Induzione e Pigeonhole (Ludo)

Note Title 9/1/2016

Teorema 0 La proprietà $P(n)$ vale per $n=0$ — Dim ----

Teorema 1 Se $P(0)$ è vera, è vera anche $P(1)$ — Dim. ---,

Teorema 2 " $P(1)$ " " " $P(2)$ — Dim ---

Teorema 3 " $P(2)$ " " " $P(3)$ — Dim ---

Teorema 4 - - — Dim

5 — Dim

6 — Dim

⋮ — Dim

Per tutti gli n lo so dim. Teorema n con Dim. n.

Allora vale il meta-teorema: $P(n)$ è vera per ogni n naturale.

Ipotesi dell'induzione standard
$$\begin{cases} P(n) \text{ proprietà su } n \in \mathbb{N} \\ 1)\ P(0) \text{ è vera (passo base)} \\ 2)\ \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \text{ se } P(n-1) \text{ è vera, è vera anche } P(n) \\ \quad \text{(passo induttivo)} \end{cases}$$

$\forall$ = "per ogni" $\qquad \Rightarrow$ = "implica" $\qquad P(n-1) \Rightarrow P(n)$

$\exists$ = "esiste"

$$P(n) = \text{"} \sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} \text{"}$$

$$1)\ P(0): \underbrace{\sum_{i=0}^{0} i}_{0} = \underbrace{\frac{0\cdot(0+1)}{2}}_{0} \quad \text{vera}$$

$$2)\ P(n-1) \Rightarrow P(n)$$

$$\boxed{\text{so che } \sum_{i=0}^{n-1} i = \frac{(n-1)(n-\cancel{1}\cancel{+}1)}{2}}$$

Ipotesi induttiva

so da questo dedurre $P(n)$?

$$\sum_{i=0}^{n} i \stackrel{?}{=} \frac{n(n+1)}{2} \qquad \sum_{i=0}^{n} i = \boxed{\sum_{i=0}^{n-1} i} + n = \boxed{\frac{(n-1)\cdot n}{2}} + n =$$

$$= n\left(\frac{n-1}{2}+1\right) = n\left(\frac{n+1}{2}\right) = \frac{n(n+1)}{2}$$

□

$$\sum_{i=0}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \qquad \sum_{i=0}^{n} i^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

$$P(n) = \text{"}\sum_{i=1}^{n} \frac{i}{4^i} < \frac{1}{2}\text{"}$$

L'induzione può partire da $n_0 > 0$. $\tilde{P}(n) = P(n+n_0)$

$n_0 = 1$

$$P(1): \text{"}\sum_{i=1}^{1} \frac{i}{4^i} < \frac{1}{2}\text{"} \qquad \frac{1}{4} < \frac{1}{2} \quad \text{ok.} \quad \text{base}$$

$n-1 \to n$

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{n-1} \frac{i}{4^i} < \frac{1}{2}}_{P(n-1)} \qquad \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \frac{i}{4^i} \overset{?}{<} \frac{1}{2}}_{P(n)}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{i}{4^i} = \underbrace{\sum_{i=1}^{n-1} \frac{i}{4^i}}_{< \frac{1}{2}} + \frac{n}{4^n}$$

$$Q(n) = \text{"}\sum_{i=1}^{n-1} \frac{i}{4^i} \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}}\text{"}$$

oss.: se $Q(n)$ è vera $\forall n$, anche $P(n)$ lo è

1) $Q(1)$: $\frac{1}{4} \leq \frac{1}{4}$

2) $Q(n-1) \Rightarrow Q(n)$?

$$\underbrace{Q(n-1)}: \sum_{i=1}^{n-1} \frac{i}{4^i} \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{2^n}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{i}{4^i} = \underbrace{\sum_{i=1}^{n-1} \frac{i}{4^i}}_{\leq \frac{1}{2} - \frac{1}{2^n}} + \frac{n}{4^n} \leq$$

$$\leq \frac{1}{2} - \frac{1}{2^n} + \frac{n}{4^n} \overset{?}{\leq} \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}}$$

Vera se e solo se

$$\frac{n}{4^n} \leq \frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2^{n+1}} \iff n \leq \frac{4^n}{2^{n+1}} \iff$$

$$2n \leq \frac{4^n}{2^n} = 2^n \quad \text{per ogni } n \geq 1$$

(induzione ausiliaria)

Quindi è vera $Q(n)$ per ogni n, e così anche $P(n)$ lo è.

[Bernoulli: x reale > -1, $\forall n \in \mathbb{N}$ $\quad 1 + nx \leq (1+x)^n$.

$n \geq 4 \qquad n^2 \leq 2^n$]

Induzione "forte" o "estesa".

$P(n)$ proprietà di $n \in \mathbb{N}$

Se (ipotesi dell'induzione forte o estesa)

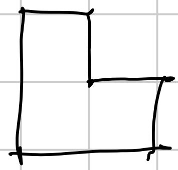
1) $P(0)$ è vera
2) Se $P(0), P(1), \dots, P(n-1)$ sono vere, anche $P(n)$ è vera, per ogni n.

allora $P(n)$ è vera per ogni n.

$Q(n) =$ "$P(k)$ è vera per $k \leq n$": le due forme di induzione sono equivalenti.

"Ogni $n \in \mathbb{N}$ $n > 1$ è fattorizzabile in prodotto di un numero finito k di fattori primi."

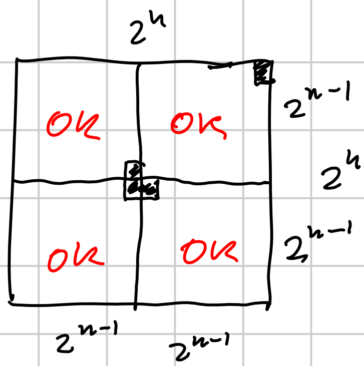
Tutte le scacchiere $2^n \times 2^n$ senza una casella d'angolo si possono tassellare con trimini a L



$n = 0$ diciamo di sì

$n = 1$ ok

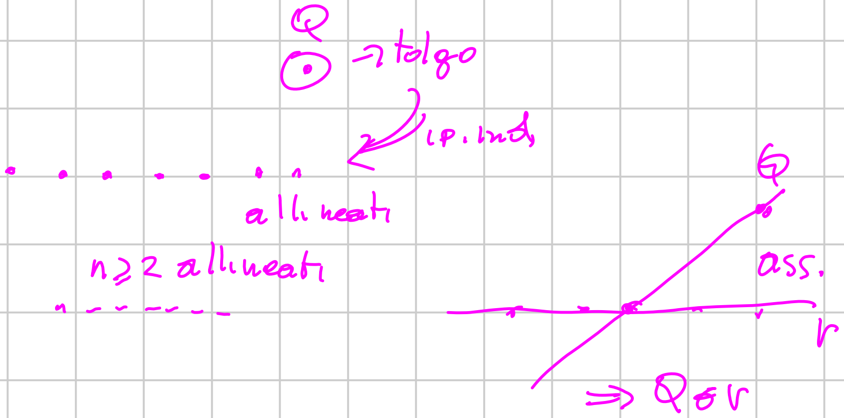
$P(n-1) \Rightarrow P(n)$



Controesempio: n punti nel piano sono tali che la retta che passa per (qualunque) due di essi contiene anche (almeno) un terzo punto di essi. Dim. che i punti sono tutti allineati.

$P(3)$: vero

$P(n-1) \Rightarrow P(n)$



Principio dei cassetti
(pigeonhole)

Se ho $n+1$ oggetti e li divido in n classi almeno una classe contiene almeno due oggetti

Se ho $kn+1$ oggetti e li divido in n classi almeno una classe contiene almeno $k+1$ oggetti

34 quanti almeno con il compleanno nello stesso mese?
4 sul pianeta Zork dove un anno ha n mesi

è vero che due persone conoscono lo stesso numero di altri nell'aula?

Classi = $C_0, C_1, \dots, C_{33}$

Oss.: non è possibile che sia C_0 che C_{33} siano non vuote.

C_0 non è vuota ($\Rightarrow C_{33}$ è vuota) $\Rightarrow$ 33 classi, 34 persone. ✓

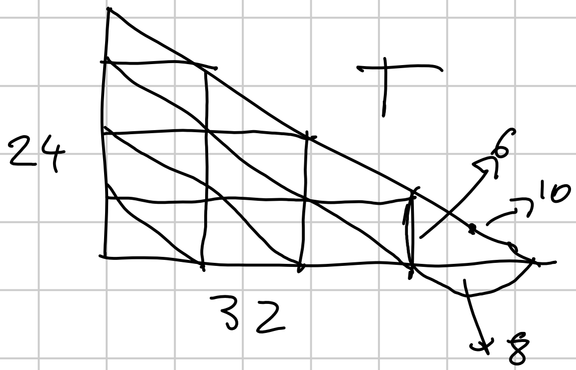
C_0 è vuota

$n+1$ interi tra 1 e $2n$. Dim. che
a) 2 sono coprimi
b) 2 sono uno mult. dell'altro.

a) $\boxed{1\ 2}\boxed{3\ 4}\boxed{5\ 6}$ - $\boxed{2n-1\ \ 2n}$

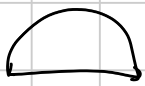
b)
$1\ 2\ 4\ 8 \dots \quad 2^k$
$3\ 6\ 12\ 24 \dots \quad 3\cdot 2^k$
$5\ 10\ 20 \dots \quad 5\cdot 2^k$
19

n classi, quante i numeri dispari.



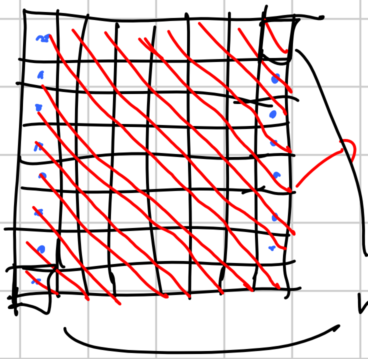
In T ci sono 17 punti

Dim. che esiste un semicerchio



di raggio 5 che ne copre 2.

Scacchiera 8x8. Quanti alfieri ci posso mettere al massimo che non si attacchino?



Minimo n per cui tra n interi positivi che hanno fattori primi ≤ 30 ce ne sono sempre 2 il cui prodotto è un quadrato perfetto. 2^{10}

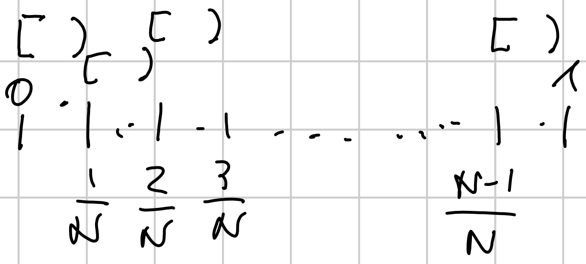
Massimo n numero di targhe di 6 cifre con sempre almeno 2 cifre diverse.

Teorema di Dirichlet sull'approssimazione diofantea:

α numero reale irrazionale. $\forall N$ intero positivo $\exists$ frazione $\frac{p}{q}$ con $q \leq N$ t.c. $\left|\frac{p}{q} - \alpha\right| < \frac{1}{N^2}$ $\rightarrow$ è q^2

Dim. $\{0\cdot\alpha\}$ $\{1\cdot\alpha\}$ $\{2\cdot\alpha\}$ .... $\{N\cdot\alpha\}$ $\qquad \{\ \} =$ parte frazionaria

nessuna è $0, \frac{1}{N}, \frac{2}{N}, \dots \frac{N-1}{N}$
(tranne $0\cdot\alpha$)



$0 < \{i\cdot\alpha\} < 1$

$\forall i = 0, \dots, N$

$\Rightarrow$ $\{i\cdot\alpha\}$ e $\{j\cdot\alpha\}$ sono nello stesso intervallino per certi opportuni indici i e j. Supp. $i > j$

$$0 < \{(i-j)\cdot\alpha\} < \frac{1}{N}$$

$$i\cdot\alpha = K + \{i\cdot\alpha\}$$
$$j\cdot\alpha = H + \{j\cdot\alpha\}$$

$$(i-j)\cdot\alpha = K - H + \{(i-j)\cdot\alpha\}$$

$$\alpha = \frac{K-H}{i-j} + \frac{\{(i-j)\cdot\alpha\}}{i-j}$$

$$\left|\alpha - \frac{K-H}{i-j}\right| = \frac{\{(i-j)\cdot\alpha\}}{i-j} < \frac{\frac{1}{N}}{i-j}$$