Senior 2016 - Misc 2 Advanced (Anér)

Note Title 9/4/2016

DISEGUAGLIANZE FUNZIONALI

① RMM 11/1 | Trovare due funzioni $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tali che $f \circ g$ è crescente e $g \circ f$ è decrescente. (in senso stretto)
(Risolvere lo stesso problema anche su $\mathbb{Z}$)

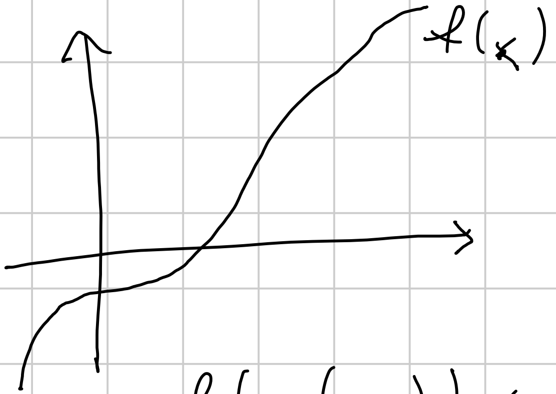
② Trovare le funzioni $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$
t.c. $f(x) \cdot f(y) = 1000 \cdot f(x + y f(x))$
$\forall x, y \in \mathbb{R}^+$

③ Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione. Allora
$\exists x, y \in \mathbb{R}$ t.c. $f(x - f(y)) > y f(x) + x$
(IMO SL 09)

④ $f : \mathbb{N}_{>0} \to \mathbb{N}_{>0}$ $f(m+n) \geq f(m) + f(f(n)) - 1$
$\forall m, n$. Trovare i possibili valori di $f(2007)$ (IMO SL 07)

---

f, g iniettive perché $f(g(x))$ e $g(f(x))$ lo sono
ci accorgiamo che le funzioni continue falliscono



$$f(g(x))$$

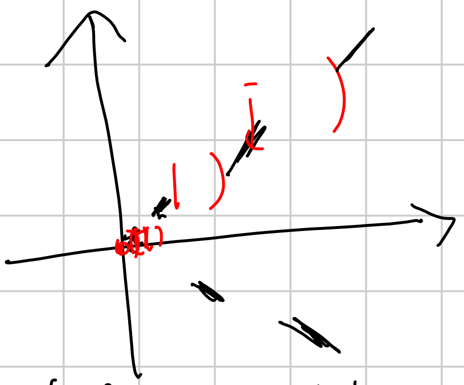
$$f(x_1) < f(x_2) \iff x_1 < x_2$$

$$f(g(x_1)) < f(g(x_2)) \iff g(x_1) < g(x_2)$$

$x_2 > x_1$

$g(f(x))$ $\qquad g(x_1) < g(x_2) \iff x_1 < x_2$

$$g(f(x_1)) < g(f(x_2)) \iff f(x_1) < f(x_2)$$



$$f(x) = (-1)^{\lfloor \log_2 |x| \rfloor + 1} x$$

$$g(x) = (-1)^{\lfloor \log_2 |x| \rfloor} 2x$$

$$f(0) = g(0) = 0$$

$\lfloor \log_2 |x| \rfloor$ pari $\quad f(x) = -x \quad g(f(x)) = -2x$

$\qquad g(x) = 2x \quad f(g(x)) = 2x$

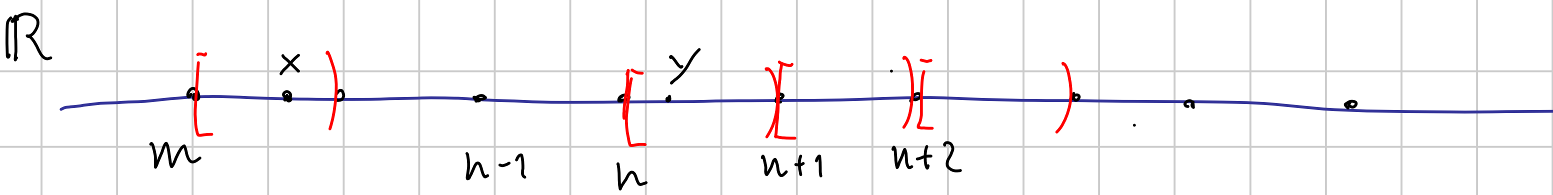
$\lfloor \log_2 |x| \rfloor$ dispari $\quad f(x) = x \quad g(f(x)) = -2x$

$\qquad f(g(x)) = 2x$

$f(g(x)) = 2x \qquad g(f(x)) = -2x$

Stesso problema su $\mathbb{Z}$

Motivazione: Risolto su $\mathbb{Z}$, si può fare anche risolvere su $\mathbb{R}$



Suppongo di avere $\tilde f, \tilde g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ con $\tilde f \circ \tilde g$ cresc. e $\tilde g \circ \tilde f$ decr.

Idea: f mapperà l'intervallo associato a n all'interno dell'int. associato a $\tilde f(n)$

idem per g e $\tilde g$.

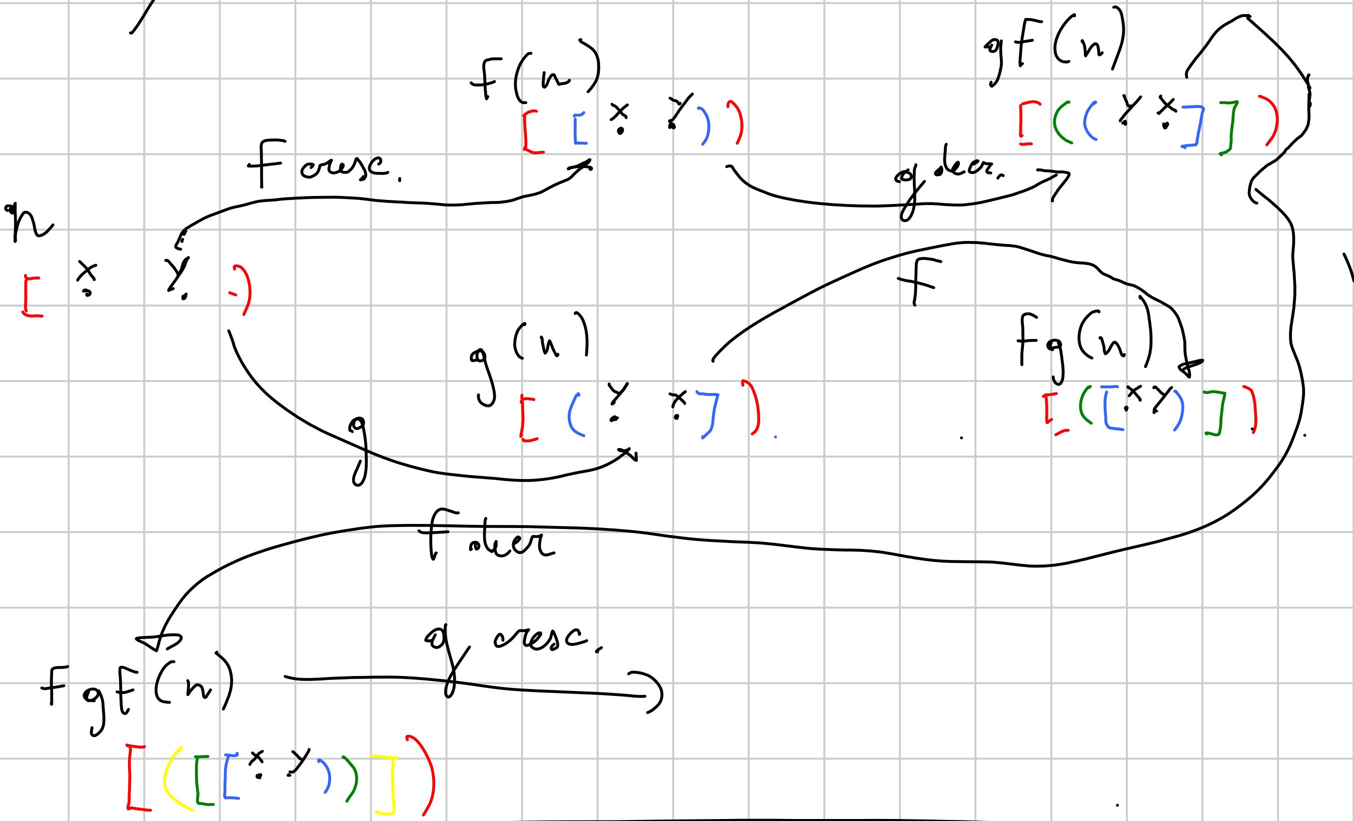
In questo modo, se x è "vicino" a m e y è "vicino" a n, con $m<n$ (anche $x<y$)

$g(f(x))$ è vicino a $\tilde g \tilde f(m)$ e $gf(y)$ è vicino a $\tilde g \tilde f(n)$

quindi, poiché $\tilde g \tilde f(m) > \tilde g \tilde f(n)$, allora

$gf(x) > gf(y)$, che è ciò che vogliamo.

E se x e y sono vicini allo stesso n?



---

(2) Dimostro che $f(x) \geq 1 \quad \forall x > 0$

$$f(x) \cdot f(\cancel{y}) = 1000 \cdot f(x + \cancel{y} f(x))$$

$$\left(\text{Riesco a trovare } x \text{ e } y \text{ per cui } y = x + yF(x)\,? \quad y = \frac{x}{1 - F(x)} \text{ si risolve (in } \mathbb{R}^+) \text{ se } F(x) < 1 \right)$$

Se per assurdo $\exists\, x$ t.c. $F(x) < 1$, trovo y come sopra e semplifico i fattori $\Rightarrow F(x) = 1000$ ma $F(x) < 1$

$x = y$

$$F(x)^2 = 1000 \cdot f\left(x + x\,f(x)\right) \geq 1000$$

$$\forall x > 0 \qquad f(x) \geq \sqrt{1000} = 1000^{\frac{1}{2}}$$

Uso lo stesso argomento

$$f(x)^2 = 1000\, f\left(\ \text{———}\ \right) \geq 1000\sqrt{1000} = 1000^{\frac{3}{2}}$$

$$\forall x > 0 \qquad f(x) \geq 1000^{\frac{3}{4}}$$

$$\vdots$$

$$\forall x > 0 \qquad f(x) \geq 1000^{\frac{7}{8}} \qquad \ldots$$

I numeri $1, \sqrt{1000}, 1000^{\frac{3}{4}}, 1000^{\frac{7}{8}}, 1000^{\frac{15}{16}}, \ldots$ tendono a 1000 e $\forall x > 0$ $f(x) \geq$ tutti questi numeri. Quindi $f(x) \geq 1000$

$$f(x)\underbrace{f(y)}_{\substack{\vee\!\!\mid \\ 1000}} = \underbrace{1000\,f\left(x + y\,f(x)\right)}_{\substack{\vee\!\!\mid \\ f(x)}}$$

$$F(x) \leq F(x + \underbrace{y\,f(x)}_{\uparrow})) \qquad \forall x, y > 0$$

al variare di $y > 0$ è il generico reale positivo

f debolmente crescente.

$$f(x + y\,f(x)) = f(y + x\,F(y)) \qquad \forall x, y > 0 \quad (\text{simmetrizzazione})$$

Se f fosse iniettiva, avrei (con qualche passaggio...) f lineare. Sostituisco ma non funziona.

$\exists\, a < b$ con $f(a) = f(b)$, ma allora f è costante su $[a, b]$

$x = a$

$$\cancel{f(a)}\, f(y) = 1000 \cdot f(\underbrace{a + \cancel{y}\, f(a)}))$$

Se y è tra 0 e $\frac{b-a}{f(a)}$, allora questo numero è $\leq b$

Ottieniamo $f(y) = 1000$ su un intervallo $(0, \varepsilon)$

$$\underset{1000^2}{f(y)^2} = 1000 \cdot \underbrace{f(\underbrace{y + y \cdot 1000})}_{1000}$$

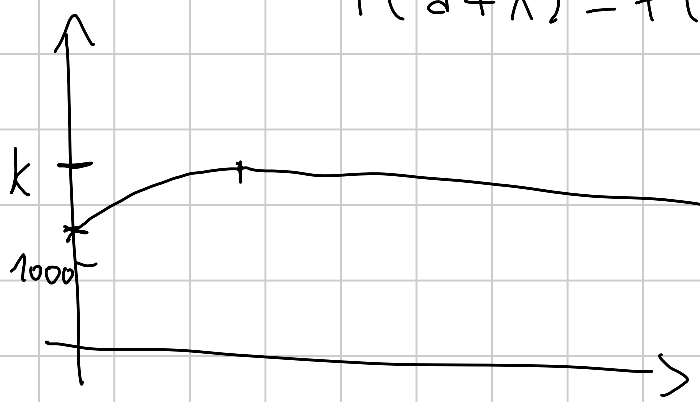
Ma $y \cdot 1001$ è il generico numero in $(0, 1001\,\varepsilon)$

Gonfiate l'intervallo...

$\exists\, a < b : f(a) = f(b)$

$$f(a + \underbrace{y f(a)}_{\lambda}) = \frac{f(a) f(y)}{1000} = \frac{f(b) f(y)}{1000} = f(b + y f(a))$$

$$f(a + \lambda) = f(b + \lambda)$$



$\alpha \in \mathrm{Im} f$
$\beta \in \mathrm{Im} f$
$\frac{\alpha\beta}{1000} \in \mathrm{Im} f$

$\frac{k^2}{1000} > k$

③ Per assurdo, $\forall x, y \in \mathbb{R}$

$$f(x - f(y)) \leq y f(x) + x$$

$\underline{y=0}$ | $f(x - f(0)) \leq x \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) \leq x + f(0)$

Battezziamo $f(0) = a$

$\underline{x = f(y)}$ |

$$\cancel{a} \leq y\, ff(y) + f(y) \leq y\, ff(y) + y + \cancel{a}$$

$$y \cdot (ff(y) + 1) \geq 0 \qquad \forall y \in \mathbb{R}$$

Quindi se $y > 0$ $\boxed{\text{allora } ff(y) \geq -1}$
se $y < 0$ allora $ff(y) \leq -1$

$$\underset{\underset{-1}{\vee\!/}}{ff(y)} \leq f(y) + a \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} f(y) \geq -1-a \\ \text{se } y > 0 \end{array}}$$

$$f(x - f(y)) \leq y f(x) + x$$

Vorrei $x - f(y)$ positivo, ma so che $x - f(y) \geq \underset{\underset{0}{\vee \text{ vorrei}}}{x - y - a}$
(così LHS $\geq -1-a$)

vorrei $y < x - a$

Per y piccolo $(y \to -\infty)$ $\quad -1-a \leq y f(x) + x \Big] \Rightarrow f(x) \leq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$f(\overset{a}{0}) \leq 0$ in particolare ; $f(x) \leq x$

$\underline{x = f(y) + \lambda}$

Se $y \to \infty$ questo rischia di $\to -\infty$

$$f(\lambda) \leq \overbrace{y \cdot f(f(y) + \lambda)} + f(y) + \lambda$$

$f(f(y)+\lambda)$ deve ~~essere~~ "tendere" a 0 (fissato λ, per y grande)

$f(y) + \lambda \leq \lambda$ prendo $\lambda = -1$ e ho finito

$$f(\lambda) \leq y f(f(y) + \lambda) + f(y) + \lambda \leq y(f(y) + \lambda) + 0 + \lambda$$

---

(4) $f(2007)$ $f: N_{>0} \to N_{>0}$

$$f(m+n) \geq f(m) + f(f(n)) - 1$$

$f(n) = \lfloor \lambda n \rfloor$ $\lambda \leq 1$

$\lfloor \lambda m + \lambda n \rfloor \geq \lfloor \lambda m \rfloor + \lfloor \lambda \lfloor \lambda n \rfloor \rfloor - 1$

$\lambda n \leq n$

$\lfloor \lambda n \rfloor \leq n$

$\lfloor \lambda m + \lambda n \rfloor \geq \lfloor \lambda m \rfloor + \lfloor \lambda n \rfloor$

$\lceil \lambda m + \lambda n \rceil \geq \lceil \lambda m \rceil + \lceil \lambda n \rceil - 1$

$\lfloor \alpha + \beta \rfloor \geq 0$

$f(2007) = \lfloor \lambda 2007 \rfloor$

$a + \alpha = \lambda m$

$b + \beta = \lambda n$

$\lceil \alpha + \beta \rceil \geq 1 + 1 - 1$

$f(m+1) \geq f(m) + f(f(1)) - 1 \geq f(m)$

$f(n) = n + k$

$\cancel{f(n+k)} \geq f(k) + \cancel{f(n+k)} - 1$

$1 \geq f(k)$

$f(k) = 1$

$f(n) = n + k$

$$f(n+n) \ge f(n) + f(n+k) - 1 \ge 2f(n) - 1 \ge 2n + 2k - 1$$

$2k - 1 > k$ se $k \ge 2$

$$f(n) = \begin{cases} n & \text{se } 2007 \nmid n \\ n+1 & \text{se } 2007 \mid n \end{cases}$$

$$f(m+n) \ge f(m) + f(f(n)) - 1$$

$$m+n+1 \ge m+n+1$$

Ricerca degli esempi

$$f(m+n) \ge f(m) + ff(n) - 1$$

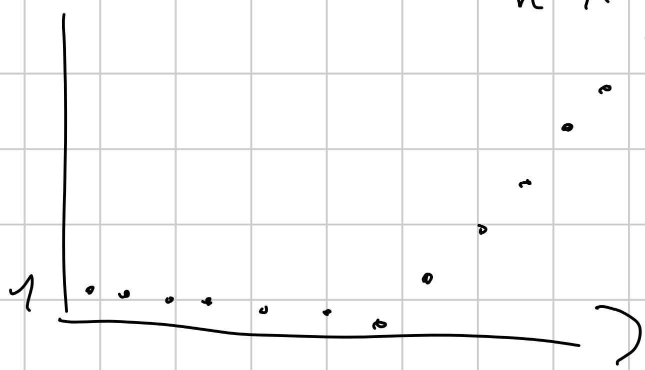
$f(n) = n$ soddisfa

Quando $f(n) = n + k$ funziona?

$$\cancel{m} + \cancel{n} + \cancel{k} \ge \cancel{m} + \cancel{k} + \cancel{n} + 2k - 1$$

$2k \le 1$ va bene qualsiasi $k < 0$ (in linea di principio)

$n-k$ per n grande



prendo $f(n) = \max\{n-k, 1\}$

$$f(m+n) \overset{?}{\geq} f(m) + ff(n) - 1$$

oss f è deb. crescente, quindi se $ff(n) = 1$

allora $f(m+n) \geq f(m)$

Se $f(m) = 1$ allora $f(m+n) \geq ff(n)$ comunque

(verificare ...)

Per $f(2007) = 2008$ va bene anche

$$f(n) = n + 1\!\!1_{3|n}$$