G1 - Adv

Note Title 9/3/2016

**Campo**: $(\mathbb{K}, +, \cdot, 1, 0)$

$+$ si comporta come la somma

$\cdot$ " " " moltiplicazione

$1$ el. neutro di $\cdot$

$0$ el neutro di $+$

$\forall k \in \mathbb{K} \quad \exists k' \in \mathbb{K}$ t.c. $k + k' = 0$

$\forall k \in \mathbb{K} \setminus \{0\} \quad \exists k' \in \mathbb{K}$ t.c. $kk' = 1$.

non c'è niente altro.

**Es**: $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{F}_p$ $\qquad \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$

sottocampo

c'è un sacco di roba

$$\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{a + \sqrt{2}b \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$$

**Es**: $x^2 + 1 \equiv 0 \mod 7$ non ha soluzioni

Invento $\mathbb{I}$ soluzione di "$x^2 + 1 \equiv 0 \mod 7$"

$\mathbb{F}_{7^2} = \{a + \mathbb{I}b \mid a, b \in \mathbb{F}_7\}$ l'inv. esiste perché $-1$ non è res. quad.

$\mathbb{F}_{p^2}$ esiste ed è un campo $\forall p$ primo, a patto di aggiungere la radice di un non residuo quadratico.

$\mathbb{F}_{p^k}$

Uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ è un insieme $V$ con

- ·) $+ : V\times V \longrightarrow V$ una somma
- ·) $\cdot : V\times \mathbb{K} \longrightarrow V$ una molt. per scalare
- ·) $0 \in V$ el. neutro per $+$

$(k_1 + k_2)\cdot v = k_1 \cdot v + k_2 v$ ; $v \in V$

somma di $\mathbb{K}$ ; somma di $V$

$k_1 \cdot (k_2 \cdot v) = (k_1 \cdot k_2)\cdot v$

mol. di $\mathbb{K}$ ; molt. per scalare in $V$

$1\cdot v = v \qquad 0 \cdot v = 0$

Es: $\mathbb{R}^n = \{ (x_1, \dots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R} \ \ i = 1, \dots, n \}$ sp. vett. su $\mathbb{R}$

$\mathbb{Q}^n, \ \mathbb{C}^n, \ \mathbb{F}_p^n$

Attenzione: $\mathbb{F}_p^2 \qquad \mathbb{F}_{p^2}$

$\mathbb{F}_p(\mathbb{I}) \simeq \mathbb{F}_p^2$

$\mathbb{F}_7(\sqrt{3}) \simeq \mathbb{F}_p^2$

$(1,1)$ ; $1 + \sqrt{-1}\cdot 1$ ; $1+\sqrt{3}\cdot 1$

$\mathbb{R} \qquad x^2+1 \longrightarrow \mathbb{C}$

$x^2+x+1 \ \} \longrightarrow R(\xi)$

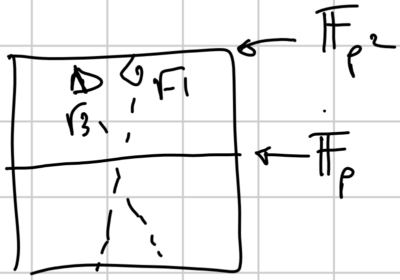
$\mathbb{F}_{p^2} \supset \mathbb{F}_p$

posso definire una "molt. per scalare" $n \in \mathbb{F}_p \quad \alpha \in \mathbb{F}_{p^2} \quad n\cdot\alpha$

su $\mathbb{F}_{p^2}$ ho una somma

$\Longrightarrow \mathbb{F}_{p^2}$ è sp vett su $\mathbb{F}_p$

$\mathbb{F}_{p^2} \longleftrightarrow \mathbb{F}_p^2$




Stesso fenomeno si presenta $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$, $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$

$\mathbb{R}$ é sp. vett. su $\mathbb{Q}$.

Dipendenza lineare: $v_1, \dots, v_n \in V$ sono lin.$^{\text{nte}}$ dipendenti

se $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ non tutti nulli

t.c. $\sum \lambda_i v_i = 0$

Indip. lineare: $v_1 \dots v_n \in V$ sono lin.$^{\text{nte}}$ indip. se

$\sum \lambda_i v_i = 0$ con $\lambda_i \in \mathbb{K} \Longleftrightarrow \lambda_i = 0 \ \forall i$

Spazio generato da $v_1, \dots, v_n \in V$

$$\langle v_1, \dots, v_n \rangle_{\mathbb{K}} = \{ \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n \mid \lambda_i \in \mathbb{K} \}$$

Base di V

$\{v_1, \dots, v_n\}$ base di V se

(i) sono lin. indip

(ii) $\langle v_1, \dots, v_n \rangle = V$

Teo 1: $\exists$ sempre una base.

Teo 2: Due basi possono sempre essere poste in bigezione

Es non banale: $\exists$ base di $\mathbb{R}$ su $\mathbb{Q}$

$\exists \mathcal{B} \subseteq \mathbb{R}$ t.c. (i) gli el di $\mathcal{B}$ sono indip. su $\mathbb{Q}$

(ii) $\forall x \in \mathbb{R} \ \exists b_1, \dots, b_{k(x)} \in \mathcal{B}$

e $q_1, \dots, q_{k(x)} \in \mathbb{Q}$ t.c.

$$x = q_1 b_1 + \dots + q_{k(x)} b_{k(x)}$$

$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ $\qquad f(x+y) = f(x) + f(y)$

$\forall x \in \mathbb{R} \ \forall q \in \mathbb{Q} \quad f(qx) = q f(x)$

$\mathbb{Q}$- lineare

Es: $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ (sp. vett su $\mathbb{R}$)

$f(x+y) = f(x) + f(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^2$

$f(\lambda x) = \lambda f(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}^2 \ \forall \lambda \in \mathbb{R}$

$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ $\qquad x \in \mathbb{R}^2$

$\Downarrow$

$x = a \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad a, b \in \mathbb{R}$

$f(x) = f\left(a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = a f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Posso definire come mi pare $f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Poi il resto è fissato

(i) $\qquad$ (ii)

$f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$f\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a - b \\ 3a + 2b \end{pmatrix}$

Oss: Questo è vero anche per $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\mathbb{Q}$- lineare

Divagazione nella divagazione: $\nexists f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ bigettiva

$\exists f: \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ bigettiva $\quad \exists f: \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}^n$ bigettiva $\forall n$

"La base di $\mathbb{R}$ su $\mathbb{Q}$ ha tanti el. quanti $\mathbb{R}$."

$\boxed{\text{Base di Hamel}}$

Se $V$ è sp. vett. su $\mathbb{K}$, $\mathcal{B}$ è una base di $V$ e $\#\mathcal{B} = n$,
allora $\exists F : V \longrightarrow \mathbb{K}^n$ t.c.

$$F(v_1 + v_2) = F(v_1) + F(v_2)$$
$$F(\lambda v_1) = \lambda F(v_1) \qquad \forall v_1, v_2 \in V, \ \forall \lambda \in \mathbb{K}$$

$F$ è bigettiva

## Matrici e vettori

Vettore $\rightsquigarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

Matrice $\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1h} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kh} \end{pmatrix}$

$k \times h$

righe, colonne

$$\underset{k \times h}{\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1h} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kh} \end{pmatrix}} \underset{h \times 1}{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_h \end{pmatrix}} = \underset{k \times 1}{\begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{h} a_{1j} x_j \\ \sum a_{2j} x_j \\ \vdots \\ \sum a_{kj} x_j \end{pmatrix}}$$

$$(k \times \cancel{h}) \cdot (\cancel{h} \times 1) = k \times 1$$

$$(2 \times 3) \cdot (3 \times 4) = (2 \times 4)$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 4 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 20 & 9 & 3 & 4 \\ -2 & -4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Se $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^p$ è lineare $\Rightarrow \exists M$ matrice $p \times n$ a coeff in $\mathbb{K}$

t.c. $f(x) = M \cdot x$

## Sistemi lineari

$$\begin{cases} 2x + 3y - z = 0 \\ 5x - y = 0 \\ 2x + z = 1 \end{cases}$$

$f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ $\quad f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + 3y - z \\ 5x - y \\ 2x + z \end{pmatrix}$

mi domando chi è $f^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Oss: $f$ è lineare. Infatti $f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 5 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 5 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$M \cdot x = a$ $\quad$ se $\exists M'$ t.c. $M'M = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow x = M' \cdot a$

Teo: $A$ quadrata ($n \times n$). Sono equivalenti
(i) $\exists A^{-1}$
(ii) $A \cdot x = 0$ ha solo la soluzione nulla
(iii) $A \cdot x = b$ ha una unica soluzione $\forall b \in \mathbb{K}^n$
(iv) $\det A \neq 0$

$$\det(a_{ij}) = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{|\sigma|} \cdot \prod_{j=1}^{n} a_{j\sigma(j)}$$

Oss: Se $A$ è una matrice $n \times k$ con $k > n$
$\Rightarrow A \cdot x = 0$ ha sicuramente una sol diversa da $x = 0$

dim:

$$A = \left( A_1 \middle| \ \ldots\ldots \middle| A_k \right) \qquad A_j \in \mathbb{R}^n$$

$$A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix} = x_1 A_1 + \ldots + x_k A_k$$

se $k > n$, $A_1, \ldots, A_k \in \mathbb{R}^n$ sono lin. dip. $\Rightarrow \exists\, x_1, \ldots, x_k \in \mathbb{R}$ non tutti nulli che risolvono il sistema.

Osservazioni sparse

1) $I$ = matr. identità $\qquad I_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$

$J$ = matr. con tutti 1. $\qquad n$ - dimensione

$\det(J - I)$

$$n = 2 \quad \det\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -1$$

$$n = 3 \quad \det\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

$$n = 4 \quad \det\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \cancel{0 \cdot \det\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}} - 1 \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} +$$

$$+ 1 \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} - 1 \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= -1 - 1 - 1 = -3$$

$$\det(J - I) = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{|\sigma|} \cdot \underbrace{\prod_{j=1}^{n} a_{j\sigma(j)}}$$

$\sigma$ ha pt fix $\longrightarrow 0$

$\sigma$ non ha pt fix $\longrightarrow 1$

$$D_n \doteq (n-1)(D_{n-1} + D_{n-2})$$

2) $A_i$ i-esima colonna di $A = J - I$

$e_j$ = vettore con 1 in pos. j e tutti 0.

$$\sum A_i = (n-1)\mathbb{1} \qquad \sum A_i - (n-1)A_j = (n-1)e_j$$

$$\Downarrow$$

$$\langle A_1, \dots, A_n \rangle \supseteq \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$$

$$\Rightarrow \mathbb{R}^n \supseteq \langle A_1, \dots, A_n \rangle \supseteq \langle e_1, \dots, e_n \rangle = \mathbb{R}^n$$

$$\Rightarrow \det A \neq 0$$

## Matrici di incidenza

**Es 1**: Grafo $G = (V, E)$ $\quad \# V = n$

matrice di incidenza di $G$ è $M = (m_{ij})$ $n \times n$

$m_{ij} = 1 \Leftrightarrow (i,j) \in E$

altrimenti $m_{ij} = 0$

$K_n$ = grafo completo su $n$ vertici

$n = 3$ $\quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Matrice simmetrica

$a_{ij} = a_{ji} \quad \forall i, j$

$A \longrightarrow (A^T)_{ij} = A_{ji}$

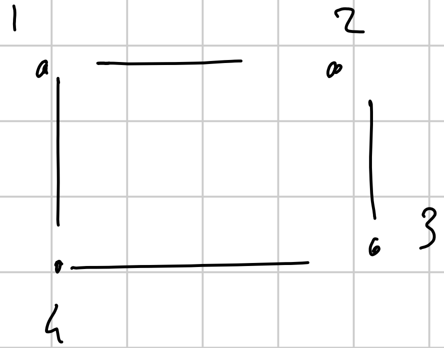
matrice trasposta

Prop: $\det A = \det A^T$

$(AB)^T = B^T \cdot A^T$

$(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$

$M$ simm $\Longleftrightarrow M^T = M$

$G =$ 


$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$MM^T = \begin{pmatrix} 0&1&0&1 \\ 1&0&1&0 \\ 0&1&0&1 \\ 1&0&1&0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0&1&0&1 \\ 1&0&1&0 \\ 0&1&0&1 \\ 1&0&1&0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{2}&0&2&\boxed{0} \\ 0&2&0&2 \\ 2&0&2&0 \\ 0&2&0&2 \end{pmatrix}$$

1 4

quanti vertici sono collegati a 1 e 4

$$(MM^T)_{ii} = \deg(v_i)$$

$$(MM^T)^T = (M^T)^T M^T = M \cdot M^T \qquad M \cdot M^T \text{ è simmetrica}$$

**Es 2:** $X$, $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$

$\# X = n$, $\mathcal{F} = \{Y_1, \dots, Y_k\}$

$$M = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} 1 & 2 & \cdots & k \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n \end{array} & \begin{pmatrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix} \end{array} \qquad M_{ij} = \begin{cases} 0 & x_i \notin Y_j \\ 1 & x_i \in Y_j \end{cases}$$

$$MM^T = \begin{pmatrix} \circ & & \circ \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

$\#\{Y_j$ che contengono $x_1$ e $x_k\}$

prod. scalare della $1^a$ riga con se stessa $=$ a quanti $Y_j$ appartiene $x_1$

$$M^T M = \begin{pmatrix} \circ & & \circ \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

$\# Y_j$

$\#(Y_i \cap Y_j)$

**Lemma:** $A$ matrice $n \times n$, coeff. in $\mathbb{R}$. Con tutte le entrate fuori dalla diagonale $= t \geq 0$, e gli el. sulla diagonale $> t$. Allora $A$ è non singolare ($\det A \neq 0$).

**Dim:** $A = \begin{pmatrix} \circ & t & t & t \\ t & \circ & t & t \\ t & t & \circ & t \\ t & t & t & \circ \end{pmatrix}$ $\qquad A - tJ = D$ con $D_{ii} > 0 \ \forall i$

Se $t=0$ è ovvio. $t>0$.

$$\underset{\overset{\shortparallel}{A}}{(tJ+D)}x=0 \qquad D=\begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n \end{pmatrix} \quad d_i>0$$

$Dx=-tJx$ Per assurdo, diciamo $\exists x\neq 0$ soluzione.

$s = x_1+\dots+x_n$
somma entrate di $x$

$d_i x_i = -ts$

$x_i = -\left(\frac{t}{d_i}\right)\cdot s$ Assurdo.

$\Rightarrow A$ è non singolare $\square$

**Esercizio**: $\#X=n$ $\mathcal{F}=\{Y_1,\dots,Y_k\}$ (sottoins. propri di $X$) t.c. $\forall$ due el. di $X$ $\exists!$ $Y_j\in\mathcal{F}$ che li contiene. Allora $|\mathcal{F}|\geq n$ ($k\geq n$)

**dim**: $A$ matrice di incidenza $k\times n$
$\{x_1,\dots,x_n\}=X$ $\qquad A_{ij}=1$ se $x_j\in Y_i$.

$\underset{\overset{\shortparallel}{M}}{A^T A}$ $n\times n$ $\qquad \boxed{M_{ij}=1 \quad i\neq j}$ $\qquad M_{ii}=\#$ ins di $\mathcal{F}$ che contengono $x_i$.

$M_{ii}>1$

$A^T\cdot A$ non è singolare. Se $n>k$ $\exists x\neq 0$ t.c. $Ax=0$
$\Rightarrow A^T\cdot Ax=0$ Assurdo $\Rightarrow n\leq k$. $\blacksquare$

**Es**: $\mathcal{F}=\{Y_1,\dots,Y_k\}\subseteq\mathcal{P}(X)$, $X=\{1,\dots,n\}$ t.c.
$\#(Y_i\cap Y_j)=t$ $\forall i\neq j$, con $1\leq t\leq n$ fissato

Allora $k\leq n$.

**dim**: $A=$ la $i$-esima colonna dice quali el. appartengono a $Y_i$
$A$ è $n\times k$

$$A^T A \quad k \times k \qquad m_{ij} = t \ (i \neq j) \qquad m_{ii} = \# Y_i$$
$$\overset{\shortparallel}{M}$$

se $\exists\, Y_i$ con $\# Y_i = t$ ho finito

$\Rightarrow m_{ii} > t \ \forall i$

$\Rightarrow \det M \neq 0$ ma allora $k \leq n$. ■ (Disuguaglianza di Fisher)

<u>Es</u>: $A_1, \dots, A_k$ sottoins. di $\{1 \dots n\}$, $\# A_i$ dispari $\forall i$
$\#(A_i \cap A_j)$ pari $\forall i \neq j$. Allora $k \leq n$

<u>dim</u>: Lavoriamo in $\mathbb{F}_2$. $v_i$ il vettore associato a $A_i$

$i = 1, \dots, k$

$$\begin{cases} v_i \cdot v_j = 0 & i \neq j \\ v_i \cdot v_i = 1 \end{cases} \qquad \underline{\text{ortonormali}} \qquad v_i \in \mathbb{F}_2^n$$

$$\sum_{i=1}^{k} c_i v_i = 0 \qquad c_i \in \mathbb{F}_2$$

$\Rightarrow$ tutti i $c_i = 0$.

$$\langle v_j, \sum_{i=1}^{k} c_i v_i \rangle = 0$$

$$c_j = 0 \qquad \Rightarrow k \leq n.$$

<u>Divagazione proiettiva finita</u>

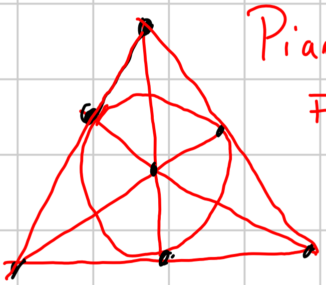
$$\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\} / \sim \qquad v \sim w \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \text{ t.c. } v = \lambda w$$

$$\shortparallel$$
$$\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \qquad \mathbb{F}_2^3 \setminus \{(0,0,0)\} / \sim \qquad \sim \rightsquigarrow \mathbb{F}_2 \setminus \{0\}$$

$$\#(\mathbb{F}_3^2 \setminus \{(0,0,0)\}) = 7$$

$$\shortparallel$$
$$\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_2) \qquad \#(\mathbb{F}_2 - \{0\}) = 1$$

$$\# \mathbb{P}^2(\mathbb{F}_2) = 7$$



Piano di FANO

Es A: $2n$ persone. Ognuno ha un numero pari di amici
$\Rightarrow \exists$ 2 persone con un numero pari di amici comuni.

Es B: $n$ pari $>0$, $S_1 \dots S_n \subseteq \{1, \dots, n\}$ t.c. $\# S_i$ pari.
$\Rightarrow \exists i \neq j$ t.c. $\#(S_i \cap S_j)$ è pari!

---

Autovalori & Autovettori

$A$ $n \times n$ Un vettore $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ si dice AUTOVETTORE di $A$ se $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ t.c. $Av = \lambda v$

$\lambda$ si dice AUTOVALORE (RELATIVO a $v$)

Es: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ $e_1$ è autovett. di autoval 1
$e_2$ è autovett. di autoval. 2

$$A \cdot e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot e_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Es: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $Ax = \lambda x$ $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} x_2 = \lambda x_1 \\ x_1 = \lambda x_2 \end{cases} \leadsto \begin{cases} -\lambda x_1 + x_2 = 0 \\ +x_1 - \lambda x_2 = 0 \end{cases}$$

$\det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 1$ deve essere $0 \Rightarrow \lambda^2 = 1 \Rightarrow \lambda = \pm 1$

$\lambda = 1$ $\quad \begin{cases} -x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} k \\ k \end{pmatrix} \ k \in \mathbb{R}$ ad es. $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\lambda = -1$ $\quad \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} k \\ -k \end{pmatrix} \ k \in \mathbb{R}$ ad es $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

__ES:__ $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ non ha autovett/autovalori reali.

__OSS:__ $Av = \lambda v \Longleftrightarrow (A - \lambda I)v = 0$

$\Rightarrow$ voglio una sol. non banale di $\triangleright$) $\Rightarrow$ voglio che

$\det(A - \lambda I) = 0$
$\quad \|$
$p_A(\lambda)$ polinomio CARATTERISTICO di $A$

Le radici di $p_A(\lambda)$ sono gli autovalori di $A$

__ES:__ $\begin{pmatrix} 2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 2 \end{pmatrix}$ ha $p_A(\lambda) = (\lambda - 2)^n (-1)^n$

$\begin{pmatrix} 2 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ & \ddots & & & 0 \\ & & \ddots & & \vdots \\ & & & \ddots & 0 \\ 0 & & & & 2 \end{pmatrix}$ ha $p_A(\lambda) = (2 - \lambda)^n$

$n = 3$ $\quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + z \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix}$ $\quad z = 0 \quad \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Molt. algebrica di $\lambda_i$ è l'esp. di $(\lambda-\lambda_i)$ nella fattorizzazione di $P_A(\lambda)$

$$m.g \leq m.a.$$

Molt. geometrica di $\lambda_i$ è il max numero di autovettori indip. relativi a $\lambda_i$ = dimensione di $\{Ax=\lambda_i x\}$

Es: $X_n = X_{n-1} + X_{n-2}$

$$F: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \qquad F\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ x \end{pmatrix}$$

$$F\begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_2 \end{pmatrix} \qquad F\begin{pmatrix} x_n \\ x_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$F\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{A} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\det(A-\lambda I) = \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} = -\lambda(1-\lambda)-1 = \lambda^2-\lambda-1$$

$$\frac{1\pm\sqrt{1+4}}{2} = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$$

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2} \longrightarrow \begin{pmatrix} \frac{1-\sqrt{5}}{2} & 1 \\ 1 & \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \qquad y = \frac{\sqrt{5}-1}{2}x$$

$$v_+ = \begin{pmatrix} 2 \\ \sqrt{5}-1 \end{pmatrix} \text{ autovett.}$$

$$\frac{1-\sqrt{5}}{2} \longrightarrow \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & 1 \\ 1 & \frac{\sqrt{5}-1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \qquad y = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}x$$

$$v_- = \begin{pmatrix} -2 \\ 1+\sqrt{5} \end{pmatrix} \text{ autovett.}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} x_{10} \\ x_9 \end{pmatrix} = F^9 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_0 \end{pmatrix} = A^9 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_0 \end{pmatrix} = \alpha v_+ + \beta v_- \qquad \lambda_\pm = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$A^9 (\alpha v_+ + \beta v_-) = \alpha \left( A^9 v_+ \right) + \beta \left( A^9 v_- \right) =$$

$$A v_\pm = \lambda_\pm v_\pm \qquad A^n v_\pm = \lambda_\pm^n v_\pm$$

$$= \alpha \lambda_+^9 v_+ + \beta \lambda_-^9 v_-$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ \sqrt{5}-1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -2 \\ \sqrt{5}+1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2(\alpha - \beta) = 1 \\ \sqrt{5}(\alpha+\beta) - (\alpha - \beta) = 1 \end{cases} \qquad \begin{aligned} &\rightsquigarrow \alpha - \beta = \frac{1}{2} = \frac{5}{10} \\ &\rightsquigarrow \alpha + \beta = \frac{3}{2\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{10} \end{aligned}$$

$$\alpha = \frac{5 + 3\sqrt{5}}{20} \qquad \beta = \frac{-5 + 3\sqrt{5}}{20}$$

Non é sempre possibile trovare

$v_1, \dots, v_k$ $\quad k = m.a.(\lambda)$

indip. e autovettori.

Però se ne posso trovare $h < k \Rightarrow$ posso trovare $k$ vettori indip, diviso in $h$ sottoinsiemi

$v_i, w_{i,1}, \dots, w_{i,j_i}$ $\qquad v_i = w_{i,0}$

autovettore $\qquad A w_{i,p} = \lambda w_{i,p} + w_{i,p-1}$

5, 2 $v_1$ : :

$v_2$ :

$$A w_{i,1} = \lambda w_{i,1} + v_i$$

$$A^2 = \lambda^2 w_{i,1} + \lambda v_i + \lambda v_i = \lambda^2 w_{i,1} + 2\lambda v_i$$

$$A^n = \lambda^n w_{i,1} + n\lambda^{n-1} v_i$$

$$\begin{pmatrix} d & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & d \end{pmatrix} \leftarrow$$