A2 - Basic Tess

Note Title 9/4/2016

Disuguaglianze

Es: ① mostrare che $\forall\, a,b,c \in \mathbb{R}$ si ha
$$a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca$$

② mostrare che $\forall\, a,b,c>0$ [Nesbitt] si ha
$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$$

③ $\forall\, a,b,c>0$ si ha [IMO 2001-2]
$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}} \geq 1$$

④ $\forall\, a,b,c>0$ t.c. $abc=1$ si ha
$$\frac{1}{a+b+1}+\frac{1}{b+c+1}+\frac{1}{c+a+1} \leq 1$$
[Canada 1997]

Notazione: somme cicliche e simmetriche

es: $$\sum_{cyc} \frac{1}{a+b+1} = \frac{1}{a+b+1}+\frac{1}{b+c+1}+\frac{1}{c+a+1}$$
↳ sottintendo su a,b,c

$$\sum_{sym} a^2b = a^2b + b^2c + c^2a + a^2c + b^2a + c^2b$$

↳ sottintendo su a, b, c

$$\sum_{sym} ab = ab + bc + ca + ac + ba + cb = 2\sum_{cyc} ab$$

es: 1 $\quad \sum_c a^2 \geq \sum_c ab$

Bernoulli: $(1+x)^n \geq 1+nx \quad \forall\, x > -1 \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$

$(1+x)^n \geq 1+nx+\binom{n}{2}x^2 \quad \forall\, x \geq 0 \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$

(invece $\leq$ se $x \in (-1, 0)$)

$(1+x)^r \geq 1+rx \quad \forall\, x > -1, \ \forall\, r \geq 1$

(invece $\leq$ se $r \in (0,1)$)

Molte disuguaglianze discendono da

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad x^2 \geq 0$$

di conseguenza $\quad x^2+y^2 \geq 0$

$$\sum_{i=0}^{n} x_i^2 \geq 0 \qquad [S.O.S.]$$

1 prendete $x = a-b \quad y = b-c \quad z = c-a$

$$\sum_c (a-b)^2 \geq 0$$

$$\sum_c a^2 - 2ab + b^2 \geq 0$$

$$\sum_c 2a^2 - 2ab \geq 0$$

$$\sum_c a^2 \geq \sum_c ab$$

C'è un caso di uguaglianza:

quando $x_0 = x_1 = \ldots = x_n = 0$

$$a^2 + b^2 \geq 2ab \qquad (x_0 = a-b, \text{ vera})$$

non ha senso prendere $x_0 = a-2b$
$x_1 = \ldots$
$\vdots$

$\rightarrow$ infatti non torna l'uguaglianza

Serve l'= se $a=b$

se volete usare $(a-2b)^2 \geq 0$

non può funzionare perché

$a=b \Rightarrow (a-2b)^2 \not> 0$

AM - GM $\quad \forall a,b>0$ si ha $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$

vera per $(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geq 0$

in generale $a_1, \dots, a_n > 0$

$$AM = \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{n}$$

vale $AM \geq GM$

$$GM = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} a_i}$$

$$\frac{\sum a_i}{n} \geq \sqrt[n]{\prod a_i}$$

Si dimostra per induzione su n

P. B. $\quad n=2$

P. I. $\quad$ i) $n \Rightarrow 2n$

ii) $n+1 \Rightarrow n$

i) $$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{n} \geq \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} a_i}$$ (la so)

$$\sum_{i=1}^{2n} \frac{a_i}{2n} \geq \sqrt[2n]{\prod_{i=1}^{2n} a_i}$$ (vorrei mostrare)

$$A = \left(\frac{\frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{n} + \frac{\sum_{i=n+1}^{2n} a_i}{n}}{2} \right) = B$$

$$\sqrt{\underbrace{\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} a_i}}_{C \leq} \; \underbrace{\sqrt[n]{\prod_{i=n+1}^{2n} a_i}}_{\leq D}}$$

voglio mostrare che $\frac{A+B}{2} \geq \sqrt{CD}$

$$\frac{A+B}{2} \geq \sqrt{AB} \qquad A \geq C \qquad B \geq D$$

$\geq$ p. B. $\qquad$ $A \geq C$ ip. ind. $\qquad$ $B \geq D$ ip. ind.

ii) $n+1 \Rightarrow n$

ipotesi $$\frac{\sum_{i=1}^{n+1} a_i}{n+1} \geq \sqrt[n+1]{\prod_{i=1}^{n+1} a_i}$$

pongo $a_{n+1} = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} a_i} =: G$

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{n} =: A \qquad \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} a_i} =: P$$

$$\frac{nA+G}{n+1} \geq \sqrt[n+1]{P^n G} \qquad \text{ma } P = G$$

$$\frac{nA+G}{n+1} \geq G$$

$$A \geq G$$

$$\underbrace{a^3}+\underbrace{b^3} \geq a^2b + b^2a$$

$$\frac{a^3+a^3+b^3}{3} \geq \sqrt[3]{a^6b^3} = a^2b$$

vale anche l'altra, sommando ho la tesi

$$(1+x)^n \geq \frac{n^n}{(n-1)^{(n-1)}}x \qquad \forall\ x>0$$

$$1+x \geq n\sqrt[n]{\frac{x}{(n-1)^{n-1}}}$$

$$\frac{1+x}{n} \geq \sqrt[n]{\frac{x}{(n-1)^{n-1}}}$$

vale per AM-GM su $\Big(\underbrace{\frac{1}{n-1}, \frac{1}{n-1}, \dots, \frac{1}{n-1}}_{n-1 \text{ volte}}, x\Big)$

Test iniziale n° 1

$$\begin{cases} x^4yz=1 \\ x(x+2y)(x+3z)=a \end{cases}$$

quando ho unica sol. con $x, y, z > 0$?

Sol: svolgendo il prodotto ottengo

$$x^3 + 2x^2y + 3x^2z + 6xyz = a$$

$$\frac{x^3 + 6xyz}{2} \geq \sqrt{x^4yz \cdot 6} = \sqrt{6}$$

$$\frac{2x^2y + 3x^2z}{2} \geq \sqrt{x^4yz6} = \sqrt{6}$$

$\Rightarrow \quad a \geq 2\sqrt{6}$, l'= solo con $x^3 = 6xyz$
$2x^2y = 3x^2z$

$\Rightarrow \exists!$ terna

Bunching se $a, b, c \geq 0$

e $n_1 \geq m_1 \geq r_1$ sono interi tali che
$n_2 \geq m_2 \geq r_2$,,

$$n_1 \geq n_2$$
$$n_1 + m_1 \geq n_2 + m_2$$
$$n_1 + m_1 + r_1 = n_2 + m_2 + r_2$$

e.s. $2 \geq 0 \geq 0$
$1 \geq 1 \geq 0$

allora $$\sum_{sym} a^{n_1} b^{m_1} c^{r_1} \geq \sum_{sym} a^{n_2} b^{m_2} c^{r_2}$$

1 $$\sum_{sym} a^2 \geq \sum_{sym} ab$$

Bunching in n variabili

supponete di avere reali $t_1 \geq t_2 \dots \geq t_n$
$s_1 \geq s_2 \dots \geq s_n$

tali che
$$t_1 \geq s_1$$
$$t_1 + t_2 \geq s_1 + s_2$$
$$\vdots$$
$$t_1 + \dots + t_{n-1} \geq s_1 + \dots + s_{n-1}$$
$$t_1 + \dots + t_n = s_1 + \dots + s_n$$

Allora
$$\sum_{sym} x_1^{t_1} \cdot \dots \cdot x_n^{t_n} \geq \sum_{sym} x_1^{s_1} \cdot \dots \cdot x_n^{s_n}$$
$\forall\, x_1, \dots, x_n > 0$

Es: $\sum_{c} a^4 b \geq \sum_{c} a^2 b^2 c \quad \forall\, a, b, c > 0$

L'uguaglianza del Bunching si ha solo quando $x_1 = \dots = x_n$ (se gli esponenti sono diversi)

Un termine (in a,b,c) si dice omogeneo di grado $\alpha \in \mathbb{R}$

se $f(\lambda a, \lambda b, \lambda c) = \lambda^\alpha f(a,b,c)$

$(\forall \lambda > 0)$

Es: 1 i termini sono omogenei di grado 2

2, 3 sono omogenei di grado 0

Es: Test Iniziale 2 disug. 2:

a SX era omog. di grado 4

a DX " 6

se ponete $x=y=z$

a SX $C_1 x^4 \le C \cdot C_2 x^6$

$\rightarrow$ non può essere vera per ogni $x>0$

se scegliete $x \ll 1$ non può essere vera

4 non c'è l'omogeneità

$$\sum_c \frac{1}{a+b+\boxed{1}} \le 1$$ con $abc=1$

per renderla omogenea sostituite $\boxed{}$ $\sqrt[3]{abc}$

$$\sum_{c} \frac{1}{a+b+\sqrt[3]{abc}} \leq 1 = \frac{1}{\sqrt[3]{abc}}$$

volendo sostituite $x = \sqrt[3]{a}$ e cyc

$$\Rightarrow \sum_{c} \frac{1}{x^3+y^3+xyz} \leq \frac{1}{xyz}$$

Si risolve con Bunching, dopo aver tolto i denominatori

Cauchy-Schwarz

per gli amici C-S

Se $x_1, \dots, x_n$; $y_1, \dots, y_n$ sono reali

allora $\left(\sum_i x_i^2\right)\left(\sum_i y_i^2\right) \geq \left(\sum_i x_i y_i\right)^2$

(volendo $\sqrt{\sum x_i^2}\sqrt{\sum y_i^2} \geq \sum_i x_i y_i$)

sia $t \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow$

$(x_1+ty_1)^2 \geq 0$, ... $(x_i+ty_i)^2 \geq 0$

$\sum_i (x_i+ty_i)^2 \geq 0$ è polinomio di grado 2

$\Rightarrow \quad \Delta \leq 0$

$$\Delta = \left(2\sum_i x_i y_i\right)^2 - 4\left(\sum_i x_i^2\right)\left(\sum_i y_i^2\right)$$

① $x_1 = a, \; x_2 = b, \; x_3 = c$

$y_1 = b, \; y_2 = c, \; y_3 = a$

C-S: $\left(\sum_c a^2\right)^2 \geq \left(\sum_c ab\right)^2$

Scegliendo $y_i = 1 \;\; \forall i$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) n \geq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2$$

$$\sqrt{\frac{\sum_i x_i^2}{n}} \geq \frac{\sum_i x_i}{n}$$

QM AM QM-AM

① $x_1 = a, \; x_2 = b, \; x_3 = c$ $\quad \sqrt{\frac{\sum a^2}{3}} \geq \frac{\sum a}{3}$

$$3\sum_{cyc} a^2 \geq \left(\sum_{cyc} a\right)^2 = \sum_{cyc} a^2 + 2\sum_{cyc} ab$$

Lemma di Titu: se $x_1, \dots, x_n > 0$
$y_1, \dots, y_n > 0$

allora $$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^2}{y_i} \geq \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}{\sum_{i=1}^{n} y_i}$$

Dim: $$\left(\sum_i \frac{x_i^2}{y_i}\right)\left(\sum_i y_i\right) \geq \left(\sum_i x_i\right)^2$$

vera per C-S su $\left(\frac{x_1}{\sqrt{y_1}}, \dots, \frac{x_n}{\sqrt{y_n}}\right)$

e su $(\sqrt{y_1}, \dots, \sqrt{y_n})$

2 $$\sum_{cyc} \frac{a}{b+c} \geq \frac{3}{2}$$

titu su $\sqrt{a}$ e cyc

e $b+c$

$$\Rightarrow \sum_{cyc} \frac{a}{b+c} \geq \frac{\left(\sum_{cyc} \sqrt{a}\right)^2}{\sum_{cyc} b+c}$$

hope!

$$\left(\sum_{cyc} \sqrt{a}\right)^2 \geq \frac{3}{2} \sum_{cyc} b+c$$

$$\Updownarrow$$

$$\sum_{cyc} a + 2\sum_{cyc} \sqrt{ab} \geq 3 \sum_{cyc} a$$

$$\Updownarrow$$

$$\Downarrow$$

$$\sum_{cyc} \sqrt{ab} \geq \sum_{cyc} a$$ È la (1) al contrario!

$x = \sqrt{a}$ ecc.

$$\Updownarrow$$

$$\sum_c xy \geq \sum_c x^2$$ falso!

Il problema si fa così:

$$\sum_c \frac{a}{b+c} = \sum_c \frac{a^2}{ab+ac}$$

hope!

$$\text{titu} \geq \frac{\left(\sum_c a\right)^2}{\sum_c ab+ac} \geq \frac{3}{2}$$

$$\left(\sum_c a\right)^2 \geq 3\sum_c ab$$

$$\sum_c a^2 \geq \sum_c ab$$ è vera! :)

(3) $\displaystyle\sum_{c} \frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}} \geq 1$ $\quad$ $(a,b,c>0$

$$\sum_{c} \frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}} = \sum_{c} \frac{a^2}{a\sqrt{a^2+8bc}}$$

$$\text{titu} \geq \frac{\left(\sum_c a\right)^2}{\sum_c a\sqrt{a^2+8bc}} \overset{\text{hope!}}{\geq} 1$$

mi rimane

$$\left(\sum_c a\right)^2 \geq \underbrace{\sum_c a\sqrt{a^2+8bc}}$$

$$\text{C-S} \leq \sqrt{\sum a^2}\cdot\sqrt{\sum a^2+8bc}$$

$(a,b,c)\ (\sqrt{\ \ },\sqrt{\ \ },\sqrt{\ \ })$

C-S 2°

$(\sqrt{a},\sqrt{b},\sqrt{c})\ (\sqrt{a}\sqrt{\ \ },\sqrt{b}\sqrt{\ \ },\sqrt{c}\sqrt{\ \ })$

$$\leq \sqrt{\sum a}\cdot\sqrt{\sum a^3+8abc}$$

basta che $\displaystyle\left(\sum_c a\right)^{\frac{3}{2}} \geq \sqrt{\sum_c a^3+8abc}$

l'ultima speranza

elevando al quadrato

$$\left(\sum_c a\right)^3 \geq \sum_c a^3 + 24abc$$

$$\cancel{\sum_c a^3} + 3\sum_s a^2 b + \cancel{6abc} \geq \cancel{\sum_c a^3} + \cancel{24}^{18} abc$$

AM-GM su a^2b, e sym

$$\frac{\sum_s a^2 b}{6} \geq \sqrt[6]{a^6 b^6 c^6} = abc$$

Esercizi 85, 88, 4 [hint: AM-GM pesata saggiamente]

- $\sum_{i=1}^n x_i = 1$; $x_i > 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} \geq n^2$
- $a,b,c>0$; $\sum_{cyc} \frac{a+b}{c} \geq 6$
- $\sum_c a^4 b \geq \sum_c a^2 b^2 c$
- $x_i > 0$, $x_2 \cdot \ldots \cdot x_n = 1 \Rightarrow (1+x_2)^2 \cdot \ldots \cdot (1+x_n)^n > n^n$ [IMO 2012 2]

  [hint: usare fatto visto a lezione]
- $\forall r \geq 0$, $\forall x,y,z$ $\sum_c x^r(x-y)(x-z) \geq 0$ [Schur]

Altri!

- $\sum_{sym} a^3 + \sum_{sym} abc \geq 2\sum_{sym} a^2 b$ [Schur]

  [hint: usare l'esercizio prec.]

- $\sum_c (x+y)\sqrt{(y+z)(z+x)} \geq 4\sum_c xy$ [BMO2012-2]

[hint: usare la sostituzione $a=y+z$ e cyc]
e l'esercizio prec.

Correzione

85: 3° $\left(\sum_c a\right)\left(\sum_c a^2-ab\right) =$

$$\left(\sum_c a\right)\left(\sum_c a^2\right) - \left(\sum_c a\right)\left(\sum_c ab\right) =$$

$a+b+c$

check:
grado
termini
= sostituire 1

$$\sum_c a^2(a+b+c) - \sum_c ab(a+b+c) =$$

$$\sum_c a^3 + \cancel{\sum_s a^2b} - \cancel{\sum_s a^2b} - 3abc =$$

$$\sum_c a^3 - 3abc = \frac{1}{2}\sum_s a^3 - \frac{1}{2}\sum_s abc$$

volendo avere $a^3+b^3+c^3 \geq 3abc$
dimostrato che

6° $\left(\sum_c a^2b\right)\left(\sum_c a^2c\right) =$

$$\sum_c a^2c\left(a^2b+b^2c+c^2a\right) =$$

$$\sum_c a^4bc + \sum_c a^2b^2c^2 + \sum_c a^3c^3 =$$

$$\frac{1}{2}\sum_s \left(a^4bc + a^2b^2c^2 + a^3c^3\right)$$

88 $\min\{x+2y+3z : x^3y^2z=1\}$

$$x+2y+3z \geq C\left(x^3y^2z\right)^{\alpha}$$

$\leftarrow$ l'esponente lo trovo per omogeneità

$\rightarrow \alpha = \frac{1}{6}$

AM-GM
$$\frac{\frac{x}{3}+\frac{x}{3}+\frac{x}{3}+y+y+3z}{6} \geq \sqrt[6]{\frac{x^3y^2z}{9}}$$

$$C = \frac{6}{\sqrt[6]{9}}, \quad \overbrace{\frac{x}{3}=y=3z}^{r} \text{ mi dà } r =$$

r è t.c. $r^3 \cdot 27 \cdot r^2 \cdot \frac{r}{3} = 1$

$$r = \sqrt[6]{9^{-1}} = 3^{-\frac{1}{3}}$$

– se $\sum x_i = 1 \Rightarrow \sum \frac{1}{x_i} \geq n^2$

C-S $\left(\sqrt{x_i}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{x_i}}\right)$

$$\left(\sum x_i\right)\left(\sum \frac{1}{x_i}\right) \geq \left(\sum 1\right)^2 = n^2$$

AM-GM
$$\frac{\sum x_i}{n} \geq G = \sqrt[n]{\prod x_i}$$

$$\frac{\sum \frac{1}{x_i}}{n} \geq \frac{1}{G}$$

da cui, moltiplicando membro a membro ho l'=

per casa usare C-S per mostrare AM $\geq$ HM

$$\left(HM = \left(\frac{\sum \frac{1}{x_i}}{n} \right)^{-1} = \left(\frac{\sum x_i^{-1}}{n} \right)^{-1} \right)$$

usare AM-GM per mostrare

$$AM \geq GM \geq HM$$

$$\sum_c \frac{a+b}{c} \geq 6$$

$$\boxed{\frac{a}{c}} + \boxed{\frac{b}{c}} + \boxed{\frac{c}{b}} + \boxed{\frac{a}{b}} + \boxed{\frac{b}{a}} + \boxed{\frac{c}{a}} \geq 6$$

AM-GM (volendo su 3 coppie)

volendo $\sum_s a^2 b \geq 6abc$ (se moltiplicate i denominatori)

per fare la 2 potevate sostituire

$a+b=z$ e cyc da cui

$$\sum_c \frac{a}{b+c} = \sum_c \frac{\frac{y+z-x}{2}}{x} = \frac{1}{2} \sum_c \frac{y+z}{x} - \frac{3}{2}$$

da cui $\sum_c \frac{a}{b+c} \geq \frac{3}{2} \rightarrow \sum_c \frac{y+z}{x} \geq 6$

$$\sum_c a^4 b \geq \sum_c a^2 b^2 c$$

$$a^4b + b^4c + c^4a \geq a^2b^2c^1 + \_\ \_$$

$$\frac{A\frac{a^4b}{A} + B\frac{b^4c}{B} + C\frac{c^4a}{C}}{A+B+C} \underset{\text{AM-GM}}{\geq} \sqrt[A+B+C]{\frac{a^{4A+C}\, b^{4B+A}\, c^{4C+B}}{A^A\, B^B\, C^C}}$$

per la a: $\frac{4A+C}{A+B+C} = 2$, $4A+C = 2A+2B+2C$

b: $4B+A = 2A+2B+2C$

c: $4C+A = A+B+C$

$\rightarrow$ si arriva a $A=6$, $B=5$, $C=2$

IMO 2012 - 2

$$(1+x)^n \geq \frac{n^n}{(n-1)^{n-1}}x \quad \leftarrow \text{visto a lezione}$$

$$(1+x_2)^2 \geq \frac{2^2}{1}x_2 \quad \leftarrow x = x_2,\ n=2$$

(*) $\vdots$

$$(1+x_n)^n \geq \frac{n^n}{(n-1)^{n-1}}x_n \quad \leftarrow x = x_n,\ n=n$$

$$(1+x_2)^2 \cdot \ldots \cdot (1+x_n)^n \geq \frac{\cancel{2^2}}{1} \cdot \frac{\cancel{3^3}}{\cancel{2^2}} \cdot \ldots \cdot \frac{n^n}{\cancel{(n-1)^{(n-1)}}} \underbrace{x_2 \cdot \ldots \cdot x_n}_{=1}$$

il $>$ stretto si ottiene mostrando che le (*) non possono avere l'$=$ tutte insieme