati $\Rightarrow P^* \equiv P_1$

OSS: se P ammette coniug. isogonale in $ABCD$ e P^* è def. come immaginato, è lui il coniug.

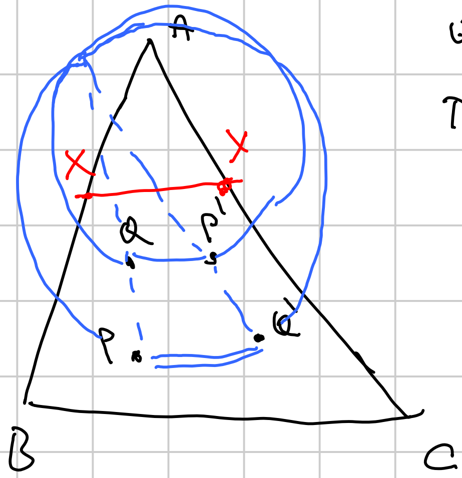
Dim



da prima so che
$$\angle(P^*D, P^*E) = \angle(EA, EB) + \angle(PB, PA)$$
calcolo
$$\angle(P'D, P'C) = \angle(P'D, DC) + \angle(DC, P'C)$$
$$= \angle(AD, DP) + \angle(PC, CB)$$
$$= \angle(CP, PD) + \angle(EA, EB)$$
$$= \angle(EA, EB) + \angle(PB, PA)$$

ciclando ho che $P^* \equiv P'$

APPLICAZIONE:



P, P' con. isog.

Q, Q' con. isog.

TS: il pt. di Miquel di $\{PQ, PQ', Q'P', P'Q\}$ sta su $\odot(ABC)$

Dim $X \in AB$, $Y \in AC$ t.c. le coniugazioni valgono in $BCYX$

Ora se M è pt. di Miquel di $BCXY$

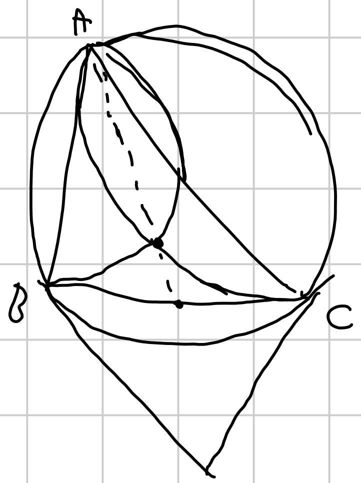
ho che $\varphi(P) = P'$, $\varphi(Q) = Q'$ $\Rightarrow$ $MXP \simeq MP'C$

ecc.

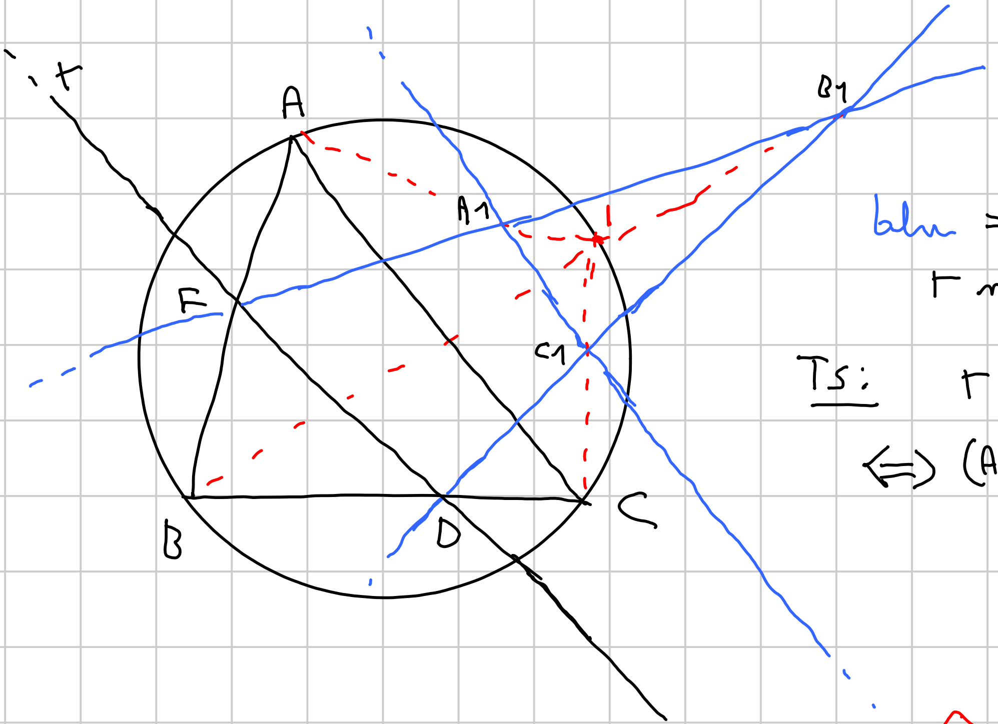
Ora la rotom. che manda $PQ' \to QP'$ deve avere centro $M \Rightarrow$ TS.

$\square$

TERZA PARTE



IMO 2011 _ 6



blu = simm. di r nei lati

Ts: r tange (ABC)

$\iff (A_1B_1C_1)$ tange (ABC)

OSS; 1: BC bisettrice di $\widehat{r_a, r}$ ecc.

$\Rightarrow C$ è in/ex-centro di DEC_1

In ogni caso CC_1 biseca $\widehat{r_a, r_b}$, ecc.

$\Rightarrow AA_1, BB_1, CC_1$ concorrono in I, dove I è l'incentro di $A_1B_1C_1$.

Ora $\angle(CB, DE) + \angle(DE, EC) + \angle(C_1C, C_1D) = 90^\circ$

$\Rightarrow \angle(C_1C, C_1B_1) = 90^\circ - \angle(BC, DE) - \angle(DE, EC) = 90^\circ - \angle(BC, AC)$

$\angle(B_1B, B_1C_1) = 90^\circ - \angle(BC, AB)$.

$\Rightarrow \angle(BB_1, CC_1) = \angle(BC, AC) - \angle(BC, AB) = \angle(AB, AC)$

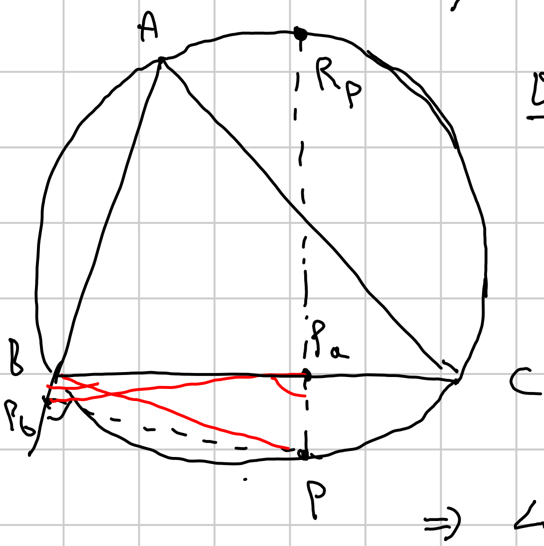
$\Rightarrow I \in (ABC)$.

OSS: Se inverto in I, l'imm. di $A_1B_1C_1$ è simile ad ABC, mentre (ABC) va in una retta.

ad es. $A_1 \to A_2$, ecc. e $A \to A'$, spero che

$ABC \cup r \overset{+}{\simeq} A_2B_2C_2 \cup \overline{A'B'C'}$

LEMMA: dati $P, Q \in (ABC)$ e l_P, l_Q le risp. linee di Steiner, $\angle(l_P, l_Q) = \angle(AQ, AP)$



Dim $l_P \parallel P_aP_b$ (linea di SIMSON)

e PP_bBP_a ciclico

$\angle(R_PA, R_PP)$

$= \angle(BA, BP) = \angle(P_aP_b, P_aP)$

$\Rightarrow P_aP_b \parallel AR_P$

$\Rightarrow \angle(l_P, l_Q) = \angle(AR_P, AR_Q) = \angle(AQ, AP)$

□

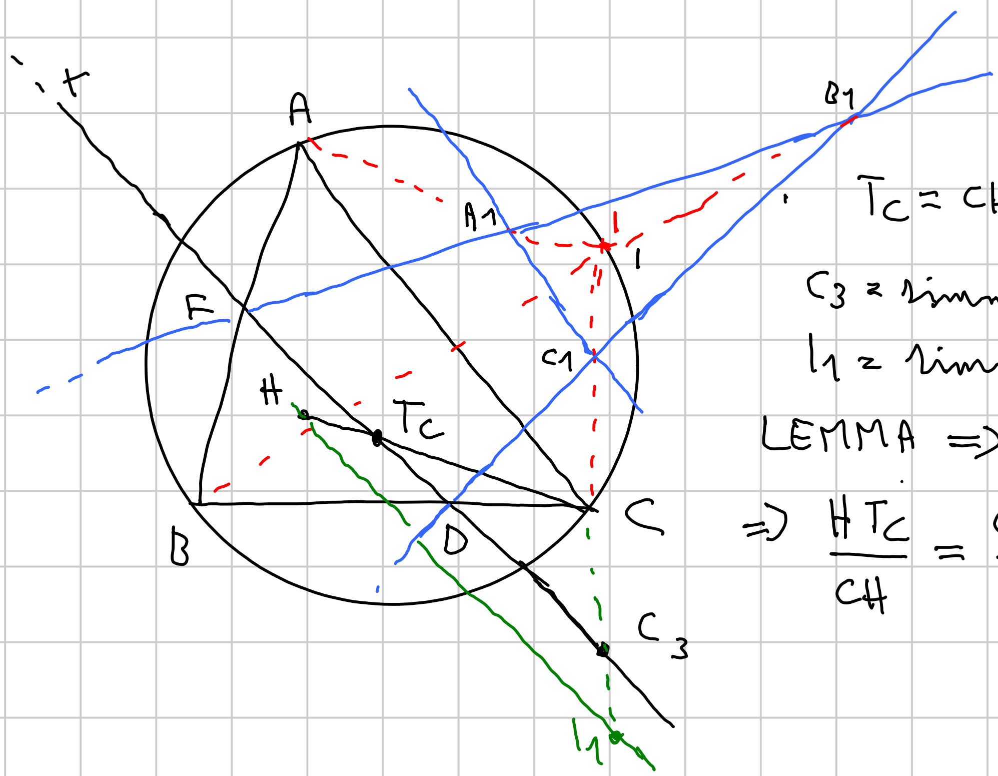
Ora

$$\angle(CI, CA) = \angle(C_1C, C_1E) + \angle(C_1E, EC) = 90^\circ - \angle(DC, DE)$$
$$= 90^\circ - \angle(BC, r) = \angle(AH, r).$$

Sia I' l'anti-St. point. della retta per H, che è // a r.

per il LEMMA, (su I', A) $\angle(CI', CA) = \angle(AH, r) = \angle(CI, CA)$

analog. $\Rightarrow I \equiv I'$



$T_C = CH \cap r$

C_3 = simm. di C_1 in BC

I_1 = simm. di I in BC

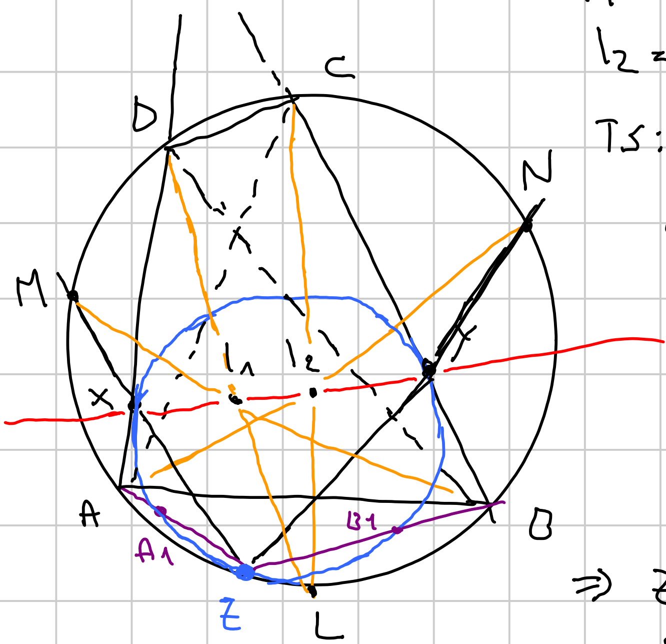
LEMMA $\Rightarrow I_1H \parallel r$

$$\Rightarrow \frac{HT_C}{CH} = \frac{C_3I_1}{CI_1} = \frac{IC_1}{IC} = \frac{IC'}{IC_2}$$

Ora $A_2B_2C_2I \stackrel{+}{\sim} ABCH \Rightarrow$ nella similitudine (per sopra), $A_2 \to A$, ecc. e $A' \to T_C$

□

QUARTA PARTE



I_1 = l'incentro di $A\hat{B}D$

I_2 = l'incentro di $A\hat{B}C$

Ts: X, Y, I_1, I_2 allineati

$LA = LB$

Idea: Pascal su ZMBADL

$\Rightarrow$ $ZM \cap AD = X$
$MB \cap DL = I_1$ allineati.
$AB \cap ZL = K$

Similmente avrò che Y, I_2, K sono allineati

Ora mi basta mostrare che $K \in XY$, cioè XY, AB, ZL concorrono.

OSS: $KA/KB = ZA/ZB$ perché L è pt. medio dell'arco

Se $AD \cap BC = E$, uso menelao su $A\hat{B}E$

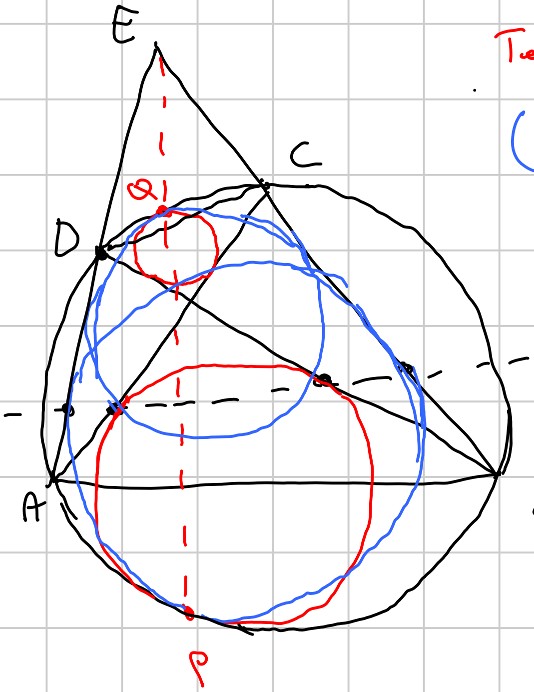
OSS $EX = EY \Rightarrow$ mi basta che $\frac{KA}{KB} = \frac{AX}{BY}$

$$\frac{KA}{KB} = \frac{ZA}{ZB}$$

OSS: $A_1B_1 // AB$ per omotetia

$$\frac{BY^2}{AX^2} = \frac{BB_1 \cdot BZ}{AA_1 \cdot AZ} = \frac{BZ^2}{AZ^2} \Rightarrow \text{Tesi}$$

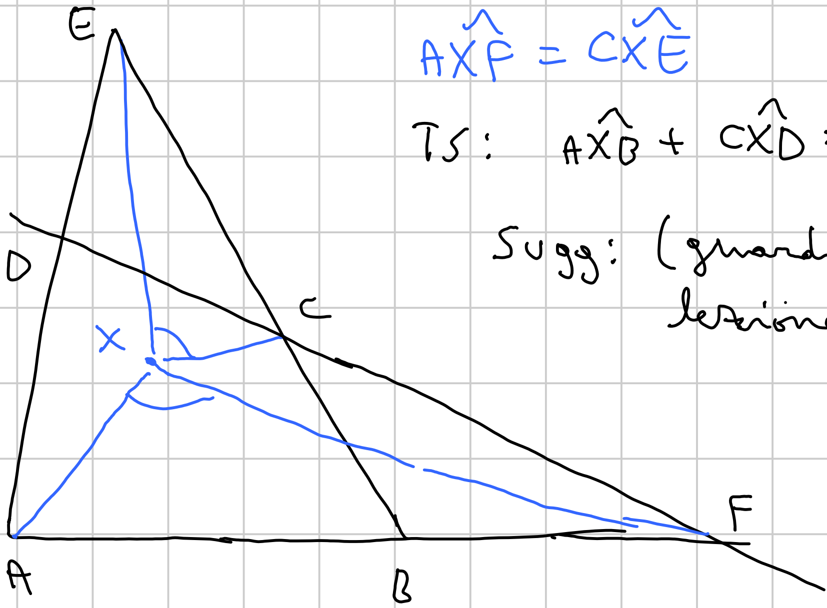
ESERCIZI PER CASA:



Tesi: PQ passa per E

(Sugg: le rosse e blu hanno gli stessi punti di tangenza ho finito per Monge)

ESERCIZIO PER CASA 2:



$A\hat{X}F = C\hat{X}E$

Ts: $A\hat{X}B + C\hat{X}D = 180^\circ$

Sugg: (guardare questa lezione).