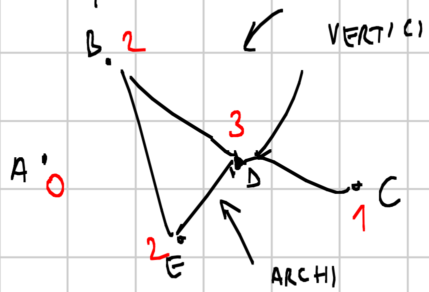
SENIOR 2016 - C2 BASIC

Note Title 9/6/2016

GRAFI

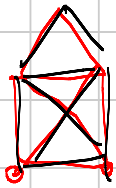


Σ gradi $= 2$ #archi

Grafi Euleriani

Cammino / ciclo euleriano.

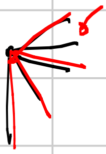
si passa esattamente una volta su ogni arco



sì, ma non con un ciclo

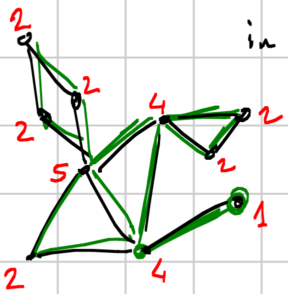
Teorema Un grafo ammette un ciclo euleriano $\Longleftrightarrow$ è connesso e tutti i vertici hanno grado pari.

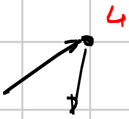
Cammino euleriano $\Longleftrightarrow$ connesso e al più 2 vertici hanno grado dispari.

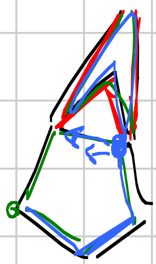


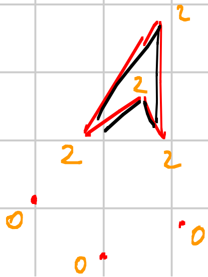
($\Leftarrow$ per esercizio)

$\Rightarrow$ in ogni vertice, quando si entra bisogna anche uscire $\Rightarrow$ serve che il grado sia pari, tranne se voglio iniziare/finire il cammino in due vertici diversi.



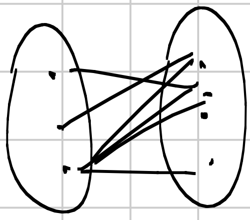






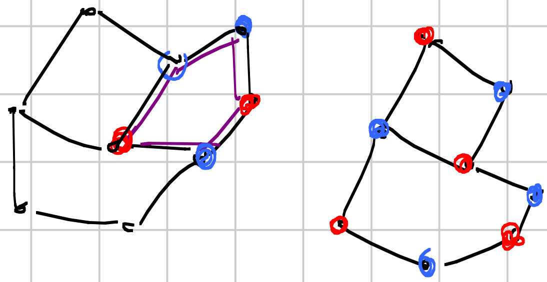
Oss: non ci può essere un unico vertice di grado dispari, quindi la condizione "al più due vertici di grado dispari" ci consente di scegliere tra ciclo (0 vertici di grado dispari) e cammino (2 v....)

GRAFI BIPARTITI



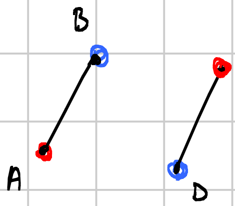
"2-colorazione" di un grafo

k-colorazione: assegnazione di un colore per ogni vertice, usando $\leq k$ colori distinti e in modo che ogni arco congiunga vertici di colori diversi.



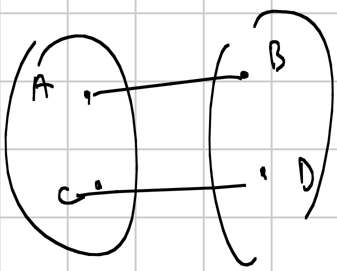
Quante sono le 2-colorazioni di un grafo?

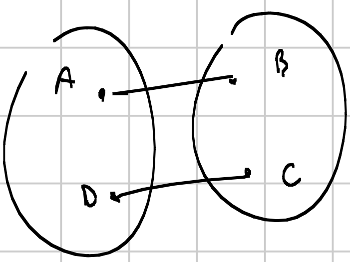
. supponiamo che ce ne sia almeno una.



2

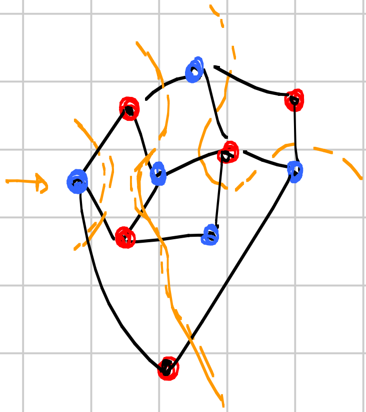
$2^{\#\text{ componenti connesse}}$

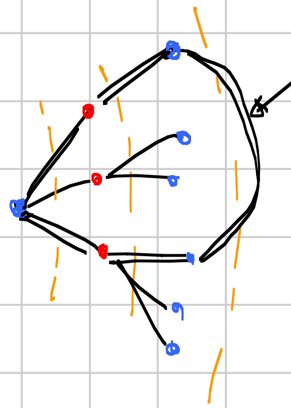




Quando un grafo è 2-colorabile?

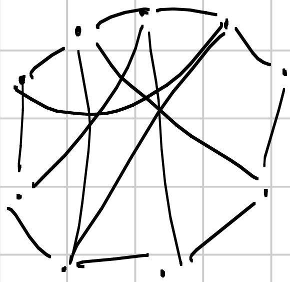
Condizione necessaria: non ci devono essere cicli dispari.
È anche sufficiente!



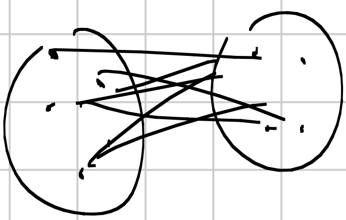


forma un ciclo dispari!

Es Quanti archi ha al massimo un grafo di 9 vertici senza triangoli?



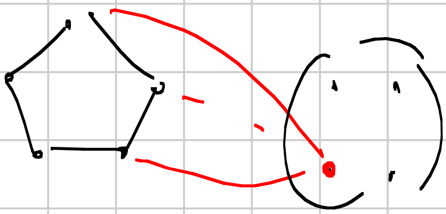
$$9 + \frac{2 \cdot 9}{2} = 18$$



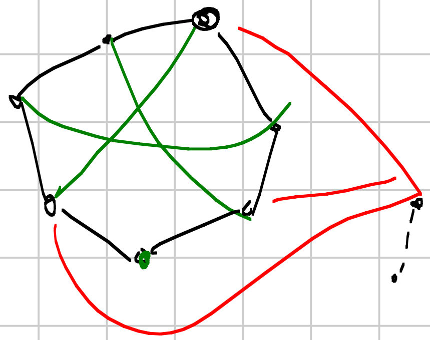
$$5 \cdot 4 = 20$$

È bipartito $\Rightarrow$ non contiene cicli dispari
$\Rightarrow$ no triangoli.

grafi con cicli dispari di lunghezza ≥ 5



$$\leq 5 + 2 \cdot 4 + 4 = 17$$

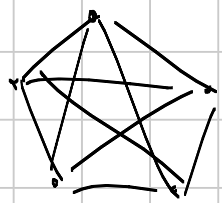


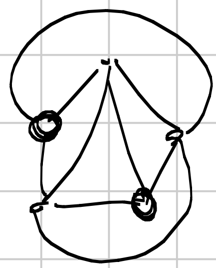
$$\le 7 + \underbrace{\frac{1\cdot 7}{2}}_{\le 3} + 3\cdot 2 + 1 = 17$$

GRAFI PLANARI

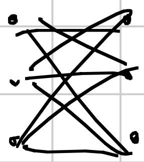
Grafi che potete disegnare su un foglio senza far intersecare gli archi.

K_5



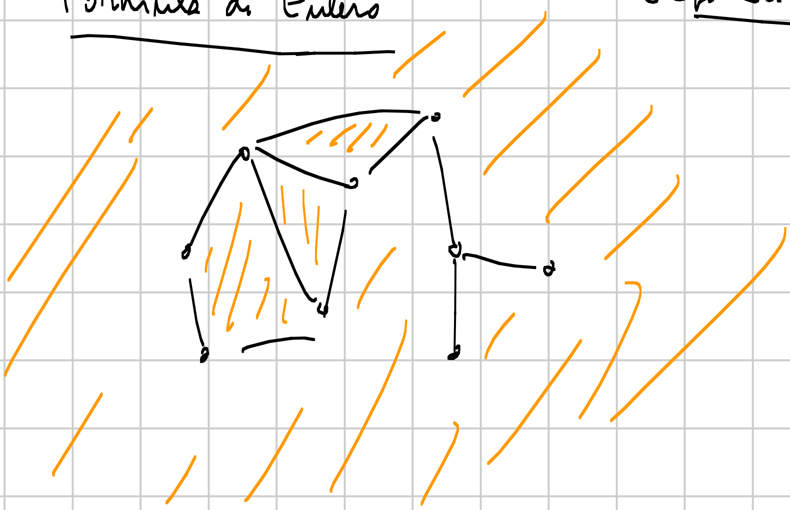


$K_{3,3}$



Formula di Eulero

Grafo connesso



4 facce
9 vertici
11 archi

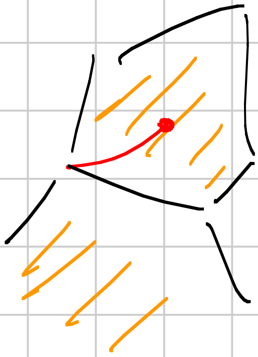
$$\boxed{F - A + V = 2}$$

$$4 - 11 + 9 = 2$$

"Passo base"

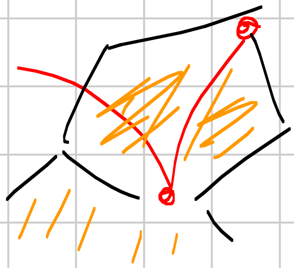
$F = 1$
$A = 0$
$V = 1$

"Passo induttivo" — + 1 vertice con un suo arco



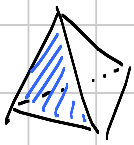
$\Delta V = 1$
$\Delta A = 1$
$\Delta F = 0$

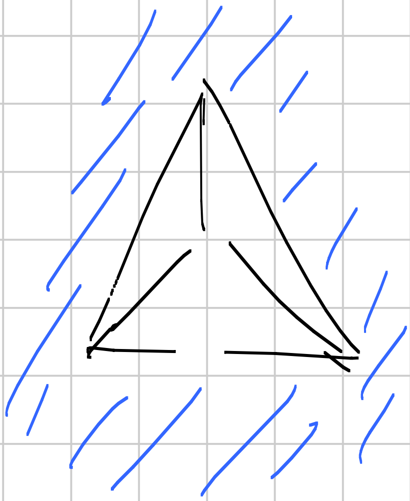
- $+1$ arco tra vertici che esistono già

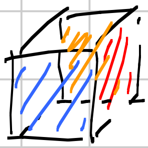


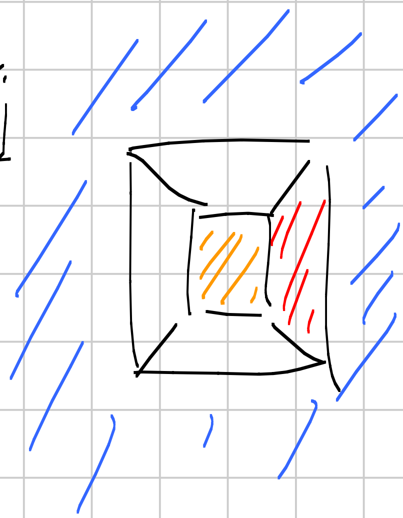
$\Delta F = 1$
$\Delta A = 1$
$\Delta V = 0$

Es: ci sono solo 5 solidi platonici (tetraedro, cubo, ottaedro, icosaedro, dodecaedro)



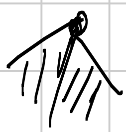






$F - A + V = 2$

Solido platonico: solido formato da facce → poligoni regolari di n lati in cui in ogni vertice arrivano d facce/spigoli.



$\to F$

$A \longrightarrow \frac{F \cdot n}{2}$

$V \longrightarrow \frac{F \cdot n}{d}$

$$F - A + V = 2$$

$$F - \frac{F \cdot n}{2} + \frac{F \cdot n}{d} = 2$$

$$F\left(-\frac{n}{2} + \frac{n}{d} + 1\right) = 2$$

$d = 3$ $\quad F\left(\underbrace{-\frac{n}{6} + 1}\right) = 2$

$n \leq 5$

$n = 3, \; n = 4, \; n = 5$

tetraedro $\quad$ cubo $\quad$ dodecaedro

$d = 4$ $\quad F\left(-\frac{n}{4} + 1\right) = 2$

$n \leq 3$

$n = 3 \to$ ottaedro

$d = 5$ $\quad F\left(\frac{n}{5} - \frac{n}{2} + 1\right) = F\left(-\frac{3}{10}n + 1\right)$

$n \leq 3$

$n = 3 \to$ icosaedro

$d = 6$ $\quad F\left(\frac{n}{6} - \frac{n}{2} + 1\right)$

$= F\left(-\frac{n}{3} + 1\right)$

$n \leq 2$

$d \geq 6$

INVARIANTI

Es

~~1~~ ~~2~~ ~~3~~ ~~4~~ ~~5~~ ~~6~~ ~~7~~ ~~8~~ ~~9~~ ~~10~~

~~11~~ ~~12~~ ~~8~~ ~~3~~

1 ~~11~~ ~~5~~ ~~6~~ ~~3~~

Posso finire con un 4?

Invariante: somma dei numeri modulo 2
all'inizio è dispari, e 4 è pari.

Invariante: qualcosa che non varia effettuando le mosse consentite dal problema.

Es 17 blu, 17 rossi, 17 gialli

$B \to G$ $R \to B$ $B \to R$
$R \to G$ $G \to B$ $G \to R$

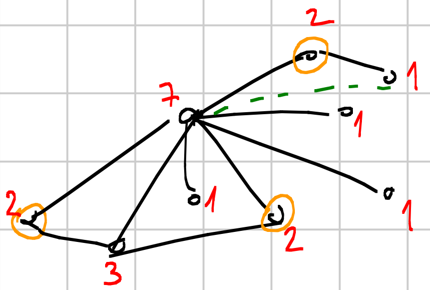
Si può arrivare ad avere 21 blu, 8 rossi, 22 gialli?

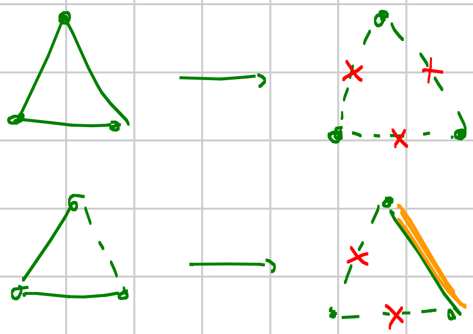
Un invariante è la somma dei numeri di camaleonti!

B	R	G
17	17	17
12	12	27
20	8	23
18	12	21
24	9	18
23	8	20

sono tutti congrui mod 3!

Es (C2-8)





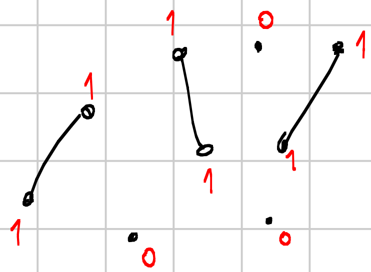
Perde chi non può muovere.

Dimostrare che l'esito della partita non dipende dalle scelte dei giocatori.

0) Il numero di archi diminuisce strettamente ad ogni mossa

$\Rightarrow$ il gioco finisce.

1) Quali sono le configurazioni "finali"?

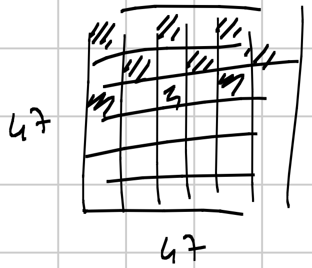


2) La parità dei gradi è un invariante!

3) $\sum$ gradi mod $\underset{}{4}$ è un invariante che varia — varia di 2

\# archi mod 2 è un invariante che varia — varia di 1

Es

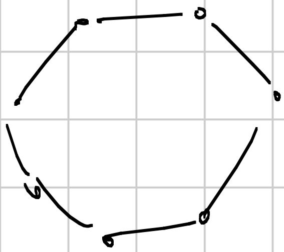


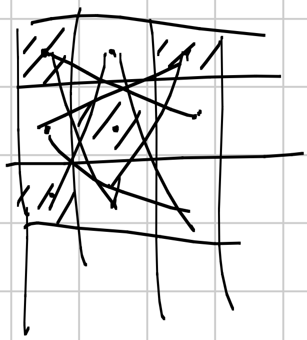
E' possibile, con un cavallo percorrere la scacchiera con un ciclo che passi esattamente una volta per ogni casella?

- Ogni mossa vi fa cambiare colore della casella
- $\frac{47^2+1}{2}$ nere, $\frac{47^2-1}{2}$ bianche

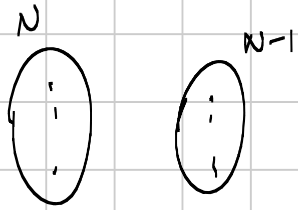
$$\#\text{ nere} = \#\text{ bianche} + 1$$

47^2 è dispari!





Il grafo è bipartito
(caselle nere / caselle bianche)



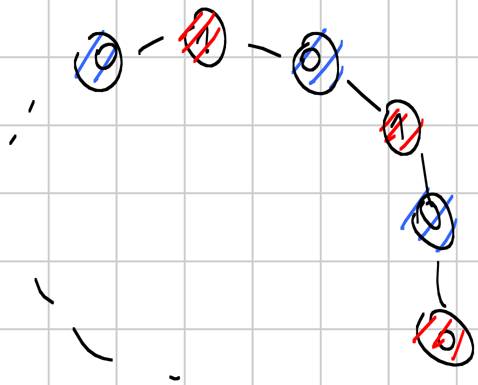
Staremmo cercando un ciclo dispari, che però non può esistere.

Esercizi "base": 116, 117, 119, 120, 123.

Esercizi C2 : 2, 3, 5, 13.

(117) 2014 − agono

$\sum$ dispari − $\sum$ pari si conserva



(119) 7 B 9 G 15 R

$\cancel{3B + 4G - R}$ mod 8

$\underline{aB + bG + cR \mod m}$

→ −1 −1 −1

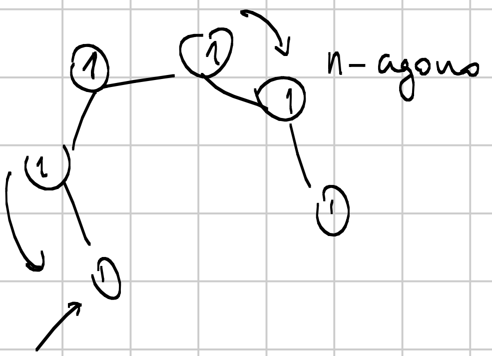
→ −1 −1

| 0 0 1 |

(120) n−agono

n dispari sì

n pari



mod n : somma delle distanze "orientate" dall'origine

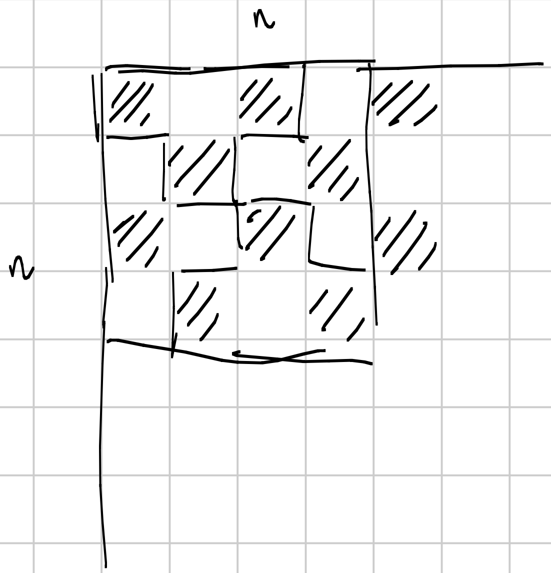
$$\sum_{i=0}^{n-1} i \cdot (\#\text{ pedine sul vertice } i) \mod n$$

inizio: $\frac{(n-1)n}{2} \leftarrow \equiv \frac{n}{2} \ (n)$

per n pari

fine: 0

(2)

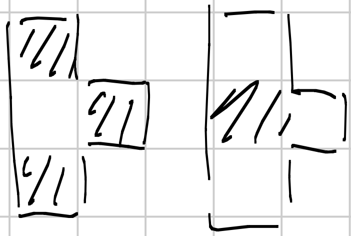


$n \equiv 0 \ (4)$

n dispari $\Rightarrow 4 \nmid n^2$

non è possibile

$n \equiv 2 \ (4)$



(A) (B)

$n^2/2$ nere, $n^2/2$ bianche

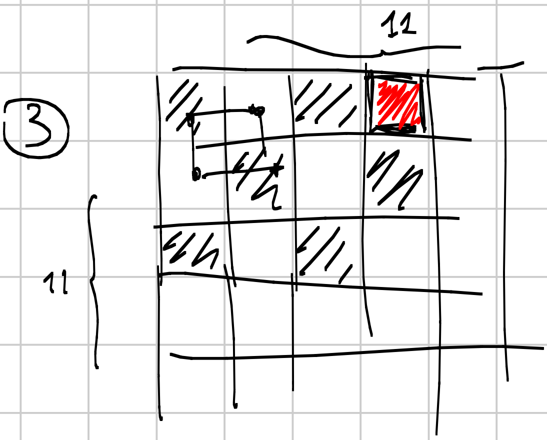
$4 \nmid n^2/2$

tasselli $\equiv 1 \ (2)$

$\Rightarrow$ # tasselli A $\neq$ # tasselli B

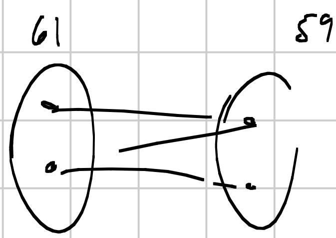
$\Rightarrow$ c'è uno scompenso tra caselle nere e bianche, assurdo.

(3)

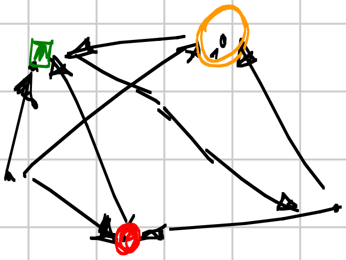


61 nere

60 bianche $\longrightarrow$ 59 bianche



(5)



"GRAFO ORIENTATO"

Per assurdo, supponiamo che $\nexists$ una città da cui si raggiungono tutte le altre.

Considerano la città che massimizza il numero di città raggiungibili da lei.

Esiste una città non raggiungibile da

Deve esistere un percorso $\rightsquigarrow$

Assurdo, perché la è strettamente migliore della .