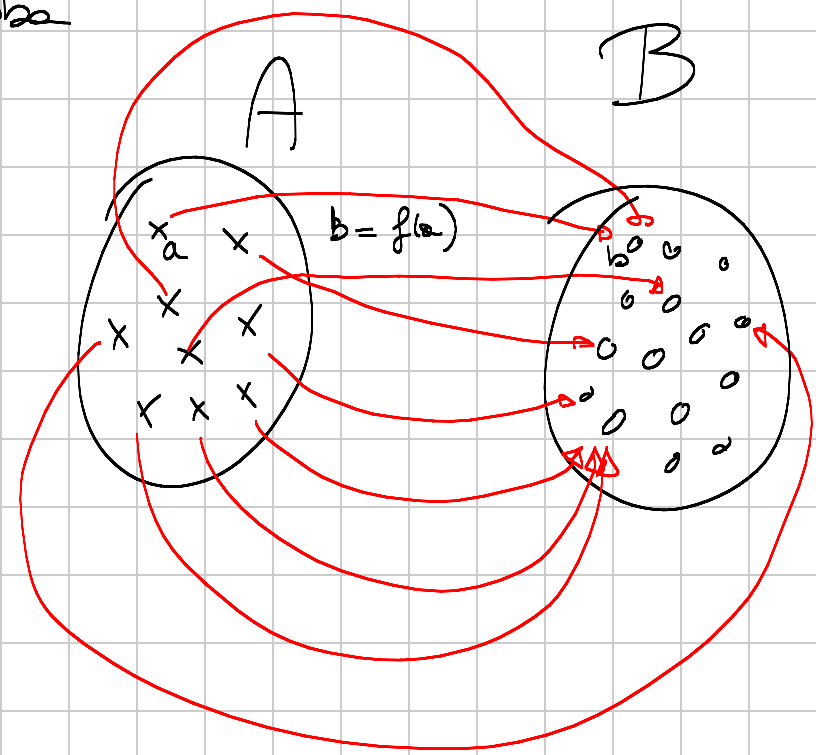
C1B - Sam

Note Title 9/2/2016

Conteggi = contare roba

·) $f : A \to B$

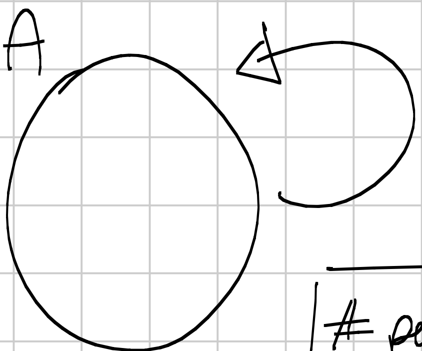


f SURGETTIVA
(SURIETTIVA)

$B = f(A)$

f INIETTIVA
se $a \neq a'$
allora $f(a) \neq f(a')$

f BIGETTIVA se è INIETTIVA e SURGETTIVA

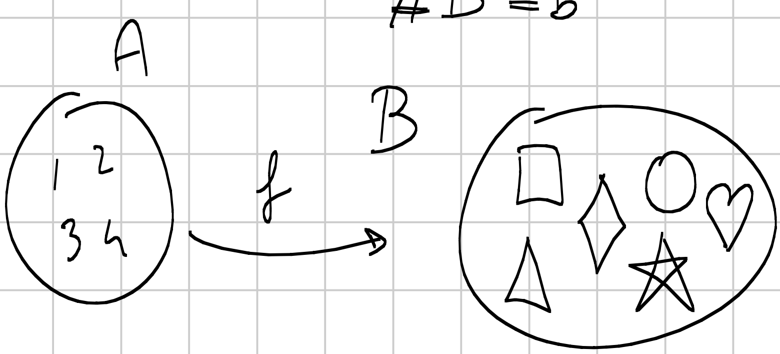


f bigettiva
è una permutazione

$\boxed{\#\text{permutazioni} = n!}$

- $f : A \to B$ $\quad \#A$ = cardinalità di A = n° di el di A
$= a$

$\#B = b$



$1 \longrightarrow ?$ $\quad 6$

$2 \longrightarrow ?$ $\quad 6$

$3 \longrightarrow ?$ $\quad 6$

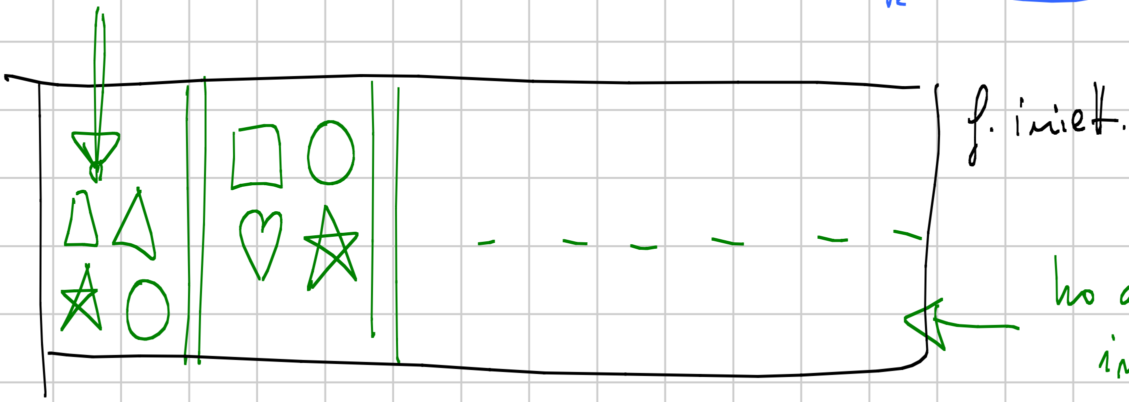
$4 \longrightarrow ?$ $\quad 6$

6^4 funzioni $\longrightarrow$ $\boxed{b^a}$ n° funzioni

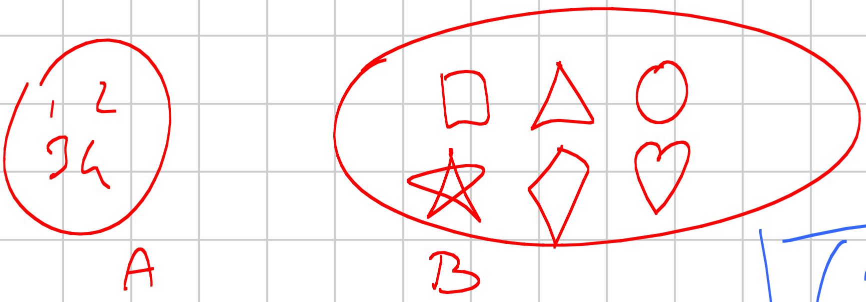
— funzioni iniettive da A a B $\qquad \#A = a \quad \#B = b \qquad (a \leq b)$

1° 2° 3° - - a°

$$b(b-1)(b-2)\cdots(b-a+1) = \boxed{\frac{b!}{(b-a)!}}$$ n° f. iniettive



ho diviso le f. iniettive in $\binom{b}{a}$ sottoinsiemi



$\boxed{\binom{b}{a} a!}$ n° di f. iniettive

— $f: A \to B$ surgettive $\left(\begin{matrix} \#B \leq \#A \\ b \leq a \end{matrix}\right)$

$$\{x_1, \dots, x_b\} = B$$

$$\#\{f: A \to B \text{ che non hanno } x_1 \text{ nell'immagine}\} = (b-1)^a$$

$$\#\{- - - - - - x_3 - - - -\} = (b-1)^a$$

$X_j = \{ f: A \to B$ che non hanno x_j nell'immagine $\}$

$$X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_b = \{ f: A \to B \text{ \underline{non} surgettive} \}$$

$$\#(A \cup B) = \#A + \#B - \#(A \cap B)$$

$$\#(A \cup B \cup C) = \#A + \#B + \#C - \#(A \cap B) - \#(A \cap C) - \#(B \cap C) + \\ + \#(A \cap B \cap C)$$

$$\#(X_1 \cup \dots \cup X_b) = \sum_{j=1}^{b} \#X_j - \sum_{i<j} \#(X_i \cap X_j) + \\ + \sum_{i<j<k} \#(X_i \cap X_j \cap X_k) - \dots - (-1)^b \#(X_1 \cap \dots \cap X_b)$$

PIE
Principio
Inclusione
Esclusione

$$\#(X_1 \cap X_5) = (b-2)^a$$

$$b\,(b-1)^a - \binom{b}{2}(b-2)^a + \binom{b}{3}(b-3)^a - \dots \dots$$

$$- (-1)^{b-1} \binom{b}{b-1} (1)^a$$

$$\boxed{\binom{b}{0} b^a - \binom{b}{1}(b-1)^a + \binom{b}{2}(b-2)^a - \binom{b}{3}(b-3)^a + \dots + (-1)^{b-1}\binom{b}{b-1}(1)^a}$$

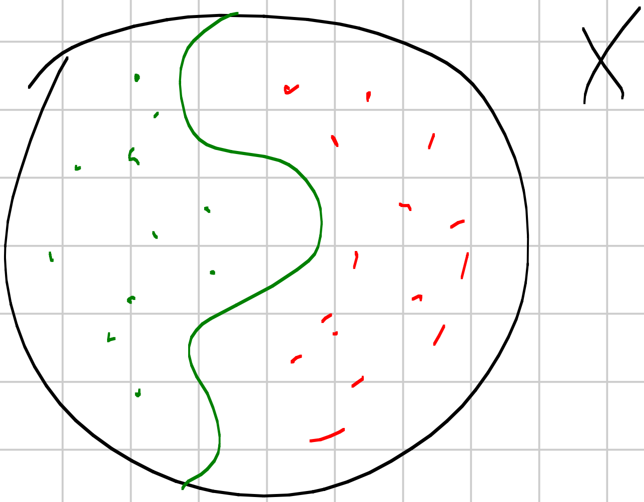
n° f. surgettive

TI 2016 - 6 $\qquad X = \{1, 2, \ldots, 200\}$

$S \subseteq X \qquad f(S) = (\Sigma \text{ el. di } S) \cdot (\Sigma \text{ el di } X - S)$

Si può dim che il valor medio di $f(S)$ quando S varia tra i sottoins. con 100 elementi è un numero intero n.

Quanto è n? $\qquad \sum_{\substack{S \subseteq X \\ \#S = 100}} f(S) \Big/ \binom{200}{100}$

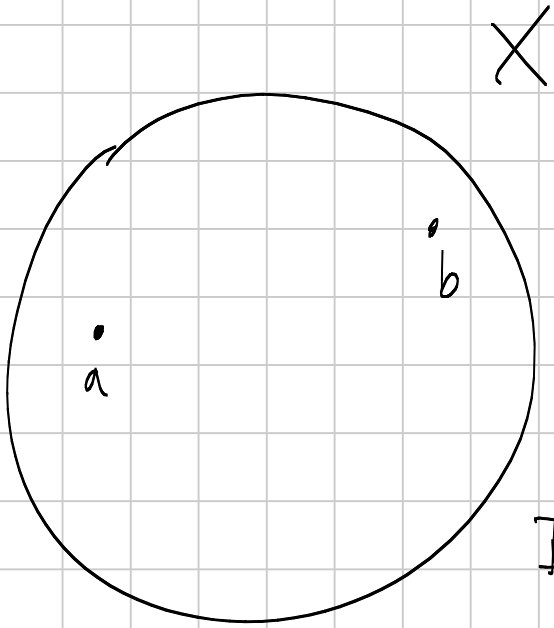


$\{a_1, a_2, a_3\} = S$

$\{b_1, b_2, b_3\} = X - S$

$f(S) = (a_1 + a_2 + a_3) \cdot (b_1 + b_2 + b_3) =$

$= a_1 b_1 + a_1 b_2 + a_1 b_3 + a_2 b_1 + a_2 b_2 + a_2 b_3$
$+ a_3 b_1 + a_3 b_2 + a_3 b_3$



Per quante scelte di $S \subseteq X$, $\#S = 100$ si ha che $a \in S$, $b \notin S$?

$\to \binom{198}{99}$

Il prodotto $a \cdot b$ compare $2 \cdot \binom{198}{99}$ volte.

$$\frac{\sum\limits_{\substack{S\subseteq X\\ \#S=100}} f(S)}{\binom{200}{100}} = 2\cdot \frac{\binom{198}{99}}{\binom{200}{100}} \cdot \underbrace{\boxed{\sum_{1=i<j}^{200} i\cdot j}}_{P} =$$

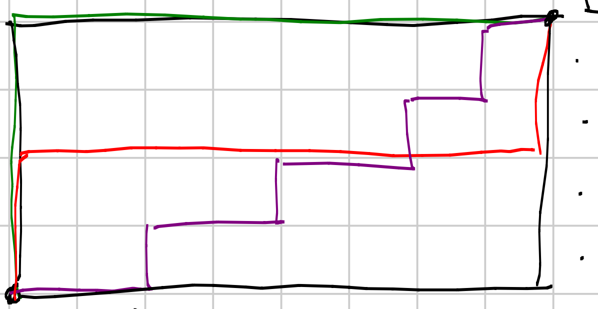
$$= \cancel{2}\cdot \frac{\cancel{198!}\,1\cancel{00!}\,100\cancel{!}}{\cancel{99!}\,\cancel{99!}\,2\cancel{00!}\cdot 199} P =$$

$$= \frac{100}{199}\cdot P \qquad P = \frac{(1+2+\dots+200)^2 - 1^2 - 2^2 - \dots - 200^2}{2}$$

$\_\_\_\_ \cdot \_\_\_\_$

Es:

$B=(8,4)$



$A=(0,0)$

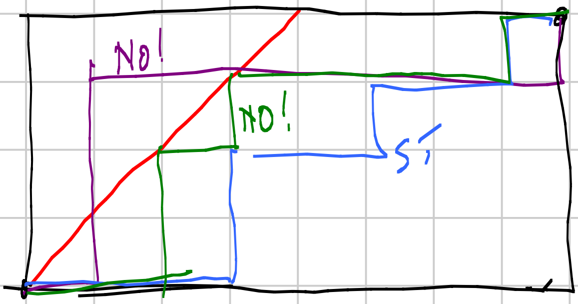
1) Anagrammi di $\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow\rightarrow\rightarrow\rightarrow\rightarrow\rightarrow\rightarrow\rightarrow\rightarrow$

2) Ho 12 mosse, scelgo le 8 che sono a dx

$$\binom{12}{8} = \frac{12!}{8!\,4!} = \binom{12}{4}$$

Es+:

B



A

\# percorsi da A a B monotoni che non toccano la retta rossa

\# Tutti i percorsi − # percorsi sbagliati

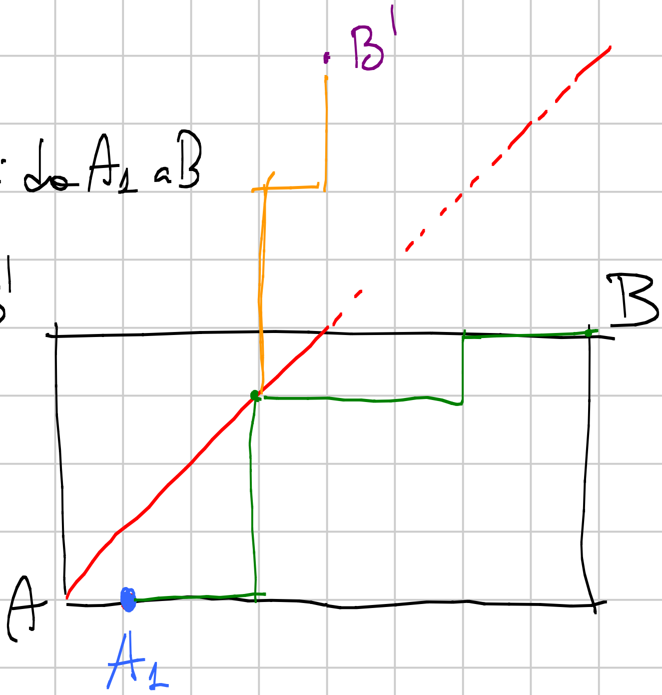
percorsi sbagliati da A_1 a B

$\parallel$

percorsi da A_1 a B'

$\parallel$

$\binom{11}{3}$



percorsi da A a B che non tocca la retta rossa di nuovo =

percorsi da A_1 a B che non tocca mai la retta rossa =

= # percorsi da A_1 a B − # percorsi sbagliati da A_1 a B =

$$= \binom{11}{4} - \binom{11}{3} = \dots$$

Es: Quante sono le stringhe di A e B lunghe n che non contengono due A consecutive?

n	1	2	3	4
	A B	AB BA BB	ABA, ABB BAB BBA, BBB	ABAB, ABBA, ABBB BABA, BABB BBAB, BBBA, BBBB

A_n = n° di stringhe lunghe n senza due A consecutive che finiscono per A

B_n = - - - - che finiscono per B

$$A_{n+1} = B_n \qquad S_n = A_n + B_n$$
$$B_{n+1} = A_n + B_n$$

$$S_{n+1} = A_{n+1} + B_{n+1} =$$
$$= \underbrace{B_n + A_n} + B_n =$$
$$= S_n + B_n = S_n + A_{n-1} + B_{n-1} =$$
$$= S_n + S_{n-1}$$

TI 2016-5 $\quad I_n, \Pi_n, O_n$

$$I_n = \Pi_{n-1} \qquad S_n = I_n + \Pi_n + O_n =$$
$$O_n = \Pi_{n-1} \qquad = 2\Pi_{n-1} + S_{n-1} = S_{n-1} + 2S_{n-2}$$
$$\Pi_n = I_{n-1} + O_{n-1} + \Pi_{n-1} = S_{n-1}$$

IMO 2011-4:

n pesi
$2^0, 2^1, \dots, 2^{n-1}$

Volete posizionarli sui due piatti di modo che a sx ci sia sempre più peso che a dx.
In quanti modi si può fare?
$\uparrow D_n$

Se non è la prima mossa, il peso 2^0 non conta niente.

Avete $(n-1)$ pesi $\Rightarrow D_{n-1}$

$$\left(1 + 2(n-1)\right) D_{n-1} = D_n$$

$$D_n = (2n+1)\, D_{n-1}$$

$$D_1 = 1 \qquad D_n = \text{prodotto dei dispari da } 1 \text{ a } 2n+1.$$

$$= (2n+1)!!$$

Double counting

$$\sum_{i=1}^{n} i$$

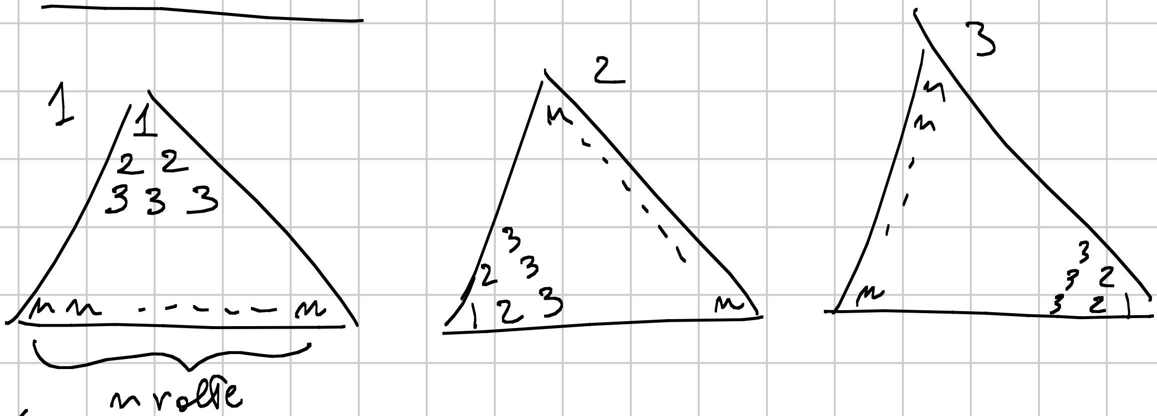
$n+1$	$n+1$		– – – –	$n+1$
1	2	3	– – – – – –	n
n	$n-1$	$n-2$	– – – – – –	1

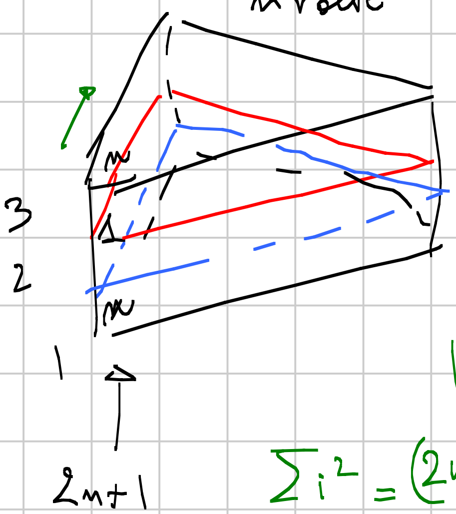
$$\Sigma \text{ per righe} = 2 \cdot \sum_{i=1}^{n} i$$

$$\Sigma \text{ per colonne} = \underbrace{(n+1)}_{\Sigma \text{ di ogni colonna}} \cdot \overbrace{n}^{\#\text{colonne}}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{(n+1)n}{2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^2$$





$$\Sigma \text{ per piano} = 3 \cdot \sum i^2$$

$$\Sigma \text{ colonne} = \underbrace{(2n+1)}_{\Sigma \text{ di ogni colonna}} \cdot \frac{n(n+1)}{2}$$

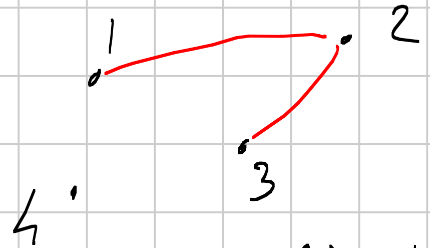
$$\sum i^2 = \frac{(2n+1)\,n\,(n+1)}{6}$$

Grafi: (V, E) ← Edges

vertici (V); lati, archi, spigoli (E)

$E \subseteq V \times V$ simmetrico
$(a,b) \in E$
$\Rightarrow (b,a) \in E$

$$V = \{1, 2, 3, 4\} \qquad E = \{(1,2), (2,1), (3,2), (2,3)\}$$



$v \in V$

$\deg(v) = \#$ archi che lo hanno come estremo

$$\deg(1) = 1$$
$$\deg(2) = 2$$
$$\deg(3) = 1$$
$$\deg(4) = 0$$

$$2\,\#\text{archi} = \sum_{v \in V} \deg(v) \Rightarrow \#\text{vertici con } \deg(v) \equiv 1 \ (2) \text{ è pari.}$$

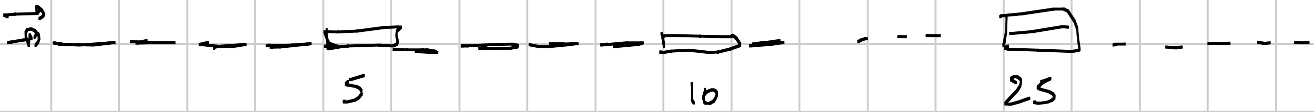
Esercizi: 97, 98, 99, 100, 108, 112, 114

Problemi: C1-10, C1-3, IMO 2015-1

Correzione di es. scelti

100) # zeri finali in 2013!

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \boxed{5} \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot \boxed{10} \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14 \cdot \boxed{15} \cdot 16 \cdot 17 \cdot 18 \cdot 19$$
$$\cdot \boxed{20} \cdot 21 \cdot 22 \cdot 23 \cdot 24 \cdot \boxed{25} \cdot 26 \cdot 27 \cdot 28 \cdot 29 \cdot \boxed{30} \cdot 31 \cdot \ldots$$



$$\left\lfloor \frac{2013}{5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2013}{25} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2013}{125} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2013}{625} \right\rfloor = \dots$$

108 $\quad n = a_1 + \dots + a_k \qquad a_i \geq 0$

$n = 4 \quad k = 3 \qquad a, b, c \geq 0$

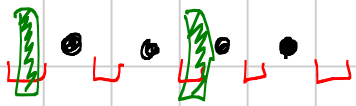
$4 = a + b + c$

$0 + 0 + 4$

$4 + 0 + 0$

$4 = n$

$2 = k - 1$



$0 + \; 2 + 2$

$$\binom{4+2}{2} \longrightarrow \binom{n+k-1}{k-1}$$

112: A_n = gli anagrammi che spostano ogni lettera al più di 1

$A_{n+1} \longrightarrow A_n$

B_n = gli anagrammi ... con la prima lettera fissa

$A_n = B_n + C_n$

C_n = ... con la 1^a lettera al secondo posto

$B_n = A_{n-1}$

$C_n = A_{n-2}$

$$A_n = A_{n-1} + A_{n-2}$$

114: $(A, B) \in Y^2 \qquad A \cap B = \emptyset.$

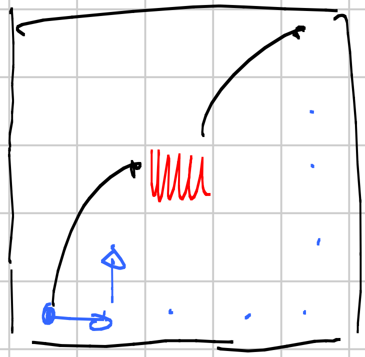
$\#A = a \qquad \#B = b \qquad a + b \leq n$

$$\sum_{a,b} \binom{n}{a} \binom{n-a}{b} \qquad f : \{1, \dots, n\} \longrightarrow \{A, B, \emptyset\}$$

3^n

C1-3

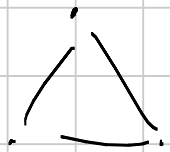
$\#$ percorsi − $\#$ percorsi che passano dal centro



$$\binom{8}{4} - \binom{4}{2}\binom{4}{2}$$

IMO 2015-1

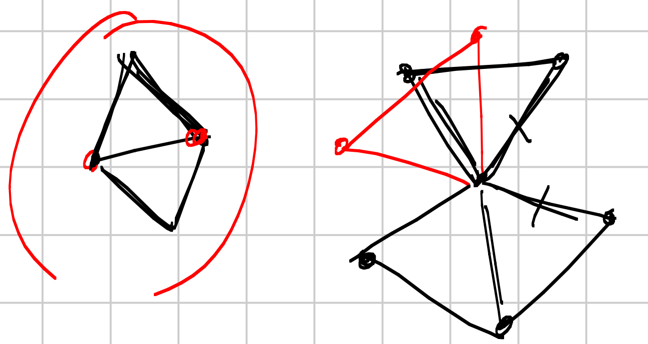
(a) equilibrato



$n=3$ tri equilatero

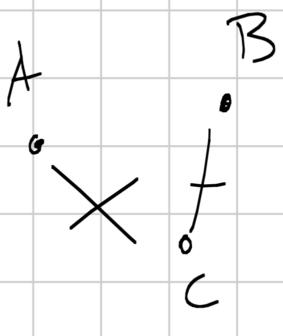
n dispari → poligono regolare

$n=4$



6

(b)



C buono per A e B

$\binom{n}{2}$ coppie. $\frac{n(n-1)}{2}$

$\boxed{\text{al max C è buono per } \frac{n-2}{2} \text{ coppie}}$ se non è ecc

⇓

non è equilibrato.

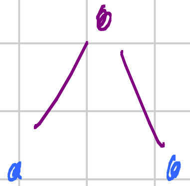
$\Rightarrow n\cdot\frac{n-2}{2} < \frac{n(n-1)}{2}$

Cl − 10

V, E $\qquad \#V = 12k$

$v \in V \quad \deg(v) = 3k+6$

$\forall\, v, w \in V$ $\exists$ esatt. N vertici collegati a entrambi



A = n° di cose così nel grafo

$$\binom{12k}{2} \cdot N = 12k \cdot \binom{3k+6}{2}$$

$$N = \frac{12k \binom{3k+6}{2}}{\binom{12k}{2}} = \lfloor k \rfloor + \frac{P(k)}{Q(k)}$$

$k = 3$

Ora c'è da fare l'esempio.