A3 Basic Tess

Note Title 9/5/2016

Successioni (per ricorrenza)

Equazioni funzionali

Def: una funzione è una legge tra A e B tale che

insiemi

$\forall a \in A$ associo 1 solo elemento di B

Esempi: $f: A \to B$

$a \mapsto b$ con b fissato, $\forall a \in A$

$Id: A \to A$

$a \mapsto a$

Una trasformazione geometrica del piano è una funzione dal piano al piano

($A = B =$ piano)

Una terna, una n-upla è una funzione

↳ di reali è $f: \{1, 2, 3\} \to \mathbb{R}$

n-upla: $f: \{1, \ldots, n\} \to \mathbb{R}$

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ci sono esempi che non si scrivono e non si disegnano.

Successioni

una successione è una funzione

$$a: \mathbb{N} \to B$$

$$a(0);\ a(1);\ \ldots$$

$$\updownarrow \qquad \updownarrow \qquad \updownarrow$$

$$a_0;\ a_1;\ a_2 \ldots$$

Una successione di reali è $a: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$

Posso definire una successione "ricorsivamente"

Es
$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_{n+1} = 2a_n + 1 \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Es
$$\begin{cases} a_0 = 0;\ a_1 = 1 \\ a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Esempi

$$a_{n+k} = 5a_{n+k-1} + \ldots + 8a_n$$

$$a_{n+2} = a_n + a_{n-1} + \ldots + a_0 + 1$$

$$a_{n+1} = 2a_n^2 - 1$$

Se $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\quad a_{n+1} = f(a_n)$

Se $f: \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$, $\quad a_{n+k} = f(a_{n+k-1}, \dots, a_n)$

$f: \mathbb{R}^k \times \mathbb{N} \to \mathbb{R} \quad a_{n+k} = f(a_{n+k-1}, \dots, a_n, n)$

$$f(x,n) = x+n$$

$\hookrightarrow a_{n+1} = a_n + n$

Se f non dipende da n

si dice che è lineare se

$$\begin{cases} f(x+y) = f(x) + f(y) & \forall x,y \in \mathbb{R} \\ f(\lambda x) = \lambda f(x) & \forall \lambda \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$\leftrightarrow$ ho solo $f(x) = k \cdot x$

$$\begin{cases} f(x_1+y_1, \dots, x_n+y_n) = f(x_1, \dots, x_n) + f(y_1, \dots, y_n) \\ f(\lambda x_1, \dots, \lambda x_n) = \lambda f(x_1, \dots, x_n) \end{cases}$$

$\forall \lambda, x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n \in \mathbb{R}$

$\hookrightarrow$ ho solo $f(x_1, \dots, x_n) = k_1 x_1 + \dots + k_n x_n$

per $k_1, \dots, k_n$ fissate e costanti

$f(x) = kx \quad (k \text{ costante, es } k=2)$

$= 2x$

$$\begin{cases} a_0 = \dots \\ a_{n+1} = 2a_n \end{cases} \longrightarrow a_n = 2^n a_0 = 2^n \dots$$

$f(x) = 2x+1$

$a_{n+1} = 2a_n + 1$

Suppongo di avere $a_0, a_1, \dots$
$b_0, b_1, \dots$

successioni che soddisfano $x_{n+1} = 2x_n + 1$

sia $c_n = a_n - b_n \quad \forall n$

$$c_{n+1} = a_{n+1} - b_{n+1} = 2(a_n - b_n) + 1 - 1$$
$$= 2c_n$$

quindi c_n soddisfa una ricorrenza lineare

$\Rightarrow c_n = 2^n c_0$

$(*)\ a_n = 2^n c_0 + b_n$

Oss: se so calcolare la a_n per un solo termine iniziale, allora lo so fare per tutti
infatti:

se so b_0 ($\to$ ottengo b_n)

e voglio calcolarla per a_0

$a_0 = c_0 + b_0$ $\to$ se sapete a_0, b_0
sapete c_0
$\to$ sapete $a_n = 2^n c_0 + b_n$

Cerco una soluzione costante, c

$$c = 2c + 1 \implies c = -1$$

$\implies$ tutte le successioni che soddisfano f

sono della forma $a_n = 2^n \cdot k - 1$

se so a_0, pongo $n=0$ $\quad a_0 = k - 1 \implies k = a_0 + 1$

Un altro modo:

$$a_{n+1} = 2a_n + 1$$

$$c_n := a_n + C$$

che successione soddisfa la c_n?

$\to$ $c_{n+1} - C = 2c_n - 2C + 1$

$$c_{n+1} = 2c_n - C + 1$$

se scelgo $C=1$, $c_{n+1}=2c_n$

— o —

$f(x,n)=2x+n$

$a_{n+1}=2a_n+n \quad \circledast$

se (a_n) e (b_n) soddisfano $\circledast$

allora a_n-b_n soddisfa $f(x)=2x$

Una costante non torna:

$C=2C+n \quad \forall n$ impossibile

Scelgo $Cn+D$

$C(n+1)+D=2Cn+2D+n$

$(-1-C)n+(C-D)=0$

$\Rightarrow C=D, \; C=-1$

scegliendo $-n-1$

la generica ricorsione sarà $a_n=\overbrace{2^n\cdot K}^{\text{differenza}}\underbrace{-n-1}_{\text{una sol. particolare}}$

Lo stesso trucco funziona con

$$f(x, n) = Cx + g(n)$$

$$\propto \frac{1}{1+\sqrt{n^2+1}}$$

se a_n e b_n soddisfano $f(x,n)$

allora $a_n - b_n$ soddisfa $x_{n+1} = Cx_n$

$$a_{n+1} = Ca_n + g(n)$$

$$b_{n+1} = Cb_n + g(n)$$

$$a_{n+1} - b_{n+1} = C(a_n - b_n)$$

In generale la soluzione sarà $a_n = C^n \cdot k + b_n$

con b_n che conosco

Provìamo con 2 termini

$$x_{n+2} = 4x_{n+1} - 3x_n$$

Oss: se (a_n) e (b_n) soddisfano

anche $(a_n + b_n)$ soddisfa

anche (λa_n) soddisfa

Cerchiamo soluzioni del tipo $x_n = c^n$

come deve essere c?

$$c^{n+2} = 4c^{n+1} - 3c^n \quad , \quad c=0 \text{ oppure}$$

$$c^2 = 4c - 3 \quad \Rightarrow c=1 \quad c=3$$

Tutte le successioni $a_n = \lambda \cdot 1^n + \mu \cdot 3^n$

$(\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R})$ soddisfano la ricorsione

λ e μ li trovo impostando l'uguaglianza per $n=0,1$

devono essere noti $\begin{cases} a_0 = \lambda + \mu \\ a_1 = \lambda + 3\mu \end{cases}$

Es: Fibonacci

$$x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$$

le soluzione particolari soddisfano

$$c^2 = c+1 \qquad c^2 - c - 1 = 0$$

[il polinomio $t^2 - t - 1$ è il "polinomio caratteristico della ricorrenza"]

$$C = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$F_n = \lambda \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \mu \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

dove λ e μ soddisfano

$$0 = F_0 = \lambda + \mu$$
$$1 = F_1 = \lambda \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + \mu \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$$

Es: $X_0 = 0$
$X_1 = 1$
$X_{n+2} = X_{n+1} - X_n$

Equazioni funzionali

Trovare tutte le

1. $f(x+y) = f(x) + f(y) \quad \forall x,y \in \mathbb{Q}$ $\qquad f: \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$

2. $f(x + f(y)) = f(x) + y \quad \forall x,y \in \mathbb{Q}$ $\qquad f: \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$

3. $f(f(x)^2 y) = x^3 f(xy) \quad \forall x,y \in \mathbb{Q}^+$ $\qquad f: \mathbb{Q}^+ \to \mathbb{Q}^+$

4. $f(x f(x) + f(y)) = f(x)^2 + y \quad \forall x,y \in \mathbb{R}$ $\qquad f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

② $x=0$, $y=0$

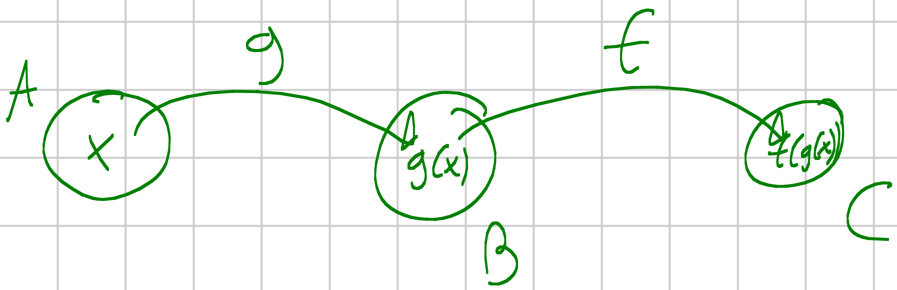
$f(f(0))=f(0)$, quindi se $c=f(0)$, $f(c)=c$

$x=0$

$f(f(y))=c+y \quad \forall y \in \mathbb{Q}$

Oss. generale: se $f(g(x))$ è suriettiva

$\Rightarrow$ f è suriettiva



se $f(g(x))$ è iniettiva, g lo è

$\Rightarrow$ f è iniettiva e suriettiva

per la suriettività $\exists \; x_0 \mapsto 0$
t.c. $f(x_0)=0$

$y=x_0 \Rightarrow$

$\forall x \quad f(x)=f(x)+x_0 \Rightarrow x_0=0$

$\forall x \quad f(f(x))=x \quad$ (perché $c=0$)

sostituisco $y = f(z)$ in 2

ottengo $f(x + f(f(z))) = f(x) + f(z)$

$\Rightarrow f(x+z) = f(x) + f(z)$

$\Rightarrow$ 1 allora voglio risolverla

1 $f(x+y) = f(x) + f(y) \quad \forall\, x, y \in \mathbb{Q}$

$x=0, y=0 \Rightarrow f(0) = 2f(0) \Rightarrow f(0) = 0$

$x=1, y=1 \qquad f(2) = 2f(1)$

$x=2, y=1 \qquad f(3) = f(2) + f(1) = 3f(1)$

per induzione voglio vedere se $f(n) = nf(1) \ \forall n \in \mathbb{N}$

$x = n-1, y=1 \Rightarrow f(n) = f(n-1) + f(1)$ ← testo

$\overset{|}{=} (n-1)f(1) + f(1)$ ← ip. indutt.

$\overset{|}{=} nf(1)$

$y = -x \Rightarrow f(0) = 0 = f(x) + f(-x) \quad \forall\, x \in \mathbb{Q}$

$\Rightarrow f(-x) = -f(x)$

$\frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n} = 1$

Mostro per induzione che

$$f(nx) = n f(x) \quad \forall\ n \in \mathbb{N}$$

P.B. $n=1$ è ovvio

P.I. $y = (n-1)x \Rightarrow$

$$f(nx) = f((n-1)x) + f(x) \leftarrow \text{testo}$$
$$= n f(x) \leftarrow \text{ip. indutt.}$$

Ponendo $x = \frac{m}{n} \Rightarrow f(m) = n f\left(\frac{m}{n}\right)$

$$\Rightarrow f\left(\frac{m}{n}\right) = \frac{m f(1)}{n}$$

$$\Rightarrow f(x) = x f(1) \quad \forall\ x \in \mathbb{Q}$$

se f soddisfa è della forma $f(x) = \lambda x$ $\lambda \in \mathbb{Q}$

Sostituendo nel testo ottengo

$$\lambda(x+y) = \lambda x + \lambda y \quad \text{che è vera } \forall\ \lambda, x, y \in \mathbb{Q}$$

La 1 si chiama Equazione di Cauchy

Attenzione: se cercate $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ t.c.

f soddisfi la 1 è vero che $f(x) = \lambda x$

funziona $\forall\ \lambda \in \mathbb{R}$ $\boxed{\text{ma}}$ non sono le uniche!

(4) $x = 0$ $\quad f(f(y)) = \underbrace{f(0)^2 + y}_{\text{surj + inj}} \quad \forall y \in \mathbb{R}$ $\circledast$

$\Rightarrow$ surj inj

sia x_0 : $f(x_0) = 0$

pongo $x = x_0$ e ottengo $f(f(y)) \overset{\circledast}{=} y \quad \forall y \in \mathbb{R}$

che insieme a $\circledast$ $\quad f(0) = 0 \quad \Rightarrow x_0 = 0$ per inj

pongo $x = f(z)$ ← uso una nuova variabile

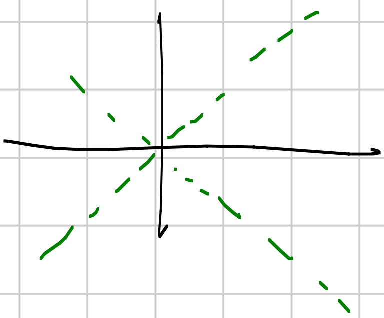
$$f(f(z)f(f(z)) + f(y)) = f(f(z))^2 + y \quad \forall z, y$$

$$\circledast \Rightarrow \quad f(f(z)z + f(y)) = z^2 + y \quad \forall z, y$$

$$(4) \Rightarrow \quad f(z)^2 + y = z^2 + y \quad \forall y, z$$

$$\Rightarrow \quad f(z) = \pm z \quad \forall z \in \mathbb{R}$$

Attenti al mistone!



Sia $a \neq 0$ t.c. $f(a) = a$ e b t.c. $f(b) = -b$
$\neq 0$

sost. $x = b$, $y = a$

$$f(-b^2 + a) = b^2 + a$$

1 $-b^2 + a$ 2 $b^2 - a$

$1 \Rightarrow b^2 = 0$

$2 \Rightarrow a = 0$

Manca solo la verifica!

3 $f(f(x)^2 y) = x^3 f(xy)$ * $\forall x, y \in \mathbb{Q}^+$

$y = 1 \Rightarrow f(f(x)^2) = x^3 f(x)$ *

$$\frac{f(f(x)^2)}{f(x)} = x^3$$

inj

$g(f(x))$

Sia $g(y) = \dfrac{f(y^2)}{y}$

$g(f(x)) = x^3 \Rightarrow f$ iniettiva

* + * Ottengo $f(f(yz)^2) = y^3 z^3 f(yz)$

ponendo $x = yz$

ma ora $\underbrace{y^3 z^3 f(yz)}_{\text{testo con } y,z} = \underbrace{y^3 f(f(z)^2 y)}_{\text{testo con } f(z)^2,\, y} =$

$$= f(f(y)^2 f(z)^2)$$

$$\Rightarrow \cancel{f}(f(y)^2 f(z)^2) = \cancel{f}(f(yz)^2)$$

per l'inj

$$f(y)f(z) = f(yz)$$

Esercizi

Ricorrenze: quello di prima ; 92 , 95 alcuni

trovare formula esplicita per $a_{n+2}=6a_{n+1}-9a_n$ con $a_0=0, a_1=3$

IMO 2014 - 1

[hint: mostrare che una successione decresce]

Funzionali: 89, 90 alcuni, 91 il primo

Test iniziale 3: (c)

Trovare tutte le $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ t.c. [IMO 92 - 2]

$$f(x^2+f(y))=y+(f(x))^2 \quad \forall x,y\in\mathbb{R}$$

[hint: supponete dapprima $f(0)=0$]

Ricorrenze

quello di prima $\quad p(t)=t^2-t+1$

$\to$ le radici ξ, ξ^{-1} sono radici dell'unità, seste $\xi^6=1$

$$a_n=\lambda\xi^n+\mu\xi^{-n}$$

$$\Rightarrow a_{n+6}=\lambda\xi^{n+6}+\mu\xi^{-n-6}=\lambda\xi^n+\mu\xi^{-n}=a_n$$

92 $\sum_{n=0}^{k} 4^n = a_k$

$$a_{k+1} = a_k + 4^{k+1} \overset{!}{=} 4a_k + 1$$

$$\underbrace{1+4+\ldots+4^{k+1}}_{a_{k+1}} = 1+4(\underbrace{1+4+\ldots+4^k}_{a_k})$$

$a_{n+2} = 6a_{n+1} - 9a_n \Rightarrow (t-3)^2 = 0$

$\Rightarrow$ soluzioni del tipo c^n c'è solo quella con $c=3$

$nc^n \leftarrow$ la stessa c

le soluzioni particolari sono c^n, nc^n

$3^n, n3^n$

Oss. generale: se una radice r del polinomio caratteristico ha molteplicità h, allora $p(n)r^n$ è soluzione $\forall\ p(x)$ polinomio di grado $< h$

Accenno alla dim: nel caso in cui $r=1$

il polinomio caratt. è $q(t)(t-1)^h$

è vero che $p(n)$ soddisfa $(t-1)^h$

se $h=1$ $\quad p(n+1)=p(n)$
$\quad p(n+1)-p(n)$

se $h=2$ $\quad [p(n+2)-p(n+1)]-[p(n+1)-p(n)]=0$

ecc. per $h>2$

se $p(x)$ è un polinomio di grado h

$\Rightarrow p(x+1)-p(x)$ " $\quad h-1$

(basta guardare il termine di grado h)

Rivediamo il 92

$$a_k=\sum_{n=0}^{k}\binom{n}{2}$$

$\to$ polinomio di grado 2 in n

$\to \frac{n(n-1)}{2}$

$$a_{k+1}=a_k+\binom{k+1}{2}$$

Sia $b_k=a_k-a_{k-1}$ $\quad (*)$

$$b_k+a_k=a_k+\binom{k}{2}$$

$b_k=\binom{k}{2}$ è polinomio di grado 2

$c_k=b_k-b_{k-1}$ = polinomio di grado 1

$d_k = c_k - c_{k-1} \to$ polinomio costante

$\to a_k$ è un polinomio di grado 3

Ora avete $a_k = \alpha k^3 + \beta k^2 + \gamma k + \delta$

$a_k - a_{k-1} = \frac{1}{2}k^2 - \frac{1}{2}k$

95 l'ultimo $a_n = \frac{1}{2} a_{n-1} + \frac{1}{n}$

$\to b_n =$ da trovare per casa ...

IMO 2014 - 1 $a_0 < a_1 < \dots$ interi

dim che $\exists!\, n$ t.c. $a_n < \frac{a_0 + \dots + a_n}{n} \leq a_{n+1}$

In pochi passaggi ottengo che

$$\square \iff \left(\sum_{i=0}^{n} a_i\right) - n a_n > 0$$

$$\square \iff \left(\sum_{i=0}^{n} a_i\right) - n a_{n+1} \leq 0$$

$$b_n = \left(\sum_{i=0}^{n} a_i\right) - n a_n$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} a_i - (n-1) a_n$$

$\square \iff b_n > 0$

$\square \iff b_{n+1} \le 0$

$$b_{n+1} - b_n = \cancel{\sum_{i=0}^{n} a_i} - n a_{n+1} - \cancel{\sum_{i=0}^{n} a_i} + n a_n$$

$$= n(a_n - a_{n+1}) < 0$$

$b_{n+1} < b_n$ sono interi $\Rightarrow b_{n+1} \le b_n - 1$

Funzionali

89 ~ 2

Con lo stesso procedimento della 1 + 2

ottengo $f(x) = \lambda x \quad \forall x \in \mathbb{Q}$

guardando $f(f(x)) = x \Rightarrow \lambda = \pm 1$

$f(100)$ può essere solo ± 100

90 $\quad f(x+y) + f(x-y) = 2f(x) + 2f(y)$

né iniettiva, né surgettiva perché ~~dovrebbe~~

esiste

~~esistere~~ $f(x) = c = 0$

$f(xy) = x f(y)$

quasi... se non fosse per $f(x)=0$

se $\exists\, y_0 \neq 0$ t.c. $f(y_0) \neq 0$ allora sostituisco

e ottengo $f(xy_0) = x\, f(y_0)$

$$f(z) = \frac{z}{y_0} f(y_0)$$

$f(x^2) = x^2$ ← non so nulla! per $x<0$ della $f(x)$

Se avessi avuto $f: \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ allora sì sia a inj che a surj

Test. iniziale: 3

$f(x+y) = f(f(x)) + f(f(y)) \quad \forall x,y \in \mathbb{Q}$

$f: \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$

$y=0 \Rightarrow f(x) = f(f(x)) + c \quad \forall x \in \mathbb{Q}$

$(c = f(f(0)))$

⇒ sostituisco nel testo e ottengo

$f(x+y) = f(x) - c + f(y) - c$

$f(x+y) = f(x) + f(y) + k$

$$\underbrace{f(x+y)+k}_{} = \underbrace{f(x)+k}_{} + \underbrace{f(y)+k}_{}$$

chiamo $g(x) = f(x)+k$

allora $g(x+y) = g(x)+g(y)$

$\Rightarrow g(x) = \lambda x \Rightarrow f(x) = \lambda x + \mu$

$f(x+y) = f(x) + f(y+k) \quad \forall x,y \in \mathbb{Q}$

$x = z+k$

$$\underbrace{f(z+y+k)} = \underbrace{f(z+k)} + \underbrace{f(y+k)}$$

$g(x) := f(x+k)$

IMO92 - 2

$f(x^2+f(y)) = f(x)^2+y$

ponendo $x=0 \rightarrow f(f(y)) = f(0)^2+y$

$\rightarrow$ inj + surj

se avessi $f(0)=0$, avrei $f(f(y))=y$

pongo $y=f(z)$

$f(x^2+z) = f(x)^2+f(z) \quad \forall x,z$

$z=0 \Rightarrow f(x^2)=f(x)^2 \quad \forall z$

$$f(x^2+z)=f(x^2)+f(z) \quad \forall x,z$$

$$f(w+z)=f(w)+f(z) \quad \forall w>0, z$$

mancano 2 cose: 1 la conquista di $\mathbb{R}$

2 $f(0)=0$

1 MEDIUM

2 ponendo $y=0$ nel testo

$$f(x^2+c)=\underline{f(x)^2} \qquad (c=f(0))$$

ponendo $y=f(z)$

$$f(x^2+z+c^2)=\underline{f(x)^2}+f(z)$$

$$f(x^2+c)=f(x^2+z+c^2)-f(z)$$

volevo dire che per la surgettività

$\exists\, z_0$ t.c. $f(z_0)=0$

$$f(x^2+c)=f(x^2+z_0+c^2)$$

iniett.

$$\Rightarrow \quad c=z_0+c^2$$

In realtà bastava $x=z_0$ nel testo

$$f(z_0^2+c^2+z)=0+f(z)$$

$\Rightarrow \quad z_0^2 + c^2 + z = z$

$\Rightarrow z_0^2 + c^2 = 0 \Rightarrow z_0 = 0$ e $c = 0$