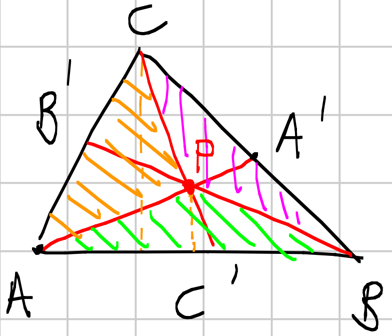
Geometria 3

Note Title 9/6/2016

Teorema di Ceva



AA', BB', CC' concorrono $\iff$

$$\star \quad \frac{AC'}{C'B} \cdot \frac{BA'}{A'C} \cdot \frac{CB'}{B'A} = 1$$

dimostriamo $\Rightarrow$)

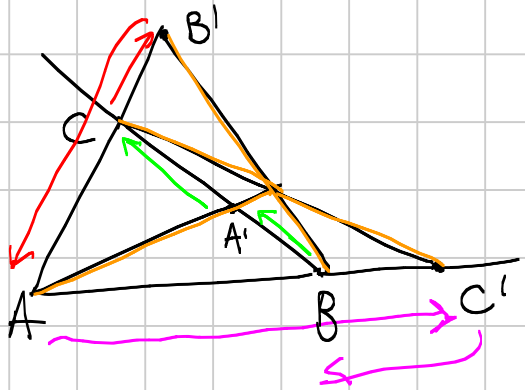
$$\frac{AC'}{C'B} = \frac{[APC']}{[C'PB]} = \frac{[ACC']}{[CC'B]} = \frac{[PCA]}{[PCB]}$$

$$\left(\frac{AC'}{C'B} = \lambda\right) \qquad \begin{aligned} [APC'] &= \lambda [C'PB] \\ [ACC'] &= \lambda [CC'B] \\ [PCA] &= \lambda [PCB] \end{aligned} \quad \text{differenza}$$

$$\star = \frac{\cancel{[PCA]}}{\cancel{[PCB]}} \cdot \frac{\cancel{[PBA]}}{\cancel{[PCA]}} \cdot \frac{\cancel{[BCP]}}{\cancel{[BPA]}} = 1.$$

(ora $\Leftarrow$ è facile).

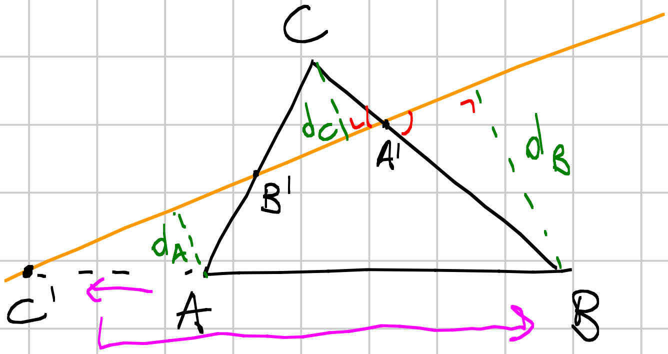
NOTA: posso usare Ceva con "segmenti orientati"



$$\frac{AC'}{C'B} \cdot \frac{BA'}{A'C} \cdot \frac{CB'}{B'A}$$

$$\ominus \qquad \oplus \qquad \ominus$$

Teorema di Menelao



A', B', C' (su BC, AC, AB) sono allineati $\iff$

$$\bigstar \quad \frac{BA'}{A'C} \cdot \frac{CB'}{B'A} \cdot \frac{AC'}{C'B} = -1$$

$\Longrightarrow$)

$$\frac{BA'}{A'C} = \frac{d_B}{d_C} \qquad \frac{AC'}{C'B} = - \frac{d_A}{d_B}$$

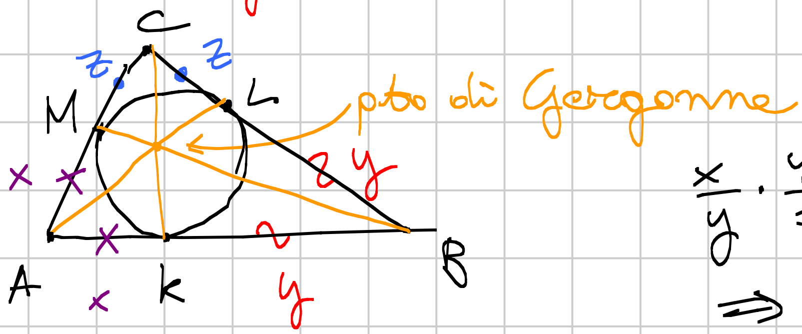
nel mio disegno

$$\frac{CB'}{B'A} = \frac{d_C}{d_A}$$

$$\bigstar = \frac{\cancel{d_B}}{\cancel{d_C}}\left(-\frac{\cancel{d_A}}{\cancel{d_B}}\right)\left(\frac{\cancel{d_C}}{\cancel{d_A}}\right) = -1$$

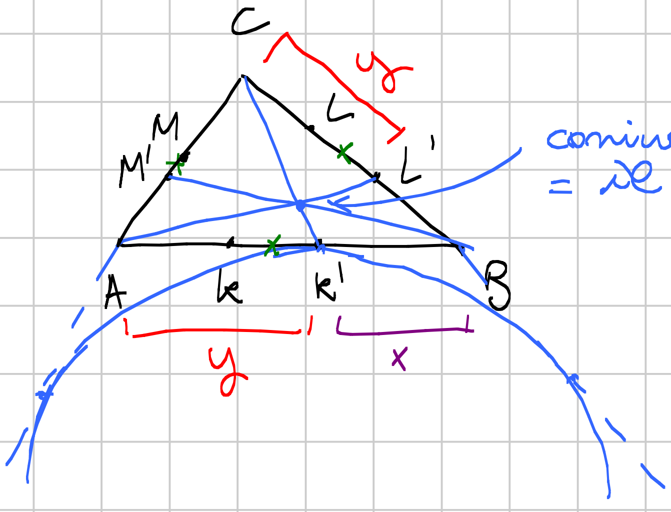
Funziona perché se taglio con ottengo 1 o 3 rapporti negativi.

Qualche conseguenza di Ceva:



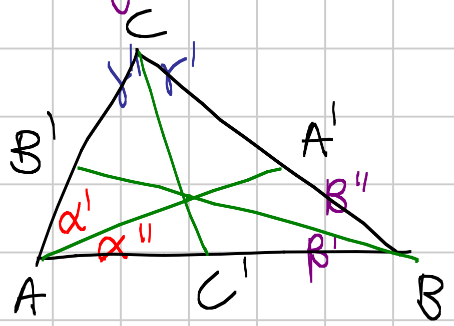
$$\frac{x}{y} \cdot \frac{y}{z} \cdot \frac{z}{x} = 1$$

$\Rightarrow$ AL, BM, Ck concorrono!



coniugato isotomico di Gergonne = il pto di Nagel

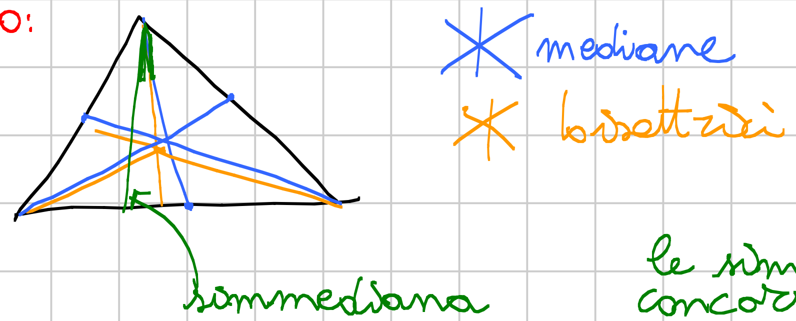
Ceva trigonometrico



AA', BB', CC' concorrono $\iff$

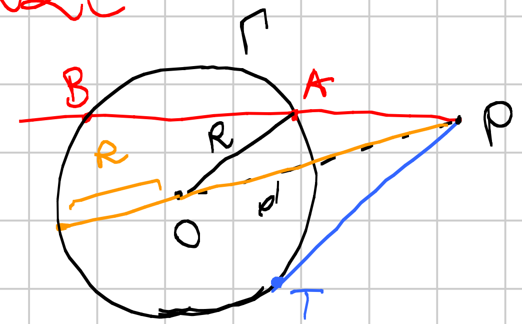
$$\frac{\operatorname{sen}\alpha'}{\operatorname{sen}\alpha''}\cdot\frac{\operatorname{sen}\beta'}{\operatorname{sen}\beta''}\cdot\frac{\operatorname{sen}\gamma'}{\operatorname{sen}\gamma''}=1$$

Esempio:



le simmediane concorrono nel coniugato isogonale del baricentro...

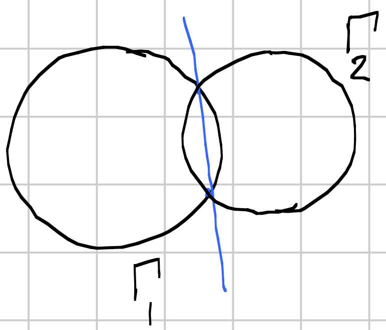
POTENZE



$$\text{pow}_\Gamma(P) = PA\cdot PB =$$
$$=(d-R)(d+R)=d^2-R^2$$

Nota $\quad P\equiv(x_P, y_P) \qquad \Gamma: (x-x_0)^2+(y-y_0)^2-R^2=0$

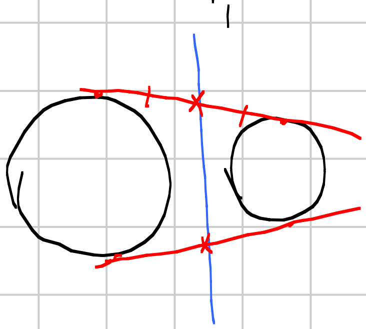
$$\text{pow}_\Gamma(P) = (x_P-x_0)^2+(y_P-y_0)^2-R^2$$



qual è il luogo dei pti P t.c. $\text{pow}_{\Gamma_1}(P) = \text{pow}_{\Gamma_2}(P)$?

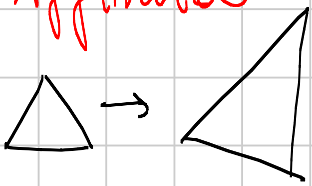
È una RETTA (nell'eq. si cancellano i termini di deg 2)

detta asse radicale ...



TRASFORMAZIONI

- Affinità



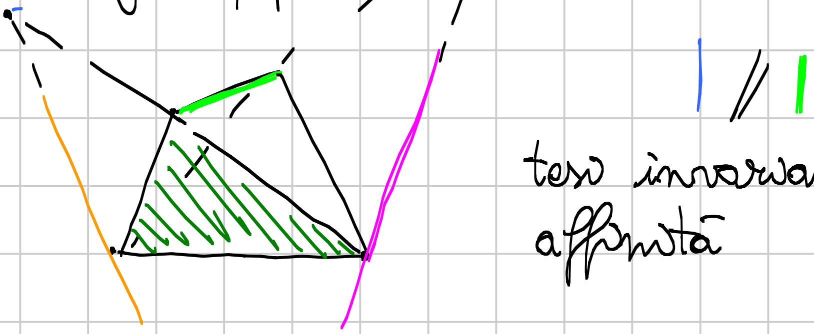
Coordinate: $(x,y) \mapsto (ax+by+c,\, dx+ey+f)$
$ae \neq bd$

aree si moltiplicano per
$ae-bd$.

✓ conservano: collinearità (rette → rette), parallelismo, concorrenza, rapporto di segmenti sulla stessa retta (e.g. pti medi...), rapporti di aree

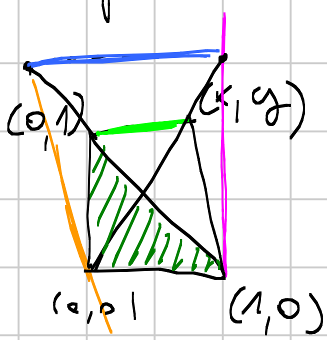
✗ NON si conservano: angoli, rapporti di segmenti, perpendicolarità, circonferenze

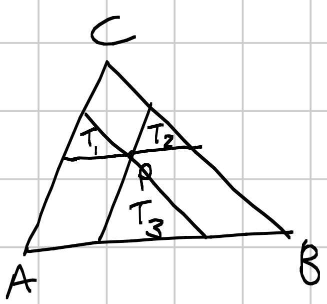
Esempi: geo2, problema 9



tesi invariante per affinità

⇝ posso fare i conti su

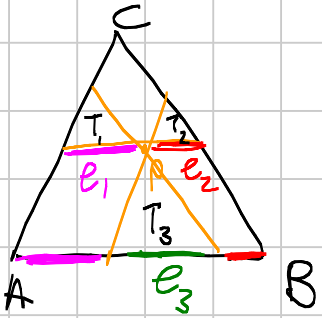




$T = [ABC]$

Tesi: $\sqrt{T_1} + \sqrt{T_2} + \sqrt{T_3} = \sqrt{T}$
è invariante per affinità!

posso ridurmi a:

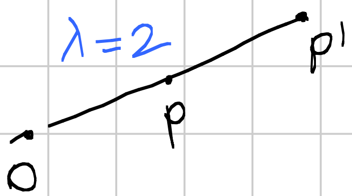


$$e_1 + e_2 + e_3 = e$$

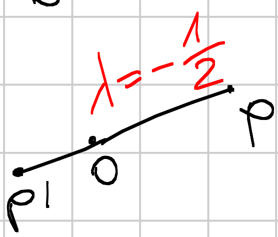
$$\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{4} e_1^2} + \dots = \sqrt{\frac{\sqrt{3}}{4} e^2}$$

- Omotetie

omotetia di centro O e ragione $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

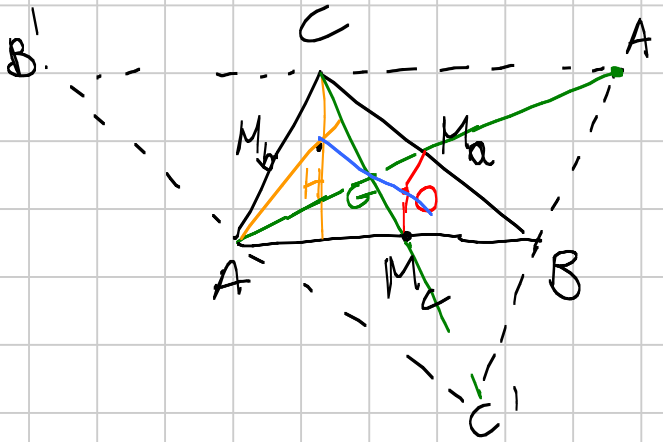


$P \to P'$ sulla retta OP
tale che $OP' = \lambda OP$



✓ conservano: rette → rette, angoli, circonf. → circonf., rapporti di seg./aree (si moltiplicano per λ^2)

(in coordinate se il centro è nell'origine omotetia = moltiplicare per λ $\quad z \mapsto \lambda z$)



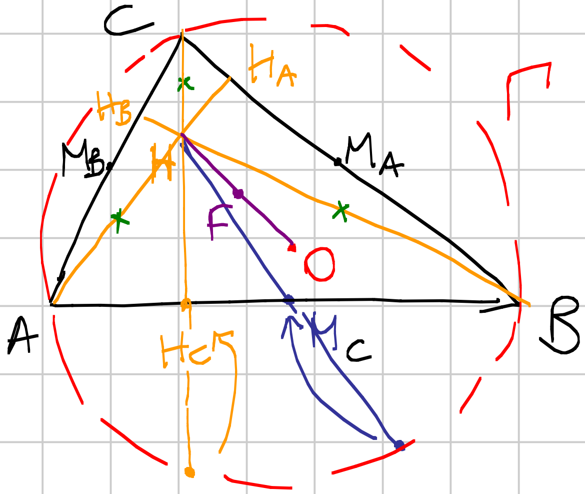
Retta di Eulero
omotetia di centro G, ragione -2

$A, B, C \to A', B', C'$
$(A'B' \parallel AB \dots)$
$M_c \to C \quad M_a \to A \quad M_b \to B$

assi di ABC → perpendic. a $A'B'$, $B'C'$, $C'A'$ per C, A, B
= perp. a AB, BC, CA per C, A, B
= altezze di ABC

⇝ il circocentro di ABC O → incontro assi di A'B'C' = incontro delle altezze di ABC = H.

Circonferenza di Feuerbach



omotetia di centro H e ragione 1/2.

O → F pto medio di OH

Γ → Γ' circ. di centro F e raggio R/2

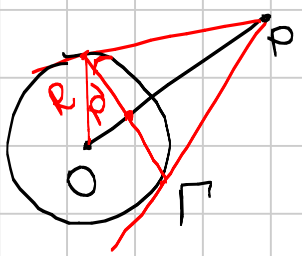
→ H_A, H_B, H_C stanno su Γ'.

→ pti medi M_A, M_B, M_C stanno su Γ'

→ anche i 3 pti "×" stanno su Γ'

" circonferenza dei 9 pti "

– Inversione circolare



inversione risp. a una circ. Γ : piano \ {O} ⟲

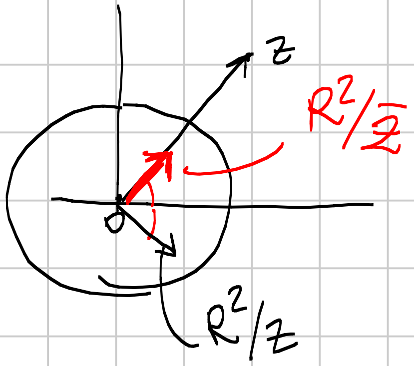
P → P' sulla semiretta OP

$OP \cdot OP' = R^2$

Nota: esterno ⇄ interno

è una "involuzione"

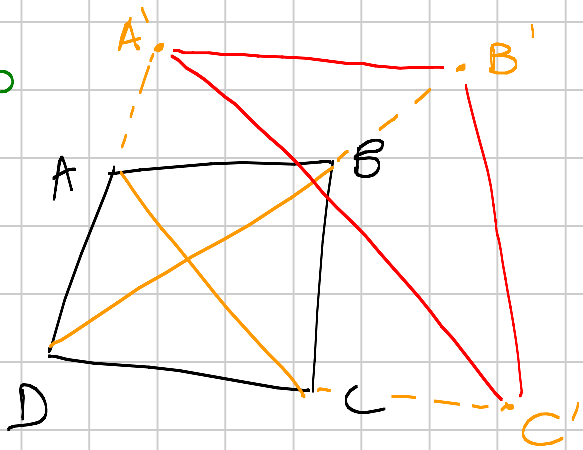
in complessi se il centro è nell'origine $z \mapsto \frac{R^2}{\bar{z}}$



✓ conserva angoli!

- Γ ↺
- rette per O ↺
- rette non per O → circonferenze per O
- circonferenze per O → rette non per O
- circonf. non per O → circonf. non per O

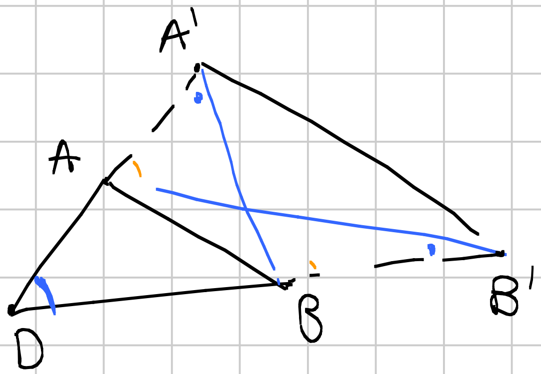
Tolomeo



$$AC \cdot BD \leq AD \cdot BC + AB \cdot CD$$

= vale $\Longleftrightarrow$ ABCD ciclico

LEMMA $\quad \overline{A'B'} = \dfrac{\overline{AB}\, R^2}{\overline{AD} \cdot \overline{DB}}$



$$\overline{DA'} = R^2/\overline{AD}$$
$$\overline{DB'} = R^2/\overline{DB}$$

$$\overline{DA'} : \overline{DB'} = \overline{DB} : \overline{AD}$$
$$\widehat{ADB} \sim \widehat{B'DA'}$$

$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{DA'}}{\overline{DB}} = \frac{R^2}{\overline{AD} \cdot \overline{DB}}$$

$\sim$

tornando a Tolomeo ...

$$\overline{A'C'} \leq \overline{A'B'} + \overline{B'C'}$$

$$\frac{\cancel{R^2}\,\overline{AC}}{\overline{AD}\;\overline{DC}} \le \frac{\cancel{R^2}\,\overline{AB}}{\overline{AD}\;\overline{BD}} + \frac{\cancel{R^2}\,\overline{BC}}{\overline{DB}\;\overline{DC}}$$

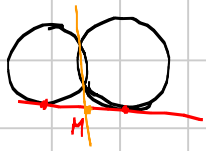
$$\overline{AC}\cdot\overline{DB} \le \overline{AB}\;\overline{CD} + \overline{BC}\;\overline{AD}$$

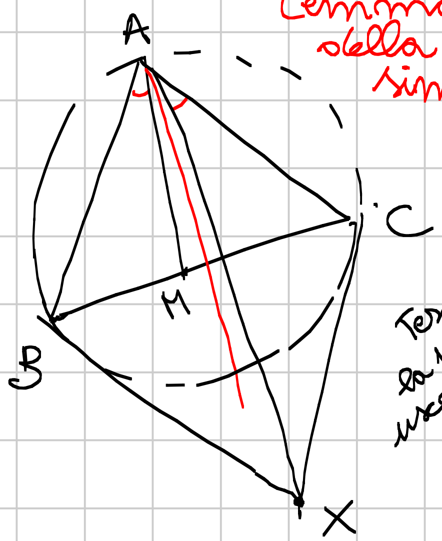
$=$ $\iff$ A', B', C' sono allineati
$\iff$ A, B, C stanno su una circonferenza per D
($=$ ABCD ciclico)

IMO 2016.1

Hint: inverto in A in modo da scambiare B e C

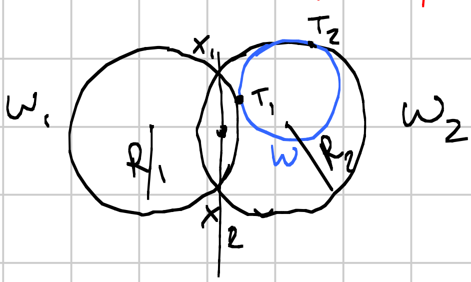
Hint:





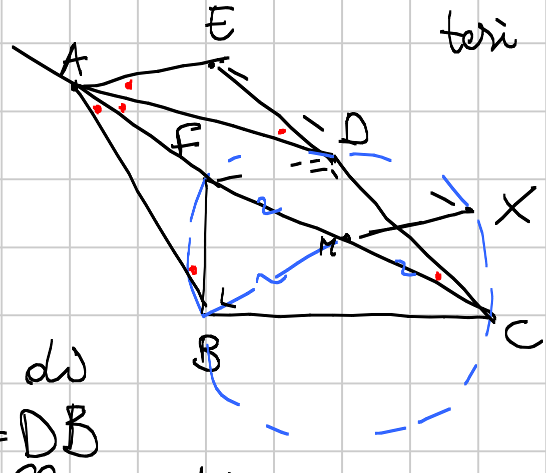
Problemi:
6, 12

EGMO 2016.4



Hp. $R_1 = R_2$
TESI:
$X_1T_1 \cap X_2T_2 \in \omega$

IMO 1



tesi BD, FX, ME concorrono

* ω è OBCF; D sta su ω
* X sta su ω
* F è l'incentro di DAB e DA = DB
* B, F, E sono allineati

$X_1 L T_2' X_2'$ cíclico